U d'/of OTTAWA
39003006145147

Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
University of Toronto

http://archive.org/details/oeuvrescompltesd16huyg

J'ai l'honneur de vous offrir, de la part des Directeurs de la Société hollandaiſe des Sciences, le Volume Seizième des

ŒUVRES COMPLÈTES DE CHRISTIAAN HUYGENS

publiées par cette Société.

Veuillez m'obliger par un avis de réception et agréer l'aſſurance de ma conſidération la plus diſtinguée.

A. F. HOLLEMAN,

Secrétaire Perpétuel.

OEUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME SEIZIÈME
1929

PERCUSSION. QUESTION DE L'EXISTENCE ET DE LA PERCEPTIBILITE DU MOUVEMENT ABSOLU. FORCE CENTRIFUGE. TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666.

SWETS & ZEITLINGER N.V.
AMSTERDAM - 1967

Réimprimé avec le consentement de la Société Hollandaise des Sciences

.8
.16

PERCUSSION. QUESTION DE L'EXISTENCE ET DE LA PERCEPTIBILITÉ DU MOUVEMENT ABSOLU. FORCE CENTRIFUGE. TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666.

DE MOTU CORPORUM
EX
PERCUSSIONE.

Avertiſſement.

APERÇU GÉNÉRAL DE LA GENÈSE DU TRAITÉ „DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE".

On connaît la grande amitié qui liait le père de Chriſtiaan Huygens à Descartes et l'admiration profonde que celui-ci lui inſpirait [1]). Cette admiration fut partagée par le jeune Chriſtiaan qui, ſans doute, a rencontré plus d'une fois le philoſophe français dans la maiſon paternelle, et ſubi l'aſcendant de cette puiſſante perſonnalité.

Voici, en effet, comment vers la fin de ſes jours Chriſtiaan Huygens décrivit l'influence que Descartes avait exercée ſur lui dans ſa jeuneſſe [2]): „Mr. des Cartes avoit trouvè la maniere de faire prendre ſes conjectures et fictions pour des veritez. Et il arrivoit a ceux qui liſoient ſes Principes de Philoſophie [3]) quelque choſe de ſemblable qu'a ceux qui liſent des Romans qui plaiſent et font la mesme impreſſion

---

[1]) Voir sur les relations entre Constantyn Huygens et Descartes les p. 113—116 du T. XII, 1910, des „Œuvres de Descartes" publiées par Adam et Tannery.

[2]) Voir la p. 403 de notre T. X.

[3]) Les „Principia philosophiæ", ouvrage mentionné dans la note 4 de la p. 546 du T. II, parurent en juillet 1644, lorsque Huygens, né le 14 avril 1629, avait 15 ans; voir la p. 358 du T. XII des „Œuvres de Descartes".

que des hiſtoires veritables. La nouveautè des figures de ſes petites particules et des tourbillons y font un grand agrement. Il me ſembloit lorsque je lus ce livre des Principes la premiere fois que tout alloit le mieux du monde, et je croiois, quand j'y trouvois quelque difficultè, que c'étoit ma faute de ne pas bien comprendre ſa penſée. Je n'avois que 15 à 16 ans. Mais y ayant du depuis decouvert de temps en temps des choſes viſiblement fauſſes, et d'autres tres peu vraiſemblables je ſuis revenu de la preoccupation ou j'avois eſtè".

En mai 1645, à l'âge de 16 ans, Chriſtiaan entra dans l'Univerſité de Leiden, où il rencontra le mathématicien Frans van Schooten, qui, l'année ſuivante, ſuccéda à ſon père, du même nom, comme profeſſeur de mathématiques à l'école des ingénieurs, dépendant de l'Univerſité. Cet homme d'environ trente ans, grand admirateur de Descartes, fut le précepteur et bientôt l'ami de Chriſtiaan. Il conſidérait comme ſa vocation principale d'enſeigner à ſes élèves, et ſurtout au plus éminent d'entre eux [1]), les nouvelles méthodes et découvertes mathématiques du philoſophe français.

En 1650 Huygens donna encore un témoignage éloquent de ſon admiration, à peine atteinte, pour Descartes dans les vers qu'il conſacra à ſa mémoire et qui finiſſent par la ſtance [2]):

„Nature, prends le deuil, viens plaindre la première
Le Grand Descartes, et monſtre ton déſeſpoir;
Quand il perdit le jour, tu perdis la lumière,
Ce n'eſt qu'à ce flambeau que nous t'avons pu voir."

C'eſt, paraît-il, en 1652 que la réaction dans l'eſprit de Huygens à l'égard de Descartes ſe fait jour.

Le 17 janvier 1652 il écrit à van Gutſchoven [3]) qu'il doute de la vérité des

---

[1]) Nous possédons encore le Manuscrit de l'écriture de van Schooten qui a servi aux études de Huygens; voir les p. 7—20 de notre T. XI.

[2]) Voir la p. 125 du T. I.

[3]) Voir la p. 167 du T. I.

[4]) Voici ces règles dans la version française de la traduction, autorisée par Descartes, de 1647 (voir la note 4 de la p. 101):

„La premiere est que, si ces deux corps, par exemple B & C [voir la figure de la note 4 de la p. 93] estoient exactement égaux, & se mouuoient d'égale vitesse en ligne droite l'vn vers l'autre..., lors qu'ils viendroient à se rencontrer, ils rejalliroient tous deux également

règles de Descartes ſur le choc des corps [4]), la première exceptée, pour ne pas dire qu'il les ſuſpecte d'être fauſſes. Il pourrait apporter ſes raiſons, ſurtout contre

---

& retourneroient chacun vers le costé d'où il seroit venu, sans perdre rien de leur vitesse.

La seconde est que, si B estoit tant soit peu plus grand que C, & qu'il se rencontrassent auec mesme vitesse, il n'y auroit que C qui rejallit vers le costé d'où il seroit venu, & ils continueroient par apres leur mouuement tous deux ensemble vers ce mesme costé.

La troisiéme que, si ces deux corps estoient de mesme grandeur, mais que B eust tant soit peu plus de vitesse que C, non seulement, apres s'estre rencontrez, C seul rejalliroit, & ils iroient tous deux ensemble, comme deuant, vers le costé d'où C seroit venu; mais aussi il seroit nécessaire que B luy transferast la moitié de ce qu'il auroit de plus de vitesse.

La quatriéme que, si le corps C estoit tant soit peu plus grand que B, & qu'il fust entierement en repos, de quelle vitesse que B pust venir vers luy jamais il n'auroit la force de le mouuoir, mais il seroit contraint de rejallir vers le mesme costé d'où il seroit venu.

La cinquiéme est que, si, au contraire, le corps C estoit tant soit peu moindre que B, celuy-cy ne sçauroit aller si lentement vers l'autre, lequel je suppose encore parfaitement en repos, qu'il n'eust la force de le pousser & luy transferer la partie de son mouuement qui seroit requise pour faire qu'ils allassent par apres de mesme vitesse.

La sixiéme, que si le corps C estoit en repos, & parfaitement égal en grandeur au corps B, qui se meut vers luy, il faudroit necessairement qu'il fust en partie poussé par B, & qu'en partie il le fit rejallir; en sorte que, si B estoit venu vers C auec quatre degrez de vitesse, il faudroit qu'il luy en transferast vn, & qu'avec les trois autres il retournast vers le costé d'où il seroit venu.

La septiéme & derniere regle est que, si B et C vont vers vn mesme costé, & que C precede, mais aille plus lentement que B, en sorte qu'il soit enfin atteint par luy..., il peut arriuer que B transferera vne partie de sa vitesse à C, pour le pousser deuant soy; & il peut arriuer aussi qu'il ne luy en transferera rien du tout, mais rejallira, auec tout son mouuement, vers le costé d'où il sera venu. A sçavoir, non seulemenr lors que C est plus petit que B, mais aussi lors qu'il est plus grand, pourueu que ce en quoy la grandeur de C surpasse celle de B, soit moindre que ce en quoy la vitesse de B surpasse celle de C, jamais B ne doit rejallir, mais pousser C, en luy transferant vne partie de sa vitesse. Et au contraire, lors que ce en quoy la grandeur de C surpasse celle de B, est plus grand que ce en quoy la vitesse de B surpasse celle de C, il faut que B rejallisse, sans rien communiquer à C de son mouuement; & enfin, lors que l'excez de grandeur qui est en C, est parfaitement égal à l'excez de vitesse qui est en B, cetuy-cy doit transferer vne partie de son mouuement à l'autre, & rejallir auec le reste."

Il est clair que plusieurs de ces règles, nommément la quatrième, sont en contradiction avec la plus simple expérience. Seulement le fait de leur admission par Descartes devient un peu moins incompréhensible par ce qu'il considérait ces règles comme des règles théoriques qui ne se réalisent dans la pratique que très rarement. Ainsi il dit à propos de la quatrième que pour sa réalisation il est nécessaire que le corps C „non seulement n'eust point de mouuement apparent, mais aussi qu'il ne fust point enuironné d'air, ni d'aucuns autres corps liquides, lesquels, comme je diray cy-apres, disposent les corps durs qu'ils enuironnent, à pouuoir estre meus fort aisement" et il revient encore plus d'une fois (voir les articles 53—59, p. 93—99 de la pagination de la dernière partie du T. IX de l'édition d'Adam et Tannery) sur cette restriction; voir encore la note 7 de la p. 101.

la quatrième [1]), mais il craint que cela n'intéreſſe pas ſuffiſamment ſon correspondant.

En octobre 1652 [2]), pour illuſtrer la différence entre ſes vues et celles de Descartes, il indique à van Schooten le cas où les deux corps ſe meuvent en ſens contraire de manière que le produit de la maſſe et de la viteſſe a la même valeur pour les deux. D'après lui, Huygens, les deux corps rejailliront chacun du côté d'où ils ſont venus avec la même viteſſe qu'ils avaient avant leur rencontre; ſuivant Descartes, qui dans ſes règles avait omis ce cas, le plus petit n'aurait pas même la puiſſance de mouvoir le plus grand lorsque celui-ci ſerait en repos. Or, la ſolution indiquée ici par Huygens eſt préciſément celle de laquelle il affirme [3]) dans le manuſcrit de 1652, dont nous parlerons bientôt, pouvoir déduire la ſolution de tous les autres cas [4]).

Enfin, le 16 décembre 1653, il fait connaître à Kinner à Löwenthurn [5]) ſa ſolution du cas où de deux corps égaux qui ſe choquent l'un eſt en repos, et lui propoſe le cas où le corps en mouvement rencontre un corps en repos de grandeur double. Perſonne, qu'il ſache, n'a donné une ſolution acceptable dece dernier cas, ou du moins pas une qui convienne aux raiſonnements qu'il avait inſtitués à ce ſujet.

Voilà ce que nous apprend la Correspondance de Huygens à propos de ſes premières recherches ſur le choc des corps. Voyons maintenant ce que les Manuſcrits nous révèlent. Il n'y en a qu'un que l'on puiſſe dater de ſi tôt que 1652. C'eſt la première feuille, de 4 pages, d'un Manuſcrit plus étendu dont les pages furent numérotées par Huygens. Cette feuille nous a fourni les trois premières Parties de l'Appendice I [6]). Sans doute contient-elle les premières recherches ſur le choc des corps durs. On y voit Huygens faire fauſſe route au début [7]) pour revenir immédiatement ſur ſes pas et choiſir une voie meilleure; en outre on trouve au milieu de la troiſième page, qui a été reproduite à la fin du préſent Tome en facſimilé, la minute d'une lettre à van Schooten [8]) à laquelle celui-ci répondit le

Manuſcrit de 1652.

---

[1]) Comparez (p. 39) la Prop. III et surtout la note 1 de la p. 38.

[2]) Voir la lettre du 29 octobre 1652, p. 186 du T. I.

[3]) Voir le deuxième et le troisième alinéa de la p. 96. On y voit que Huygens a même pensé à ériger sa solution du cas en question en axiome. Dans le Traité définitif on la rencontre comme Prop. VIII (p. 53). Elle joue un rôle prépondérant dans la déduction de la solution générale contenue dans la Prop. IX (p. 65—71); comparez les p. 65—67.

28 juillet 1652 [9]). Pourquoi cette minute aurait-elle été écrite à cette place si le reste de la page n'était pas déjà occupé?

Or, sur cette feuille qui doit donc dater de 1652, on rencontre déjà plusieurs des Théorèmes les plus importants du futur Traité sur le choc des corps durs [10]). En premier lieu le Principe de la relativité [11]), dont Huygens a tiré tant de profit et qui constate (pour employer l'image choisie de préférence par Huygens) que les choses se passent de même dans un bateau se mouvant avec une vitesse uniforme, qu'elles se passent sur la rive. Ensuite le beau Théorème d'après lequel dans le choc des corps durs la vitesse de la séparation est égale à celle du rapprochement [12]). Enfin, ce qui est très remarquable, le Théorème de la conservation de la force vive [13]).

Remarquons que rien sur la feuille n'indique la manière dont ce dernier Théorème a été obtenu. Il semble très improbable que la voie exposée dans le Traité [14]) ait été suivie: il ne reste à notre avis que la conjecture énoncée par nous dans la note 10 de la p. 95. Mais nous reviendrons plus loin sur cette question [15]).

En outre on trouve à la troisième page de la feuille des calculs basés sur le Principe de la conservation de la quantité de mouvement [16]). Il est peu vraisemblable qu'à cette époque Huygens avait déjà donné à ce Principe sa forme propre

---

[4]) Dans sa réponse du 28 juillet 1652 (p. 187—188 du T. I) van Schooten cherche à suppléer à la lacune laissée par Descartes. Par analogie probablement avec la quatrième règle de Descartes, il prétend que le corps le plus grand ne perdra rien de sa vitesse et que le corps le plus petit rejaillira avec la vitesse qu'il possède avant le choc. On trouve dans la réplique de Huygens du 7 novembre 1652 (p. 457 du T. III) la réfutation très ingénieuse de cette solution de van Schooten.

[5]) Voir sa lettre du 16 décembre 1653, p. 260 du T. I.

[6]) Voir les p. 92—99.

[7]) Voir le deuxième et le troisième alinéa de la p. 92.

[8]) Voir le premier alinéa de la p. 99.

[9]) Voir les p. 183—184 de notre T. I.

[10]) Remarquons qu'il s'agit toujours du choc direct (nous dirions plutôt du choc central). Nous ne connaissons qu'un seul endroit dans les Manuscrits (voir les p. 117—118) où Huygens traite le choc indirect ou oblique. Il est vrai que ce qu'il y donne équivaut à une solution complète du cas de deux sphères dures, du moins lorsqu'on néglige le frottement.

[11]) Voir les p. 93—95.

[12]) Voir la phrase en italiques de la p. 92, de plus (p. 94) le premier alinéa de la Deuxième Partie et enfin les p. 96—97.

[13]) Voir le dernier alinéa de la p. 95.

[14]) Voir les p. 73—77.

[15]) Voir la p. 21—23.

[16]) Voir la p. 98.

qu'il n'a pas manqué de découvrir plus tard [1]), mais quoiqu'il fût déjà que le Principe interprété ſuivant la conception de Descartes n'eſt pas vrai [2]), il ſuppoſait, non ſans raiſon, que dans beaucoup de cas il peut être appliqué ſans amener d'erreur [3]). Il avait commencé par y attacher une grande valeur et ne l'a jamais rejeté entièrement [4]).

En tout cas ce que Huygens avait trouvé en 1652 ſuffiſait pour réſoudre tous les cas du choc direct des corps durs [5]) et l'on peut ſe demander pourquoi il n'a pas procédé dès lors à la publication de ſes réſultats.

Ce n'eſt certainement pas l'avis contraire de van Schooten, qui l'a retenu. Dans ſa lettre du 25 octobre 1654 [6]) celui-ci opine qu'il peut croire à peine qu'un eſprit ſi ſublime et perſpicace aurait publié quelque choſe qui ne ſerait pas conforme à la vérité. Il déconſeille Huygens de s'occuper de ce ſujet de peur qu'il n'emploie inutilement ſon temps et ſon travail; mais Huygens lui répond [7]) qu'il ſait bien que van Schooten n'eſt pas de ſon avis ſur les règles de Descartes; mais s'il avait pris connaiſſance de ce que lui, Huygens, avait déjà mis par écrit, non ſans labeur, ſur cette matière, il jugerait bien autrement. Car ſi les règles de Descartes, à l'exception de la première, ne ſont toutes fauſſes et contraires à ſes propres principes, lui, Huygens, ne ſaurait plus discerner ce qui eſt vrai ou faux.

La véritable raiſon de l'ajournement, Huygens nous la révèle lui-même dans un manuſcrit qui date d'une des dernières années de ſa vie [7]). Il y dit qu'il avait

---

[1]) Voir la note 2 de la p. 102.

[2]) Voir le troisième alinéa de la p. 95.

[3]) Savoir lorsque toutes les vitesses, avant et après le choc, sont dirigées vers le même côté, ce qui a lieu e. a. dans le cas particulier où un corps plus grand rencontre un corps plus petit en repos. Les calculs de la Troisième Partie (p. 98) sont donc justes, même si x et y représentent les valeurs absolues des vitesses, pourvu que B (voir la note 2 de la p. 98) soit plus petit que A. Et nous ne doutons pas que des deux solutions numériques données par Huygens dans le premier alinéa de la p. 96, la première ne soit obtenue à l'aide de ces calculs, tandis qu'évidemment la deuxième est dérivée de la première en ajoutant à toutes les vitesses, suivant le Principe de la relativité, une vitesse commune qui annule la vitesse originale du plus grand corps.

[4]) Comparez les pp. 102, 131 et 146, note 8. Aux pp. 106 et 140—141 il indique deux Hypothèses dont il s'est servi plus tard dans le Traité, qu'il reconnaît avoir emprunté au Principe énoncé par Descartes.

[5]) Témoin (p. 132—133) le début de la Onzième Partie où le problème le plus général du

ſuſpendu la publication de ce qu'il avait trouvé en 1652 ou 1654, puisque, outre les lois du choc, il reſtait autres choſes regardant la nature du mouvement qu'il n'avait pas encore ſuffiſamment approfondies et qui exigeaient une méditation prolongée [8]).

On rencontre des traces de cette méditation dans la ſuite du Manuſcrit mentionné à la p. 6 [9]). Elle concernait la nature et la puiſſance des forces qui accompagnent le choc [10]). Aucun inſtrument, dit-il [11]), ne ſurpaſſe en efficacité le marteau qui utiliſe cette puiſſance. Sans lui aucun édifice ne pourrait être conſtruit, aucun coin, aucun clou enfoncé, presqu'aucun travail accompli. Ne vaut-il donc pas la peine de comprendre la puiſſance infinie de la percuſſion, ſi grande qu'un ſeul homme muni d'un marteau pourrait mettre en mouvement une ſphère auſſi grande que toute la terre. *Annotations de 1654.*

Galilée, qu'il cite conſtamment à ce propos [12]), l'avait précédé dans cette recherche mais il n'avait pas fait beaucoup plus que differter ſur la difficulté du

---

choc direct des corps durs est résolu par Huygens à l'aide de deux des théorèmes qui lui étaient connus en 1652.

5) Voir la p. 301 du T. I.

6) Voir la p. 303 du même Tome et consultez encore au même propos les pp. 312—313, 317, 410—411 et surtout la p. 441 du T. I.

7) Nous le publierons plus loin dans ce Tome parmi les „Manuscrits ultérieurs concernant l'historique de la doctrine du choc des corps et la question de l'existence et de la perceptibilité du mouvement absolu".

8) „Me jam inde ab anno $165\overset{2}{4}$ veras leges reperisse quæ ad dura seu resistentia pertinent. sed de ijs in lucem edendis supersedisse, quod præter eas leges superessent quædam de motus natura nondum penitus mihi nec satis liquido perspecta, quæ longiorem meditationem requirebant".

9) Nous avons reproduit cette suite dans les dernières Parties, à commencer par la Quatrième, de l'Appendice I, p. 99—136. Consultez sur la date de 1654 que nous lui avons assignée la note 7 de la p. 99 et remarquez qu'elle doit avoir précédée certainement le Manuscrit de 1656 qui a fourni l'Appendice II tandis que la Correspondance de 1655 ne contient aucune indication que Huygens se soit occupé dans cette année du choc des corps.

10) Voir les pp. 99—100, 104—105, 111—113, 124, et aussi la note 10 de la p. 117 qui montre la préoccupation de Huygens à noter tout ce qui peut jeter de la lumière sur la nature de la percussion. De plus il est à présumer que les recherches intéressantes sur l'effet de l'intercalation d'un ou de plusieurs autres corps en repos entre deux corps dont l'un est en mouvement et l'autre en repos avaient ce même but; voir (p. 81—91) les Prop. XII et XIII du Traité „De Motu".

11) Voir les p. 104—105.

12) Voir les pp. 99, 100, 105, 112 et 113.

ſujet [1]). Huygens n'a pas réuſſi non plus à pénétrer le mécanisme de la percuſſion. L'état imparfait de la ſcience de la dynamique en était la cauſe. Des Théorèmes qui à nous, élevés dans l'école de la mécanique claſſique dont Newton fut le fondateur, ſemblent des plus élémentaires, étaient inconnus alors, et Huygens n'a pas ſu les découvrir. Il s'agit de l'égalité de l'impulſion *Fdt* reçue dans une certaine direction et de l'accroiſſement de la quantité de mouvement dans cette même direction [2]) comme auſſi de l'égalité de la réaction et de l'action [3]), Theorèmes, d'où Huygens aurait pu déduire facilement la grande force de la percuſſion comme conſéquence du peu de temps dans lequel elle s'accomplit, et de plus la formule véritable de la conſervation de la quantité de mouvement, qu'il a fini, en effet, par trouver, mais, comme nous le montrerons plus loin [4]), ſans bien ſentir la généralité et la ſignification primordiale pour la dynamique du Principe en queſtion.

En 1656 [5]) Huygens entreprend la tâche ardue de rédiger ſon Traité par axiomes ou hypothèſes, lemmes, théorèmes ou propoſitions [6]), pourvus de démonſtrations géométriques à la mode des anciens, comme il le jugeait alors néceſſaire ou du moins très déſirable. Le 20 juillet il peut écrire à de Roberval que ſon ouvrage eſt achevé [7]). Dans la note 1 de la p. 130 nous avons donné les raiſons qui nous portent à croire que le Manuſcrit de cet ouvrage eſt celui auquel nous avons emprunté l'Appendice II, p. 138—149.

Manuſcrit de 1656.

Le choix des hypothèſes était déjà fait depuis 1652. Il les expoſe [8]) dans ſa Préface [9]) qu'il ne fit qu'ébaucher, mais on les retrouve, numérotées, dans le Manuſcrit définitif [10]) qui a été reproduit dans le Traité. Les hypothèſes I, III, IV [11]) ſont faciles à accepter, II et V [12]) excluent les corps mous

---

[1]) Voir la p. 112—113 et comparez pour l'opinion de Huygens à ce propos le premier alinéa de la p. 138.

[2]) Comparez la „Lex. II", p. 1[illegible] de l'édition originale des „Philosophiæ naturalis principia mathematica" (1687) de Newton.

[3]) Voir la „Lex III", p. 13 des „Principia".

[4]) Comparez les p. 24—25.

[5]) Voir les pp. 448 et 457 du T. I.

[6]) Il avait eu aussi l'intention d'y joindre des problèmes à résoudre; voir la note 12 de la p. 117.

[7]) Voir la p. 457 du T. I.

[8]) Voir les p. 140—141.

[9]) Voir la note 2 de la p. 137.

[10]) Consultez la note 1 de la p. 30.

ou demi-durs. Avec le Principe: que le centre de gravité commun ne peut pas monter par l'effet de la gravité seule, elles suffisent, ou à peu près [13]), aux démonstrations quelques fois très compliquées des Propositions. Quant à ces Propositions, outre celles que nous avons mentionnées plus haut comme étant déjà connues de lui en 1652, les plus remarquables sont la Prop. V (p. 47) sur la réversibilité du choc, la Prop. IX (p. 65) contenant la solution complète du choc direct des corps durs, et les belles Prop. XII (p. 81) et XIII (p. 87) sur l'effet de l'interposition d'un ou de plusieurs corps en repos entre un corps en mouvement et un autre en repos.

Le Manuscrit définitif du Traité, écrit d'une autre main que celle de Huygens, est en grande partie une copie presque textuelle de celui de 1656 [14]). Mais il présente avec ce dernier certaines différences dont nous signalons celles qui ont quelque importance: *Manuscrit*

1°. La Préface est supprimée dans le Manuscrit définitif. Elle aurait dû contenir d'après l'esquisse qu'on en trouve dans le Manuscrit de 1656, outre les hypothèses dont nous venons de parler, un aperçu des travaux antérieurs de Galilée et de Descartes et les raisons qui ont conduit Huygens à commencer ses recherches. Elle était destinée à être complétée à l'aide des annotations faites en 1654 [15]).

2°. Huygens introduit la fiction de deux hommes, l'un dans un bateau l'autre sur la rive [16]), joignant leurs mains et combinant leurs mouvements pour déplacer

---

[11]) Voir respectivement les pp. 31, 33 et 39.

[12]) Voir les pp. 31 et 41. L'Hypothèse V est remarquable en ceci que le cas auquel elle se rapporte ne peut se présenter que lorsque la somme algébrique des deux quantités de mouvement est nulle. Elle dit que, lorsque la vitesse de l'un des deux corps ne change pas en valeur absolue par le choc il en doit être de même du deuxième corps. Or, lorsqu'on a $v'_A = \pm v_A$ (voir les notations de la note 1 de la p. 67) on doit avoir, à cause de la conservation de la force vive, $v'_B = \pm v_B$. Des quatre combinaisons possibles, trois peuvent être rejetées facilement lorsqu'on prend en considération que dans le choc la vitesse relative doit changer de signe et non de grandeur et qu'aucune des vitesses ne peut demeurer inaltérée à la fois en grandeur et en direction. Il ne reste donc que $v'_A = - v_A$, $v_B = - v_B$, mais cette solution, substituée dans l'équation $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$, donne $m_A v_A + m_B v_B = 0$.

[13]) Consultez la note 5 de la p. 43.

[14]) Comparez la note 19 de la p. 143.

[15]) Comparez la note 2 de la p. 137.

[16]) Consultez le frontispice de la p. 29 et la démonstration de la „Propositio Prima", p. 33—37.

des boules qui s'entrechoquent. On rencontre cet artifice pour la première fois dans une note [1]) envoyée par Huygens à la „Royal Society" le 5 janvier 1669 [2]). D'après la lettre qui accompagna l'envoi il devait ſervir à convaincre même les plus ſceptiques de la juſteſſe du principe de la relativité [3]). Son emploi a néceſſité un remaniement des démonſtrations des trois premières et de la neuvième Propoſition du Traité [4]). Ces démonſtrations en ſont devenues moins conciſes, mais on peut douter ſi elles ſont plus convaincantes qu'elles ne l'étaient auparavant [5]).

3°. En deux endroits différents il y a des additions. Nous les avons ſignalées dans les notes 4 de la p. 69 et 1 de la p. 90.

4°. Il y a une omiſſion à première vue très ſurprenante. Elle ſe rapporte à la Prop. VI (p. 49) où Huygens expoſe l'erreur de Descartes à propos de la conception du Principe de la conſervation de la quantité de mouvement. Cette Propoſition correspond au „Theorema 7" (p. 147) du Manuſcrit de 1656, mais dans ce dernier Manuſcrit Huygens ne ſe borne pas à démontrer l'erreur de Descartes, il indique enſuite par quelle modification ſon Principe peut être rectifié [6]). L'omiſſion complète et voulue de cette indication dans le Traité lui-même fait l'impreſſion d'une injuſtice envers Descartes. L'un de nous à cherché à expliquer cette attitude de Huygens par le déſir de porter un coup bien dirigé à la grande autorité de Descartes, qui menaçait de devenir un obſtacle au progrès de la

---

[1]) Voir les p. 336—343 de notre T. VI.

[2]) Voir la lettre à Oldenburg de cette date, p. 334—335 du T. VI.

[3]) Voir la p. 335 du T. VI, où l'on lit: „Vous verrez quelque difference entre la maniere dont j'ay demontrè la premiere proposition et celle dont je me suis servy aux autres, leurs contradictions et disputes [il s'agit des discussions dans l'Académie des Sciences du 4, 11 et 18 janvier 1668; voir la note 2 de la p. 156] m'ayant obligè de chercher toutes sortes de biais pour les convaincre, et la methode de la premiere proposition est celle ou ils ont trouvè le moins a redire. I'en ay voulu envoier de l'une et de l'autre pour savoir si ceux de la Societè Royale seront de mesme avis".

Ajoutons que dans la Pièce en question l'artifice a été employé aussi bien dans les autres démonstrations que dans celle de la première Proposition mais sous une forme légèrement différente. En effet, celles de la deuxième et de la troisième correspondent presque textuellement avec celles des Prop. II et III (p. 37—41) du Traité et de même celle de la quatrième Proposition de la Pièce avec les trois premiers alinéas (p. 65—69), excepté les dernières lignes du troisième, de la démonstration de la Prop. IX du Traité.

Dans ce Traité la deuxième forme fut donc préférée et des avant-projets de la note envoyée à Londres montrent qu'elle était de même antérieure à l'autre. Nous n'avons d'ailleurs pas cru nécessaire de reproduire ces avants-projets.

ſcience [7]). Cela eſt poſſible [8]), mais il y a une autre explication fondée ſur la nature même du Traité qu'il ſe propoſait de publier. Dans ce Traité rien n'eſt avancé qui ne ſoit prouvé par une démonſtration rigoureuſe baſée ſur des Hypothèſes bien définies. Or, il eſt certain que Huygens aurait pu compoſer une telle démonſtration du Théorème de la conſervation de la quantité de mouvement dans ſa vraie forme. Il ſuffiſait à cet effet de partir de ſa ſolution générale du problème du choc direct des corps durs [9]), comme il l'avait fait pour la Prop. XI (p. 73—77) ſur la conſervation de la force vive. Toutefois cela lui aurait coûté un certain effort pour lequel il lui manquait probablement l'inſpiration, occupé comme il l'était toujours de nouveaux projets et de nouvelles découvertes qui pluſieurs fois l'ont empêché de publier des réſultats importants qui avaient commencé à l'intéreſſer moins vivement [10]). Et c'eſt ſans doute cette même

---

[4]) Voir les pp. 33—41 et 67—69.

[5]) On peut comparer à cet effet les démonstrations p. 93—94 et p. 109—110 de la première Proposition avec celle p. 33—37 du Traité.

[6]) Voir la note 9 de la p. 146.

[7]) Voir les p. 1417—1418 de l'article „Christian Huygens' wissenschaftliche Lehrjahre" par D. J. Korteweg, qui a paru dans l'„Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik, 3ter Jahrgang", 1909, p. 1391—1396; 1411—1426. Aussi „Jaarboek der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 1909, Een en ander over de Huygens-Uitgave en over den invloed van Descartes op Christiaan Huygens", p. 13.

[8]) Voici, en effet, l'opinion de Huygens, en 1693 (voir la p. 405 de notre T. X), sur l'influence exercée par les écrits de Descartes: „Il devoit nous proposer son systeme de physique comme un eſsay de ce qu'on pouvoit dire de vraisemblable dans cette science en n'admettant que les principes de mechanique et inviter les bons esprits a chercher de leur costè. Cela eust estè fort louable. Mais en voulant faire croire qu'il a trouvè la veritè, comme il le fait par tout, en se fondant et se glorifiant en la suite et en la belle liaison de ses expositions, il a fait une chose qui est de grand prejudice au progrès de la philosophie. Car ceux qui le croient et qui sont devenus ses sectateurs, s'imaginent de posseder la connoissance des causes de tout, autant qu'il est possible de les sçavoir; ainsi ils perdent souvent le temps a soutenir la doctrine de leur maitre, et ne s'etudient point a penetrer les raisons veritables de ce grand nombre de phenomenes naturels, dont des Cartes n'a debitè que des chimeres".

[9]) Naturellement une telle démonstration aurait été loin de faire valoir la portée générale du Théorème qui n'eût été prouvé de cette manière que pour le cas du choc direct des corps durs.

[10]) Voir pour un exemple frappant concernant sa „Dioptrique" qui, de même que le Traité „De Motu", n'a paru que comme Œuvre posthume, les pp. III—VII et XVIII—XIX de notre T. XIII; voir aussi aux p. 95—96 de notre T. IX la lettre de Huygens à de la Hire du 26 sept. 1686 avec la longue liste d'ouvrages de Huygens qui n'avaient pas encore paru mais dont la conception datait de 1667—1680 et dont probablement plusieurs n'auraient jamais paru pendant sa vie sans l'intercession de De la Hire et de Fatio de Duilliers (voir la p. 190 du T. IX).

raiſon qui l'a empêché d'incorporer dans ſon Traité certains autres réſultats obtenus après 1656, ſavoir ſes ſolutions complètes et motivées des problèmes du choc direct des corps mous et des corps ſemi-durs [1]).

Nous ignorons à quelle époque le Manuſcrit définitif, qui a ſervi à la publication du Traité, en 1703, dans les „Opuscula poſtuma" [2]), fut compoſé, et par quelle main il fut écrit ſous la direction de Huygens [3]). Nous ſavons ſeulement qu'il doit être poſtérieur à 1673 [4]), année dans laquelle parut l'„Horologium oscillatorium".

En 1669 Huygens publia ſes „Regles du mouvement dans la rencontre des corps" dans le Journal des Sçavans [5]) ſans les faire accompagner d'aucune démonſtration. Nous raconterons les circonſtances qui ont amené cette publication dans l'Avertiſſement ſuivant. Ici nous voulons noter encore que trois ans avant ſa mort Huygens n'avait pas abandonné le projet de faire paraître les démonstrations de ſes règles, puisqu'il écrivit à Leibniz le 11 juillet 1692 [6]) „Sur la matiere du mouvement j'ay bien des choſes nouvelles et paradoxes à donner, que l'on verra, quand je publieray mes demonſtrations des Regles de la Percuſſion, inſérées autrefois dans les Journaux de Paris et de Londres".

LES CORPS DURS DE HUYGENS.

Des corps durs, poſſédant les propriétés que Huygens leur attribue, n'exiſtent pas dans la nature.

Imaginons, en effet, deux corps parfaitement élaſtiques et ſuppoſons que leur choc ſoit un procès parfaitement adiabatique; ces corps ſe quitteront, excepté dans des cas très ſpéciaux, en exécutant des vibrations, et ces vibrations abſorberont une partie plus ou moins grande, mais *finie*, de l'énergie de leur mouvement, de ſorte qu'après le choc la ſomme des forces vives de leurs mouvements progreſſifs ne ſera plus ce qu'elle était auparavant [7]).

---

[1]) Voir les p. 161—167.

[2]) Comparez la note 1 de la p. 30.

[3]) Nous nous sommes assurés qu'il n'est pas de l'écriture de Niquet (voir la p. VII de notre T. XIII), ni de celle de Fatio de Duilliers (voir la p. 190 du T. IX)

[4]) Comparez la note 3 de la p. 52.

La queſtion peut être traitée à peu près rigoureuſement pour le cas du choc central de deux cylindres homogènes et iſotropes dont les ſections ſont égales et ſe couvrent au moment du choc, pourvu que leurs longueurs l_A et l_B ſoient ſuffiſamment grandes par rapport aux dimenſions des ſections, et que l'on accepte la loi de Hooke.

Suppoſons, en effet, que ces cylindres A et B [8]) (l_A étant égal ou ſupérieur à l_B) ont d'abord des viteſſes égales et oppoſées, dont la grandeur abſolue eſt v, les axes ſe mouvant le long d'une même droite, et qu'au moment $t = 0$ les extrémités planes viennent en contact au point $x = 0$. Si l'axe des x poſitif eſt dirigé vers le cylindre B, que, pour fixer les idées, nous ſuppoſerons ſe trouver à droite du cylindre A, et ſi l'on déſigne par c la viteſſe de propagation des ondes de compreſſion ou de dilatation, la ſolution prend la forme ſuivante:

Après un court intervalle de temps t la partie du cylindre B compriſe entre les plans $x = 0$ et $x = ct$ ſera ramenée au repos et il ſe ſera produit dans cette partie une contraction $v : c$ par unité de longueur. D'autre part la partie au delà du plan $x = ct$ ſe trouvera encore dans l'état naturel et aura conſervé la viteſſe $-v$.

Au moment $t = l_B : c$ le cylindre B tout entier ſe trouve en repos avec la contraction dont il vient d'être queſtion, contraction qui diſparaîtra maintenant à partir de l'extrémité droite. Tant que t eſt compris entre $l_B : c$ et $2l_B : c$ on peut dire que la partie du cylindre entre $x = l_B$ et $x = 2l_B - ct$ a repris ſa longueur naturelle; en même temps cette partie aura acquis la viteſſe $+v$. Quant à la partie entre $x = 0$ et $x = 2l_B - ct$, elle eſt encore en repos et on y trouve la contraction $v : c$.

Enfin à l'inſtant $t = 2l_B : c$ le cylindre entier eſt animé de la viteſſe $+v$, la contraction ayant diſparu dans toute ſon étendue.

Soit maintenant $l_B = l_A$. Alors dans le cylindre A des phénomènes tout-à-fait analogues auront lieu et les deux corps ſeront revenus à l'état naturel au même inſtant $t = 2l_A : c = 2l_B : c$. Comme à cet inſtant ils auront les viteſſes $-v$ et $+v$

---

5) Voir l'article suivant du Tome présent.

6) Voir la p. 302 du T. X.

7) De même la vitesse relative avec laquelle leurs centres de gravité se quittent ne sera pas égale en grandeur à celle avec laquelle ils s'approchaient. Ces résultats sont donc en contradiction avec deux propriétés caractéristiques des corps durs de Huygens; voir les Prop. IV (p. 43) et XI (p. 73).

8) Pour simplifier nous nous bornons au cas de cylindres formés de la même substance.

ils se séparerons avec ces vitesses. Le résultat du choc est donc conforme à la théorie de Huygens [1]),

Il n'en est plus ainsi lorsque $l_B < l_A$. Alors au moment $t = 2l_B : c$ où le cylindre B a atteint l'état qui vient d'être indiqué, la partie de A voisine de B se trouvera encore en repos. Toute pression qu'elle exerce sur B cessera donc et quoique les cylindres ne se séparent pas encore [2]) le choc peut être considéré comme fini. Le cylindre B, plus court que A, se comporte donc entièrement comme s'il avait rencontré dans les mêmes circonstances un cylindre de longueur égale l_B.

Dans le cas plus général, où nous désignerons par v_A et v_B les vitesses avant, et par v'_A et v'_B celles après le choc, on déduit facilement de ces résultats, pour les cylindres égaux: $v'_B = v_A$ et $v'_A = v_B$ [3]) et pour les cylindres inégaux $v'_B = v_A$, mais (à cause de la conservation de la quantité de mouvement) $v'_A = [(l_A - l_B) v_A + l_B v_B] : l_A$.

On trouve ainsi pour la perte par le choc de l'énergie du mouvement progressif des cylindres:

$$T - T' = \tfrac{1}{2}\rho(l_A v^2{}_A + l_B v^2{}_B) - \tfrac{1}{2}\rho(l_A v'^2{}_A + l_B v'^2{}_B) = \tfrac{1}{2}\rho l_B (l_A - l_B)\rho(v_A - v_B)^2 : l_A,$$

où ρ représente la masse par unité de longueur.

Il en résulte:

$$\frac{T - T'}{T} = \frac{l_B (l_A - l_B)(v_A - v_B)^2}{l_A (l_A v^2{}_A + l_B v^2{}_B)}.$$

Dans le cas $v_A = -v_B$ et $l_A = 2l_B$ on trouve p. e. $\frac{2}{3}$ pour ce rapport [4]).

Bien entendu, ce qui précède est limité à des vitesses de translation v qui sont petites par rapport à la vitesse de propagation c. Dès que la fraction $v : c$, et par conséquent la compression produite dans les cylindres deviennent tant soit peu

---

[1]) Comparez l'Hypothèse II (p. 31). On n'en peut pas conclure qu'il en est de même pour des corps égaux quelconques; lorsque p. e. on pourvoit les cylindres égaux de tiges perpendiculaires à leur axe il est clair qu'en général ces tiges exécuteront des vibrations après la séparation des cylindres.

[2]) Parce que, à l'instant même où la contra-pression de B sur A cesse, la partie de A voisine de B commence successivement à retourner à son état naturel et à prendre la vitesse $+v$, de sorte que la séparation des cylindres n'a lieu qu'au moment $t = 2l_A : c$.

[3]) Comparez (p. 37) la Prop. II.

[4]) Dans le cas remarquable $l_A v_A = -l_B v_B$ où la somme algébrique des quantités de mouve-

considérables la loi de Hooke cesse d'être vraie et certaines simplifications dont on s'est servi dans les calculs ne sont plus justifiées.

La solution que nous venons d'esquisser fut trouvée par Cauchy en 1826 [5]), mais il paraît que pendant quelque temps elle fut supplantée presque complètement par la solution du même problème par Poisson [6]) d'après laquelle les cylindres ne se sépareront après le choc que dans le seul cas $l_B = l_A$. Or, la faute dans le raisonnement de Poisson fut indiquée par de Saint-Venant [7]) qui élabora plus amplement la solution de Cauchy et la trouva juste. En outre, ce qui est remarquable, la bonne solution fut découverte de nouveau indépendamment par F. Neumann [8]), par Thomson et Tait [9]) et par A. Ritter [10]).

Bien que cette solution ne soit vérifiée que très imparfaitement par les expériences [11]), elle prouve du moins que la perte de force vive du mouvement pro-

ment est nulle, on a $T' : T = l^2_B : l^2_A$, ce qui montre que, pour une valeur donnée de T, T' (savoir l'énergie du mouvement progressif qui reste après le choc) peut diminuer indéfiniment avec le rapport $l_B : l_A$.

5) Voir son „Mémoire sur le choc des corps élastiques". Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société philomatique", Paris, 1826, p. 180—182.

6) Voir les § 499—504 (p. 331—343) du T. II du „Traité de Mécanique" par S. D. Poisson, Paris, Bachelier, 1833.

7) Voir son article: „Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour leur translation ultérieure; Et plus généralement, sur le mouvement longitudinal d'un système de plusieurs prismes élastiques. Journal de mathématiques pures et appliquées", 2 sér., T. XII, 1867, p. 237—277.

8) F. Neumann, „Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers", Leipzig, 1885, p. 332—347. Suivant la préface de O. E. Meyer la leçon en question fut déjà professée en 1858.

9) Voir les p. 280—282, article 303—306, Vol. I, Part. I, du „Treatise on natural philosophy", new edition, Cambridge, 1879, ou les articles correspondants de la première édition de 1867.

10) „Beitrag zur Theorie des elastischen Stosses", Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Bd. 35, 1891, p. 1383—1386.

11) Le choc des corps physiques a donné lieu à de nombreuses recherches tant expérimentales que théoriques. On en trouve un résumé jusqu'à l'année 1909 dans l'introduction de l'article „Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stosses" de C. Ramsauer („Annalen der Physik", Bd. 30, p. 417—494). Le même article contient, pour le cas des cylindres, les résultats de beaucoup d'expériences très variées. Des expériences plus récentes ont été instituées pour le même cas par L. Hartmann (voir ses articles

greſſif, cauſée par les vibrations que le choc excite, peut être conſidérable dans le cas des cylindres et que, par conſéquent, la théorie de Huygens n'y peut pas rendre compte des phénomènes.

Heureuſement on eſt conduit à une conclusion bien différente ſi l'on conſidère le choc de corps à ſurface convexe, qui dans leur rencontre ne ſe touchent que ſur une petite étendue. Dans ce cas, la théorie de Huygens peut être maintenue, ſi ſeulement on ſuppoſe que les viteſſes des corps ſont très petites par rapport aux viteſſes avec lesquelles des ondes élaſtiques ſe propagent à leur intérieur. C'eſt du reſte une ſuppoſition ſans laquelle la théorie deviendrait extrêmement compliquée.

Afin de juſtifier la théorie de Huygens dans les cas dont il s'agit maintenant nous pouvons nous baſer ſur les réſultats obtenus par H. Hertz [1]) dans ſes recherches ſur le contact de corps élaſtiques. À cet effet il nous ſuffira ici de conſidérer des ſphères à rayons égaux et formées de la même ſubſtance; on comprendra facilement que les concluſions reſteront les mêmes pour des cas beaucoup plus généraux.

Voici le problème (ſimplifié pour ce cas) que Hertz s'eſt poſé. Une ſphère élaſtique eſt aſſujettie à une preſſion, exercée ſur une petite étendue A de ſa ſurface, dont la réſultante, dirigée vers le centre, a la grandeur donnée P, et à une deuxième force de direction oppoſée et d'égale grandeur qui eſt répartie uniformément ſur tout le volume du corps. Il s'établira alors un état d'équilibre

„Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps". Comptes rendus, T. 163, 1916, p. 559—569 et T. 164, 1917, p. 491—494).

W. Voigt explique les divergences, souvent très grandes, des résultats expérimentaux d'avec ceux prédits par la théorie de l'élasticité dans le cas des cylindres, par les conditions qui existent dans le voisinage du plan du choc (voir les articles „Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe" et „Zur Theorie des longitudinalen Stosses zylindrischer Stäbe". Annalen der Physik, Bd. 19, 1883, p. 44—65 et Bd. 46, 1915, p. 657—676).

Il est curieux du reste de remarquer que dans les Fig. 11 et 13 (p. 160) de Huygens les ressorts indiqués joueraient dans le choc précisément le même rôle que la couche intermédiaire plus compressible dont Voigt a besoin pour expliquer comment les cylindres se comportent en réalité. Et lorsqu'on suppose que la masse des ressorts est négligeable on retombe sur le cas examiné expérimentalement par Ramsauer (p. 478—482 de son article) où les lois de Huygens du choc des corps durs sont suivies presque parfaitement.

[1]) Voir son article „Ueber die Berührung fester elastischer Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik," Bd. 92, 1881, p. 156—171 („Gesammelte Werke" Bd. 1, 1895, p. 155—173).

bien défini avec un aplatiſſement au point A que Hertz réuſſit à calculer à l'aide de la théorie de l'élaſticité. La ſubſtance de la ſphère étant conſidérée comme iſotrope, les formules contiennent deux conſtantes, ſavoir le module de rigidité K et le coefficient bien connu de Poiſſon μ. Rappelons ici que, ſi ρ eſt la denſité, les viteſſes de propagation de vibrations transverſales et longitudinales auront reſpectivement les valeurs:

$$c_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad c_l = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{K}{\rho}}$$

Si, au lieu d'être conſtantes, les forces P et — P changent d'un moment à l'autre, elles donneront lieu à des vibrations, mais la meſure dans laquelle ces mouvements intérieurs interviennent dépend entièrement de la viteſſe des variations des forces. On peut négliger les vibrations et appliquer à chaque inſtant les formules de l'équilibre, lorsque les variations ſont tellement lentes que le temps T néceſſaire pour un changement appréciable de P et de — P eſt beaucoup plus grand que la période des vibrations propres du corps. Comme pour une ſphère de rayon R cette période eſt de l'ordre de grandeur R : c_t ou R : c_l, la condition prend la forme:

$$T \gg \frac{R}{c_t} \text{ ou } T \gg \frac{R}{c_l}.$$

Dans ce qui ſuit nous nous ſervirons de la première de ces inégalités, qui embraſſe la deuxième, parce que $c_l > c_t$.

Dans le problème du choc la force avec laquelle l'une des ſphères agit ſur l'autre joue le rôle de la preſſion P; elle augmente à partir de zéro jusqu'à une certaine valeur maximum et diminue enſuite pour disparaître au moment de la ſéparation [2]). Il eſt donc clair que les vibrations ſeront négligeables (ce qui aſſurera la juſteſſe de la théorie de Huygens) ſi l'intervalle de temps dans lequel ces variations ont lieu, c'eſt-à-dire la durée du choc ſatisfait à la première des conditions d'inégalité, que nous venons d'indiquer.

---

[2]) Le rôle des forces qui tiennent P en équilibre, donnant lieu à la résultante — P, est joué par des forces fictives opposées aux accélérations des éléments de volume et égales aux produits de ces accélérations par les masses.

Or, Hertz a trouvé pour cette durée [1]) une formule qu'on peut mettre sous la forme:

$$T = 2\left[\frac{5}{8}\pi\sqrt{2(1-\mu)}\right]^{\frac{2}{5}} \frac{R}{c_l^{\frac{4}{5}}\, v^{\frac{1}{5}}} \int_0^1 \left(1 - x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

dans laquelle v désigne la vitesse relative avec laquelle l'une des sphères s'approche de l'autre et où:

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = 1{,}472.$$

En substituant cette dernière valeur et en prenant $\mu = \frac{1}{3}$ pour le coefficient de Poisson, on trouve:

$$T = 3{,}76 . \frac{R}{c_l^{\frac{4}{5}}\, v^{\frac{1}{5}}}.$$

La condition pour T devient donc:

$$\left(\frac{v}{c_l}\right)^{\frac{1}{5}} \ll 3{,}76.$$

Elle pourra être remplie si la vitesse v est suffisamment petite.

Si, par exemple, on exige que $T = 20\,R : c_l$ on trouve $v = 0{,}000235\, c_l$. Pour l'acier la vitesse de propagation des vibrations transversales est à peu près $3{,}2 . 10^5$ cm. par sec., donc: $v = 75$ cm. par sec.

On voit ainsi que des expériences sont possibles dans lesquelles la théorie de Huygens se vérifie approximativement et qu'il n'y a pas lieu de s'étonner que Huygens qui expérimenta surtout avec des sphères était sous l'impression que les résultats de sa théorie correspondaient presque parfaitement avec les expériences [2]).

En tout cas cette théorie peut être considérée comme rigoureusement exacte

[1]) Les durées du contact entre les corps choquants, telles que la théorie de Hertz les donne, ont été vérifiées expérimentalement par W. Müller; voir l'article „Zur Kenntniss der Stossdauer elastischer Körper. Wiener Berichte", IIa, Bd. 123, 1914, p. 2157—2169.

[2]) Consultez les pp. 100, 113 et 140.

dans un cas limite, dont on s'approche, avec des corps donnés, en diminuant les viteſſes, ou bien, pour des viteſſes données, en augmentant dans la penſée le module de rigidité K. Dans le choc de corps „parfaitement durs", caractériſés par $K = \infty$, il ne ſe produirait aucune vibration intérieure.

Nous ne pouvons pas finir cette discuſſion rapide de l'applicabilité de la théorie de Huygens dans le domaine des corps phyſiques, ſans rappeler le rôle prépondérant que ſes règles du choc des corps durs ont commencé à jouer, deux ſiècles après leur découverte, dans le développement de la théorie cinétique des fluides.

PRINCIPE QUE LE CENTRE DE GRAVITÉ COMMUN NE PEUT PAS MONTER PAR LA GRAVITÉ SEULE. CONSERVATION DE LA FORCE VIVE DANS LE CHOC. SOLUTION PAR HUYGENS DU PROBLÈME DU CHOC DES CORPS MOUS OU SEMI-DURS.

Dans ſes recherches ſur la chaînette qui „ne faict point une parabole"[3]) et dans ſon merveilleux Traité ſur l'équilibre des corps flottants[4]), Huygens avait employé le Principe que le centre de gravité commun ſe place auſſi bas que poſſible[5]). Ce Principe ne pouvait ſervir ſous cette forme que dans des queſtions de ſtatique. C'eſt pourquoi il le modifie dans ſa théorie du choc en lui donnant la forme nouvelle: que le centre de gravité commun ne peut pas monter par l'effet de la gravité ſeule. Formulé de cette façon il devient entre les mains de Huygens un inſtrument puiſſant de recherches, et il n'y a pas lieu de s'en étonner. En effet, pour tous les phénomènes réverſibles ce Principe, que Huygens appela plus tard „le grand Principe des mechaniques"[6]), eſt équivalent à celui de la conſervation de l'énergie dans un champ gravifique, où la gravité agit partout dans la même direction et avec la même intenſité[7]).

---

[3]) Voir les pp. 28 et 40 de notre T. I et les trois derniers alinéas de la note 2 qui commence à la p. 57 du T. XI.

[4]) Voir les pp. 93—119 du T. XI.

[5]) Consultez sur ce Principe la note 1 de la p. 56.

[6]) En 1684; voir la 499 du T. VIII. Comparez aussi les pp. 439, 456, 462 et 463 du T. IX. Le Principe de la conservation de l'énergie a passé par diverses étapes avant d'obtenir sa

Pour le montrer, conſidérons un certain nombre de corpuscules (ou de corps lorsqu'on néglige les rotations) de maſſes m, de viteſſes v et qui ſe trouvent à des hauteurs h au deſſus d'un certain plan horizontal. Lorsque, à l'exemple de Huygens, on convertit les viteſſes en des hauteurs d'où les corpuscules peuvent être cenſés descendre ou jusqu'auxquelles elles peuvent s'élever en conſéquence de ces viteſſes, le principe employé par Huygens donne:

$$(1) \qquad \frac{\Sigma mh' + \Sigma\lambda mv'^2}{\Sigma m} \leqq \frac{\Sigma mh + \Sigma\lambda mv^2}{\Sigma m},$$

où h' et v' repréſentent les hauteurs et les viteſſes après le phénomène, et où $\lambda = \frac{1}{2g}$.

Lorsque le phénomène eſt réverſible on en déduit immédiatement:

$$(2) \qquad \Sigma mh' + \Sigma\lambda mv'^2 = \Sigma mh + \Sigma\lambda mv^2,$$

et dans le cas du choc central de deux corps durs:

$$(3) \qquad m_A v'^2_A + m_B v'^2_B = m_A v^2_A + m_B v^2_B.$$

Il eſt vrai que dans le Traité la déduction de cette dernière relation eſt beaucoup plus compliquée. Huygens n'y emploie pas la réverſibilité du choc [1]). En vérité, il n'applique le Principe du centre de gravité commun qui ne peut pas monter qu'au cas où $m_A v_A + m_B v_B = 0$ [2]). À l'aide de ce Principe et de la Prop. IV [3]), il arrive à la concluſion que dans le cas conſidéré on doit avoir $v'_A = -v_A$ et $v'_B = -v_B$. Puis le Principe de la relativité lui permet de remonter de ce cas ſpécial au cas général [4]), après quoi il déduit l'équation (3) des réſultats obtenus pour ce dernier cas [5]). Mais cette déduction eſt de l'année 1656, lorſque Huygens compoſa le Manuſcrit de cette date [6]), tandis que la Propoſition qui correſpond à l'équation (3) lui était connue depuis 1652 [7]) et appartenait aux

forme définitive. Or, on peut considérer la découverte de sa validité pour le champ gravifique en question comme une des premières de ces étapes et on doit en donner l'honneur à Huygens. En effet, non seulement pour le choc des corps durs mais aussi plus tard pour la détermination des centres d'oscillation (voir les Prop. IV et suivantes de la „Pars Quarta" de l'„Horologium oscillatorium" de 1673, p. 98—146 de l'édition originale) sa méthode est équivalente à l'emploi du Principe en question. Consultez encore la note 9 de la p. 163, où l'on voit que Huygens se rendait compte parfaitement que toute déviation de son Principe créerait la possibilité de construire un „perpetuum mobile".

[1]) Il l'avait toutefois déjà formulée dans la Prop. V (p. 47), et donné une démonstration

premiers réſultats de ſes recherches ſur le choc. Peut-on croire que cette Propoſition fut obtenue ſi tôt par la voie compliquée que nous venons d'esquiſſer, et n'eſt-il-pas beaucoup plus plauſible que dès l'abord Huygens ait conſidéré la réverſibilité du choc comme une hypothèſe admiſſible du moins proviſoirement?

Il eſt curieux de remarquer que le même Principe: que le centre commun de gravité ne peut pas monter par l'effet de la gravité, combiné avec le Principe de Huygens de la relativité, implique le Théorème de la conſervation de la quantité de mouvement dans une direction donnée. Et cela ſans ſuppoſer cette fois la réverſibilité des phénomènes.

Concevons, en effet, qu'entre le temps t et le temps t' il ſe ſoit produit parmi les particules de maſſe m, ou plutôt entre les corps qu'elles compoſent et qu'on peut ſuppoſer durs, ſemi-durs ou mous, un certain nombre de chocs. Suppoſons d'ailleurs toutes ſortes de liaiſons entre eux. Ajoutons enſuite à toutes leurs viteſſes v (dont v_x, v_y et v_z ſoient les compoſantes dans trois directions rectangulaires) une viteſſe commune x, parallèle aux v_x; on aura donc:

$$(4)\quad \Sigma m\,[h' + \lambda\,\{(v'_x + x)^2 + v'^2_y + v'^2_z\}] \leqq \Sigma m\,[h + \lambda\,\{(v_x + x)^2 + v^2_y + v^2_z\}].$$

On en déduit:

$$(5)\qquad \Sigma m[h' - h) + \lambda\,(v'^2 - v^2)] \leqq 2\lambda x\,[\Sigma m v_x - \Sigma m v'_x]\,,$$

mais cette inégalité ne peut être vraie pour toutes les valeurs de x ſans qu'on ait:

$$(6)\qquad \Sigma m v_x = \Sigma m v'_x\,;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce même raiſonnement eſt appliqué par Huygens au choc des corps mous et ſemi-durs, mais ſeulement dans le cas particulier où $m_A v_A + m_B v_B = 0$ [8]). Il

(p. 47—49) fondée sur le Principe de la relativité et sur l'égalité des vitesses d'approchement et d'éloignement.

[2]) Consultez (p. 53—65), la Prop. VIII et sa démonstration.

[3]) Voir la p. 43. Remarquons que cette Proposition s'appuie à son tour sur l'Hypothèse V (p. 41), laquelle ne fait en réalité que supposer la réversibilité dans un cas spécial.

[4]) Voir les p. 65—69.

[5]) Voir (p. 73—77) la Prop. XI et sa démonstration.

[6]) Consultez la Deuxième Partie (p. 143—149) de l'Appendice II.

[7]) Voir le quatrième alinéa de la p. 95.

[8]) Voir les Pièces IX et X (p. 161—167).

prouve qu'alors néceſſairement $m_A v'_A + m_B v'_B$ s'annule auſſi, d'où il ſuit : $\frac{v'_A}{v_A} = \frac{v'_B}{v_B} = e$, où e varie entre 1 (pour les corps durs) et 0 (pour les corps mous).

On reconnaîtra facilement dans cette dernière équation le réſultat obtenu par Huygens dans le cas particulier en queſtion [1]), auquel le cas général du choc central de deux corps ſemi-durs peut être facilement réduit à l'aide du Principe de Huygens de la relativité [2]).

THÉORÈME DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DANS UNE DIRECTION DONNÉE.

Nous n'avons pas beaucoup à ajouter aux remarques déjà faites à propos de ce Théorème [3]).

Huygens a commencé par l'admettre dans la forme erronée ſous laquelle Descartes l'avait formulée [4]). Mais déjà en 1652, au début de ſes efforts pour conſtruire une théorie cohérente du choc des corps durs il avait reconnu la fauſſeté de cette forme dans certains cas [5]). Toutefois il ne douta pas de ſon applicabilité dans d'autres cas. Or, puisqu'il lui était impoſſible de conſtruire ſa théorie ſans quelques hypothèſes ſuffiſamment évidentes, et qu'il n'en trouva pas ailleurs, il en emprunta deux [6]) au Principe énoncé par Descartes.

Deux années plus tard il avait découvert la véritable formule du Théorème [7]). Il la publia dans le Journal des Sçavans du 18 mars 1669 [8]), mais la forme même de cette communication montre qu'il n'avait pas reconnu le

[1]) Voir le résumé de ses résultats pour ce cas spécial que Huygens donne en haut de la p. 166.

[2]) Consultez pour la solution graphique du cas général les notes 8 des pp. 163 et 165.

[3]) Voir les pp. 7, 8, 10, 12, 13 et 23.

[4]) Voir sa lettre à de Sluse du 3 janvier 1658, p. 115 de notre T. II, où l'on lit : „Axioma Cartesij de conservatione motus ita ut eadem semper ejus quantitas supersit, olim mihi quoque plane verisimile ac rationi consentaneum videbatur. Sed nunc scio perpetuum esse non posse; evidentiori alio principio id evincente".

[5]) Voir le troisième alinéa de la p. 95.

[6]) Les Hypothèses II (p. 31) et V (p. 41). On les trouve déjà dans le Manuscrit de 1652 (voir les pp. 92 et 96) et dans le Manuscrit de 1654 (voir les pp. 102 et 126).

[7]) Comparez les pp. 102, 116 et 131. À la p. 116 on rencontre le théorème correspondant : que le centre de gravité commun persiste après le choc à se mouvoir dans la même

fondement ſimple ſur lequel nous baſons ce Théorème depuis l'édition des „Principia" de Newton. En effet, après l'expoſition de la formule véritable [9]), il y parle de la „loy admirable de la Nature" d'après laquelle „le centre commun de deux ou trois ou de tant qu'on voudra de corps, avance toûjours également vers le méme coſtè en ligne droite devant & aprés leur rencontre", loi qu'il prétend pouvoir „*démontrer* en ce qui eſt des corps Spheriques, & qui *ſemble* eſtre generale en tous les autres tant durs que mols, ſoit que la rencontre ſoit directe ou oblique" [10]). Or, cette limitation au cas „des corps Spheriques" de ſa démonſtration de la loi en queſtion (qui eſt, de fait, entièrement identique avec le Théorème de la conſervation de la quantité de mouvement) montre la nature ſpéciale et bornée de cette démonſtration, que d'ailleurs nous ne connaiſſons pas.

Pour Huygens le Théorème de la conſervation de la force vive prime de beaucoup celui de la conſervation de la quantité de mouvement [11]), et il y a lieu de s'étonner qu'il ait échappé à ſa perſpicacité que ce dernier Théorème peut ſe déduire facilement du premier, dans le cas des corps durs, à l'aide du Principe de la relativité. Ajoutant aux viteſſes v_A, v_B, v'_A, v'_B des corps A et B, avant et après leur rencontre, la viteſſe commune x, on a d'après le premier Théorème:

$$(7) \qquad m_A(v_A' + x)^2 + m_B(v'_B + x)^2 = m_A(v_A + x)^2 + m_B(v_B + x)^2,$$

d'où il ſuit:

$$(8) \qquad m_A v'_A + m_B v'_B = m_A v_A + m_B v_B.$$

Il eſt vrai qu'à cauſe de ſa méthode géométrique Huygens aurait dû diſtinguer divers cas ſelon le ſens des mouvements avant et après le choc.

---

direction et avec la même vitesse qu'auparavant. Consultez encore pour l'année 1656 la note 9 de la p. 146.

[8]) Comparez la p. 14.

[9]) Voir la note 2 de la p. 102.

[10]) Les italiques ont été introduits par nous.

[11]) Encore en 1674, ou plus tard, Huygens jugeait qu'un théorème qui découle immédiatement de la conservation de la quantité de mouvement, peut être rendu probable par cette considération, mais non pas prouvé; voir le dernier alinéa (p. 164) de la Pièce IX.

THÉORÈME DE L'ÉGALITÉ DE LA VITESSE DE L'ÉLOIGNEMENT À CELLE DU RAPPROCHEMENT.

Concevons deux mécanismes A et B d'un nombre quelconque de degrés de liberté, ſans frottement, formés par des corps durs dans le ſens de Huygens, et ſuppoſons que deux pièces, appartenant chacune à l'un de ces mécanismes, ſe rencontrent. Soient P le point de contact; π le plan tangent du point P pour les deux pièces; v_A et v_B, au début du choc, les compoſantes perpendiculaires au plan tangent des viteſſes du point P, conſidéré alternativement comme appartenant à l'un et à l'autre des pièces; v'_A et v'_B ces compoſantes à la fin du choc, on aura alors:

$$v'_A - v'_B = -(v_A - v_B). \tag{9}$$

Cette équation, qui dit que la viteſſe relative dans la direction perpendiculaire au plan tangent commun change de ſens par le choc ſans changer de grandeur, permet de remplacer dans le ſyſtème des équations qui peuvent ſervir à déterminer le mouvement après le choc, la ſeule équation quadratique (dépendant des forces vives) par une équation linéaire comme toutes les autres.

Or, le Théorème de Huygens de l'égalité de la viteſſe de l'éloignement à celle du rapprochement, qui joue un rôle ſi important dans le Traité [1]) et qu'il a même penſé un inſtant à poſer en axiome [2]), ne repréſente qu'un cas particulier de l'équation (9) et peut rendre le même ſervice dans la théorie du choc direct des corps durs que le Théorème général dans le choc des mécanismes compoſés par ces ſortes de corps.

Huygens a découvert une autre généraliſation de ſon Théorème pour le cas du choc oblique. Elle eſt aſſez intéreſſante, mais bornée au cas de ſphères homogènes; elle dit que par le choc la viteſſe relative des centres change de direction mais pas de grandeur [3]).

---

[1]) Voir les pp. 43, 47, 51, 55, 57, 59, 61 et 65.
[2]) Voir la p. 94.
[3]) Voir la note 3 de la p. 119.
[4]) Voir la p. 93.
[5]) Voir e. a. le dernier alinéa de la p. 141.
[6]) Il considérait alors la question du mouvement absolu comme une de celles qui n'ont pas d'issue; voir la p. 142.

PRINCIPE DE HUYGENS DE LA RELATIVITÉ.

Dès le début de ſes recherches[4]) Huygens a ſenti tout le profit qu'il pouvait tirer de ce Principe. Pour arriver à une théorie conſiſtante du choc il l'a employé ſyſtématiquement et l'a ſuivi dans toutes ſes conſéquences. Il nous ſemble qu'on doit y attacher ſon nom, plutôt que celui d'un autre, pour le diſtinguer du Principe plus général de même appellation développé dans ces derniers temps par Einſtein.

Il eſt vrai qu'il était déjà connu auparavant et fut employé ſurtout par les adhérents de la doctrine du mouvement de la Terre [5]). Il conſtituait l'un de leurs meilleurs arguments, mais ils ne l'employaient pas comme inſtrument de recherches. Ce mérite était réſervé à Huygens.

Quant aux problèmes de métaphyſique qui s'y rattachent: s'il exiſte un repos et un mouvement abſolu et ſi l'on peut en reconnaître l'exiſtence, du moins dans le cas de la rotation, Huygens n'a pas voulu s'en occuper dans la période dont nous traitons [6]). Plus tard, toutefois, il a changé d'attitude, comme nous le verrons dans la ſuite.

CHRISTIANUS HUGENIUS

DE

MOTU CORPORUM

EX

PERCUSSIONE.

SUR LE

MOUVEMENT DES CORPS

PAR

PERCUSSION [1].

Hypothèses

I.

Un corps quelconque, une fois en mouvement, ſi rien ne s'oppoſe, continue de ſe mouvoir avec perpétuellement la même viteſſe et ſelon une ligne droite.

II.

Quelle que ſoit la cauſe que les corps durs rejailliſſent de leur contact mutuel, quand ils ſont pouſſés réciproquement l'un contre l'autre, nous ſuppoſons que deux corps durs, égaux entre eux, de même viteſſe, lorsqu'ils ſe rencontrent directement, rejailliſſent chacun avec la même viteſſe avec laquelle il était venu.

---

[1]) Le texte latin du Traité présent est conforme à celui qui occupe les p. 369—398 des „Opuscula postuma" de 1703 (voir la note 1 de la p. XII de notre T. XIII). Nous possédons le Manuscrit dont ce texte a été emprunté. Il est écrit d'une autre main que celle de Huygens; mais quelques corrections y ont été apportées par Huygens lui-même. Nous rendrons compte de ces corrections dans les notes. Sans doute ce Manuscrit constitue une copie faite d'après des manuscrit rédigés par Huygens.

Il est difficile d'assigner une date définie au Traité présent. Le 20 juillet 1656 Huygens écrivit à de Roberval (voir la p. 457 de notre T. I). „Il y a quelques temps que j'ai quitè toute autre speculation pour m'attacher uniquement a cette matiere de la Percussion dont je pense vous avoir dite autrefois que des Cartes l'avoit traitèe si malheureusement. J'ay achevè

DE

MOTU CORPORUM

EX

PERCUSSIONE [1].

Hypotheses

I.

Corpus quodlibet ſemel motum, ſi nihil obſtet, pergere moveri eadem perpetuo celeritate & ſecundum lineam rectam.

II.

Quæcunque ſit cauſa corporibus duris a mutuo contactu reſiliendi cum in ſe invicem impinguntur; ponimus, cum corpora duo inter ſe æqualia, æquali celeritate, ex adverſo ac directè ſibi mutuo occurrunt, reſilire utrumque eâdem qua advenit celeritate.

---

mon petit ouvrage depuis peu de jours, par lequel je pretens de faire veoir qu'il n'a pas esté impeccable non plus dans la Phisique que dans la Geometrie." Or, en 1656, Huygens était en possession, comme nous le montrons dans l'„Avertissement" qui précède (voir les p. 10—11), de toutes les Propositions du Traité présent et il savait les prouver de la même façon en partant des mêmes hypothèses. Le contenu essentiel de ce Traité date donc de 1656 (ou même de plus tôt) mais des modifications rédactionnelles peuvent y avoir été apportées depuis (et elles l'ont été en effet), puisque le Manuscrit mentionné plus haut est certainement d'une date de beaucoup postérieure à 1656; voir pour plus de particularités les p. 4—14 l'„Avertissement".

Outre l'édition de 1703 il existe encore une réimpression du Traité présent, qui occupe les p. 73—104 du T. II des „Opera reliqua" de 1728, ouvrage mentionné à la p. II de la Préface de notre T. I.

Or, ils ſont dits ſe rencontrer directement, lorsque le mouvement, auſſi bien que le contact, a lieu dans la même droite paſſant par les centres de gravité des deux corps [1]).

III.

Le mouvement des corps, et les viteſſes égales, ou inégales, doivent être entendus reſpectivement comme ayant égard à leur relation avec d'autres corps qui ſont ſuppoſés comme étant en repos, quoique, peut-être, ceux-ci comme ceux-là ſoient ſujets à quelque autre mouvement qui leur eſt commun. Par conſéquent, lorsque deux corps ſe rencontrent, quoique les deux enſemble éprouvent quelque autre mouvement égal, ils n'agiront pas autrement l'un ſur l'autre par rapport à celui qui eſt entraîné par le même mouvement commun, que comme ſi ce mouvement acceſſoire fût abſent dans tous.

Ainſi, lorsque quelqu'un transporté par un bateau qui s'avance d'un mouvement uniforme fait entrechoquer deux boules égales animées d'égale viteſſe, ſavoir par rapport à lui-même et aux parties du bateau, nous diſons que chacune d'elles devra rejaillir avec égale viteſſe, par rapport au même navigateur, tout-à-fait comme il arriverait ſi dans un bateau en repos ou ſur la terre ferme il fît entrer en colliſion les mêmes boules avec des viteſſes égales.

Ceci étant ſuppoſé, nous allons démontrer pour le choc des corps égaux ſuivant quelles lois ceux-ci ſont pouſſés l'un par l'autre, nous propoſant d'inſérer en propre lieu d'autres hypothèſes, dont nous aurons beſoin pour le cas de corps inégaux.

Première Proposition.

Lorsqu'un corps en repos eſt rencontré par un autre, qui lui eſt égal, après le contact ce dernier entrera bien en repos, mais celui qui était en repos acquerra la même viteſſe qui était dans le corps pouſſant.

Imaginons que quelque bateau près de la rive ſoit emporté par le courant, ſi près de la rive, qu'un navigateur, qui s'y tient debout, puiſſe tendre la main à un compagnon ſe trouvant ſur la rive. Que le navigateur tienne dans ſes mains,

---

[1]) Le Manuscrit donnaît primitivement seulement: „conjungente fit contactus", où Huygens a intercalé de sa propre main les mots „et motus" et le second „et".

En vérité on doit ajouter encore la condition qu'au point de contact le plan tangent commun soit perpendiculaire à la droite en question.

Dicuntur autem directe occurrere, cum in eâdem lineâ rectâ utriusque centra gravitatis conjungente & motus fit & contactus [1]).

III.

Motum corporum, celeritatesque æquales aut inæquales respective intelligendas esse, factâ relatione ad alia corpora quæ tanquam quiescentia considerantur, etsi fortasse
p. 370. & hæc & illa communi alio motu involvantur.| [2]) Ac proinde cum corpora duo sibi mutuo occurrunt; etiamsi alteri præterea motui æquabili [3]) utrumque simul obnoxium fuerit; haud aliter illa se invicem impellere respectu ejus, qui eodem communi motu defertur [4]), ac si omnibus adventitius ille motus abesset.

Veluti si quis navi vectus, quæ æquabili motu progrediatur, globulos duos æquales æquali celeritate in se invicem impingere faciat, suo nimirum & partium navis respectu, dicimus æquali quoque celeritate utrumque resilire debere ejusdem vectoris respectu, plane sicut contingeret, si in navi quiescente, aut in terra consistens, eosdem globulos æquali celeritate collidi faceret.

His positis de corporum æqualium occursu quibus legibus illa a se mutuo impellantur [5]) demonstrabimus, alias vero Hypotheses quibus ad inæqualium casus opus habebimus suis locis inseremus.

Propositio Prima.

Si corpori quiescenti aliud æquale corpus occurrat, post contactum hoc quidem quiescet, quiescenti vero acquiretur eadem, quæ fuit in impellente, celeritas.

Intelligatur navigium quodpiam juxta ripam secundo flumine deferri, ac tam propinquum ripæ, ut vector in illo stans possit socio in ripâ stanti manus porrigere.

---

[2]) Un tel trait indique, ici et dans la suite, la fin d'une page de l'édition de 1703 des „Opuscula postuma".

[3]) Le mot „æquabili" fut intercalé après coup par Huygens.

[4]) De même les mots „respectu ejus qui eodem communi motu defertur" furent intercalés par Huygens.

[5]) Au lieu des mots écrits de la main de Huygens „quibus legibus illa a se mutuo impellantur" on lisait primitivement: „necnon inæqualium accedentia nonnulla".

A et B [Fig. 1] [1]), deux corps égaux E, F, ſuspendus à des fils, et dont la diſtance EF ſoit diviſée en deux parties égales par le point G, et que rapprochant par un mouvement égal les deux mains, ſavoir par rapport à lui-même et au bateau, jusqu'à ſe toucher, il faſſe ainſi d'une viteſſe égale s'entrechoquer les deux boules, lesquelles doivent donc néceſſairement rejaillir de même de leur contact mutuel avec une viteſſe égale * par rapport au navigateur et au bateau. Or, nous ſuppoſons que le navire ſoit porté en même temps vers la gauche avec la viteſſe GE, c'eſt-à-dire avec la même viteſſe avec laquelle la main gauche fut transportée vers la droite.

* Hyp. II.

Il eſt donc clair que la main A du navigateur, par rapport à la rive et au compagnon qui s'y trouve, eſt reſtée immobile, mais que la main B, par rapport au même compagnon, a été mue d'une viteſſe FE, double de celle GE ou FG. Donc, ſi le compagnon ſur la rive eſt ſuppoſé avoir pris de ſa main C la main A du navigateur et avec elle la tête du fil qui ſoutient la boule E, mais de l'autre main D la main B du navigateur, laquelle porte le fil d'où pend F, il paraît que, tandis que le navigateur fait s'entrechoquer les boules E, F d'une viteſſe égale par rapport à lui-même et au bateau, le compagnon ſur la rive a, en même temps, pouſſé la boule F contre la boule E en repos avec une viteſſe FE par rapport à la rive et à lui-même. Et il eſt évident, toutefois, que pour le navigateur, qui, comme il a été dit, fait mouvoir ſes deux boules, il ne fait rien que ſon compagnon ſur la rive ait pris ſes mains et les têtes des fils, puisqu'il accompagne ſeulement leur mouvement et ne leur cauſe aucun empêchement. Pour la même raiſon le compagnon ſur la rive qui fait mouvoir la boule F vers E immobile n'eſt gêné en rien de ce que le navigateur a les mains jointes avec les ſiennes, puisque les mains A et C ſont toutes les deux en repos par rapport à la rive et au compagnon, et que les deux D et B ſe meuvent avec la même viteſſe FE. Mais comme, ainſi qu'il fut dit, les boules E, F, après leur contact mutuel, rejailliſſent avec une viteſſe égale par rapport au navigateur et au bateau, ſavoir la boule E avec la viteſſe GE, et la boule F avec la viteſſe GF, et que, en même temps, le bateau s'avance vers la gauche avec la viteſſe GE ou FG [6]), il en réſulte que, par rapport à la rive et au compagnon qui s'y trouve, la boule F, après le choc, reſte immobile, l'autre E, au contraire, par rapport au même, ſe transporte

[1]) Les figures ont été empruntées à la Pièce imprimée de 1703. Celles du Manuscrit ne sont pas non plus de la main de Huygens. Dans l'imprimé elles se trouvent réunies sur des planches hors texte. Nous avons préféré les placer dans le texte, comme il en est aussi dans le Manuscrit.

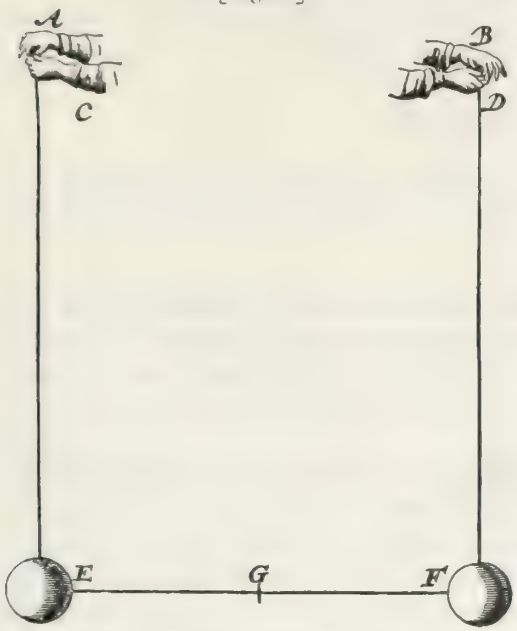
Voir encore la figure de la p. 29, empruntée également à l'imprimé. Nous ne savons pas si elle a été faite, oui ou non, d'après un dessin de Huygens. On ne la rencontre pas dans le Manuscrit. D'après les experts du „Rijksmuseum" d'Amsterdam les costumes sont ceux d'environ 1700.

[2]) Le Manuscrit donne „Quod" au lieu de „Navigium autem". Le changement est dû probablement aux éditeurs des „Opuscula postuma".

[3]) Dans le Manuscrit Huygens remplaça par „globum E ſuſtinentis" l'indication primitive „AE".

Teneat vero vector manibus ſuis A & B [Fig. 1] [1]) duo corpora æqualia ex filis ſuſpenſa E, F, quorum diſtantia EF biſariam diviſa ſit puncto G: motuque æquali manus ad occurſum mutuum promovens, ſui nempe & navigii reſpectu, etiam globulos E, F æquali celeritate inter ſe collidi faciet, quos itaque neceſſe eſt & æquali ce | leritate * a contactu mutuo reſilire ejusdem vectoris & navigii reſpectu: Navigium autem [2]) ponatur interim ferri ſiniſtram verſus celeritate GE, eâdem nempe quâ manus ſiniſtra A delata fuit dextram verſus.

[Fig. 1.]



p. 371.

* Hyp. II.

Patet itaque vectoris manum A, reſpectu ripæ & ſocii in illa conſiſtentis, immotam ſtetiſſe; manum vero B, reſpectu ejusdem ſocii motam fuiſſe celeritate FE, duplâ ipſius GE vel FG. Quamobrem ſi ſocius in ripâ ſtans prehendiſſe ponatur manu ſuâ C manum vectoris A, cumque eâ caput fili globum E ſuſtinentis [3]); alterâ vero manu D manum vectoris B, quæ ſuſtinet funiculum e quo pendet F [4]); apparet dum vector globulos E, F, æquali celeritate concurrere facit, ſuo & navigii reſpectu, ſimul ſocium in ripâ ſtantem globulo E quieſcenti impegiſſe globulum F motum celeritate FE, reſpectu ripæ & ſui ipſius. Et conſtat quidem, vectori globulos ſuos [5]), uti dictum eſt, moventi, nihil officere quod ſocius in ripâ ſtans manus ejus & filorum capita apprehenderit, cum tantum comitetur earum motum, nec ei ullum impedimentum afferat. Eâdem ratione nec ſocio in ripâ ſtanti globulumque F verſus immotum E deferenti, quidquam obſtat, quod vector manibus ſuis manus conjunctas habeat, ſiquidem manus A & C utraque reſpectu ripæ & ſocii quieſcunt, duæ vero D & B moventur eâdem celeritate FE. Quia autem uti dictum fuit globuli E, F, poſt mutuum contactum, æquali celeritate reſiliunt, reſpectu vectoris & navigii; globulus nempe E celeritate GE, & globulus F celeritate GF, ipſumque interim navigium pergit ſiniſtram verſus celeritate GE ſeu FG [6]), ſequitur, reſpectu ripæ & ſocii in illâ ſtantis, globulum F poſt impulſum reſtare immotum,

[4]) De même Huygens remplaça „BF" par „e quo pendet F".

[5]) Le mot „suos" manque dans le Manuscrit. Comparez la note 2.

[6]) Dans le Manuscrit Huygens a intercalé après coup les mots „ſeu FG".

vers la gauche avec une viteſſe qui eſt le double de GE, c'eſt-à-dire avec la viteſſe FE avec laquelle il pouſſa la boule F vers E. Nous avons donc montré que, pour celui qui ſe trouve ſur la terre ferme et qui fait choquer contre un corps immobile un corps égal, ce dernier, après le contact, perd tout mouvement, tandis que l'autre acquiert le tout. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition II.

Lorsque deux corps égaux ſe pouſſent avec des viteſſes inégales, ils ſe mouvront après le contact avec des viteſſes réciproquement échangées.

Soit le corps E [Fig. 2] ſe mouvant vers la droite avec la viteſſe EH, F, qui lui eſt égal, ſe mouvant en premier lieu avec la viteſſe moindre FH dans la direction adverſe: ils ſe rencontreront donc en H. Je dis qu'après leur rencontre, le corps E ſe rendra avec la viteſſe FH vers la gauche, mais le corps F vers la droite avec la viteſſe EH.

En effet [3]), qu'un homme ſe tenant ſur le bord de la rivière, effectue les dits mouvements des corps, c'eſt-à-dire en ſoutenant de ſes mains C, D, les têtes des fils auxquels ils ſont ſuſpendus, et en rapprochant ſes mains avec les dites viteſſes EH, FH, et en même temps les corps E et F. Soit enſuite diviſée la diſtance EF au point G en deux parties égales, et ſoit ſuppoſé que le bateau eſt emporté vers la droite avec la viteſſe GH et qu'il s'y trouve un autre homme, par rapport auquel la boule E ſe mouvra donc ſeulement avec la viteſſe EG, mais la boule F avec la viteſſe FG, de ſorte que par rapport à cet homme les deux boules ſont pouſſées avec une viteſſe égale vers leur contact mutuel. Par conſéquent, ſi nous ſuppoſons qu'il prenne de ſes mains A, B les mains C, D de ſon compagnon ſur la rive, et avec elles les extrémités des fils auxquels pendent les boules, il arrivera que, en même temps, celui ſur la rive fait concourir les boules avec les viteſſes EH, FH, mais celui dans le bateau avec les viteſſes égales EG, FG: il eſt donc
* Hyp. II. [4]) ſûr * que par rapport à ce dernier elles retourneront avec une même viteſſe, ſavoir E avec la viteſſe GE, et F avec la viteſſe GF: mais le bateau continue entre temps de ſe mouvoir avec la viteſſe GH Donc, par rapport à la rive et à l'homme qui s'y

[1]) Huygens biffa dans le Manuscrit les mots „movere fecit" et les remplaça par „impulit."

[2]) Huygens biffa le mot „unde" et le remplaça par „dico", lequel mot dans le Manuscrit précédait „corpus".

[3]) Huygens ajouta ici en marge: „An non sufficeret monere semel ut eodem modo ac in propos.[e] prima semper cogitetur pondera sustineri tam vectoris manibus quam ejus qui in ripa consistit? facile enim quivis hoc imaginando supplebit, et breviores erunt demonstrationes, carebuntque tediosa repetitione."

[4]) Cette indication manque dans le Manuscrit.

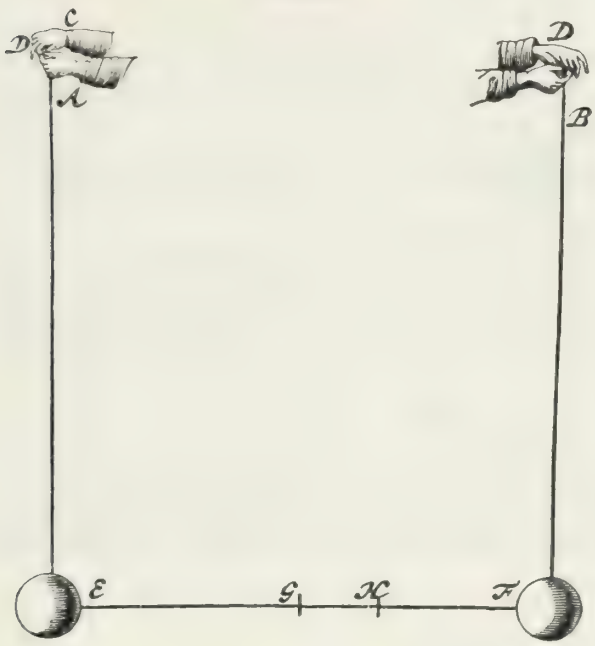
alterum vero E, ejusdem respectu, pergere sinistram versus, celeritate duplâ GE,
p. 372. hoc est, celeri|tate FE, quâ eâdem globulum F versus E impulit [1]). Itaque ostendimus in terrâ stanti, corporique immoto corpus æquale impingenti, hoc quidem post contactum omnem motum amittere, illi vero omnem acquiri. Quod erat demonstrandum.

Propositio II.

Si corpora duo æqualia inæquali celeritate lata se mutuo impellant, post contactum permutatis invicem celeritatibus ferentur.

Feratur corpus E [Fig. 2] celeritate EH dextrorsum, F vero, ipsi æquale, celeritate FH minori tendat primùm ex adverso; convenient igitur in H. Dico [2]), post mutuum occursum, corpus E motum iri celeritate FH sinistrorsum, F vero dextram versus celeritate EH.

[Fig. 2.]



Intelligatur [3]) enim homo in ripâ fluminis consistens dictos corporum motus efficere, sustinendo nimirum manibus suis C, D, capita filorum ex quibus illa suspenduntur, manusque concurrere faciendo dictis celeritatibus EH, FH, atque una corpora E & F. Secta sit porro distantia EF bifariam in G; & intelligatur prætervehi navigium celeritate GH dextram versus, in quo consistat alius homo, cujus quidem respectu movebitur globus E celeritate EG tantum, at globus F, celeritate FG, adeo ut ipsius respectu globi duo æquali celeritate ferantur ad mutuum occursum. Quamobrem si prehendisse ponatur manibus suis A, B manus socii in ripâ stantis C, D, cumque iis capita filorum quibus globi suspenduntur, eveniet, ut simul, qui in ripâ consistit, illos concurrere faciat celeritatibus EH, FH; qui vero navigio vehitur
p. 373. eosdem concurrere faciat ce|leritatibus inter se æqualibus, EG, FG; constat itaque, hujus respectu, * etiam æquali celeritate utrumque a contactu reversurum; nempe, * Hyp. II [4]).
E celeritate GE, & F, celeritate GF: atqui navigium interea moveri pergit celeri-

trouve, F aura la viteſſe compoſée des deux GF et GH, c'eſt à dire égale à EH, mais E aura la viteſſe HF égale à la différence entre les viteſſes GE, GH. Nous avons donc montré que pour l'homme qui ſe trouve ſur la rive et qui fait s'entrechoquer les boules E et F avec les viteſſes EH, FH, la boule E retournera après le contact avec la viteſſe FH, mais la boule F avec la viteſſe EH: ce qu'il fallait démontrer.

Qu'on faſſe mouvoir maintenant les deux corps E et F vers la droite [Fig. 3]: ſavoir E avec la viteſſe EH; mais F, qui va devant, avec la viteſſe moindre FH; E ſuivra donc le corps F, et ils ſe joindront en H: or, je dis qu'après le contact F avancera avec la viteſſe EH, tandis que E ſuivra avec la viteſſe FH. Et la démonſtration eſt la même que ci-deſſus.

Hypothèse IV.

Lorsqu'un corps plus grand rencontre un plus petit qui eſt en repos, il lui donne quelque mouvement et par conſéquent perd quelque partie du ſien.

Proposition III [1]).

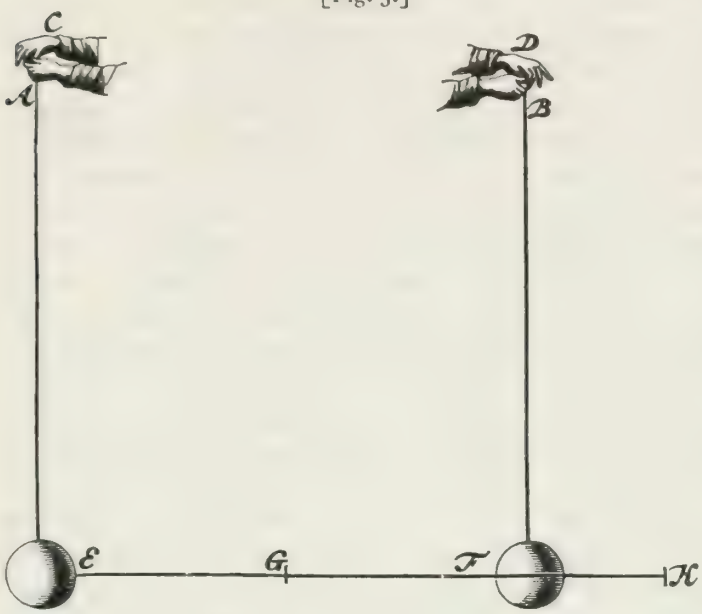
Un corps quelque grand qu'il ſoit, pouſſé par un corps quelque petit qu'il ſoit et d'une viteſſe quelconque, eſt mis en mouvement.

Imaginons qu'un bateau ſe meuve le long du bord d'une rivière et qu'un navigateur qui s'y trouve ſoutienne les corps A et B [Fig. 4], ſuspendus à des fils: et ſoit A, qu'il tient par la main gauche, le plus grand, B le plus petit: et qu'il tienne

[1]) Cette proposition contient une réfutation de la quatrième des règles de Descartes pour le choc, qu'on trouve formulées dans l'article XLIX de la „Pars Secunda" de ses: „Principia philosophiæ" (ouvrage cité dans la note 4 de la p. 546 de notre T. II); voir la p. 68 du T. VIII de l'édition des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery, où l'on lit: „Quartò, si corpus C planè quiesceret, essetque paulò majus quàm B, quàcunque cum celeritate B moveretur versus C, nunquam ipsum C moveret; sed ab eo repelleretur in contrariam partem."

tate GH. Itaque reſpectu ripæ & hominis in illâ conſiſtentis habebit F celeritatem ex utriſque GF & GH compoſitam, hoc eſt, ipſi EH æqualem, E vero, celeritatem HF, quâ nimirum differunt inter ſe celeritates GE, GH. Adeoque oſtendimus homini ripæ inſiſtenti, globulosque E & F ſibi mutuo impingenti celeritatibus EH, FH, poſt impulſum, reverſurum E celeritate FH, F vero celeritate EH; quod erat demonſtrandum.

[Fig. 3.]



Moveatur jam utrumque corpus E & F verſus dextram [Fig. 3]; E quidem celeritate EH; F vero præcedens minori celeritate FH; aſſequetur igitur E corpus F, convenientque in H; dico autem poſt contactum F inceſſurum celeritate EH, E vero inſecuturum celeritate FH. Eſtque demonſtratio eadem quæ ſuperior.

Hypothesis IV.

Si corpus majus minori quieſcenti occurrat, aliquem ei motum dare, ac proinde de ſuo aliquid amittere.

Propositio III [1]).

Corpus quamlibet magnum a quamlibet exiguo corpore & qualicunque celeritate impacto movetur.

Intelligatur navigium propter ripam fluminis ferri, in quo conſiſtens vector ſuſtineat corpora A & B [Fig. 4], ex filis ſuſpenſa; ſitque A, quod ſiniſtra tenet,

la main droite, qui ſoutient le corps B, immobile, ſavoir par rapport à lui-même et au bateau, mais que la main C ſe meuve vers elle, de même que le corps A, avec une certaine viteſſe AB. B ſera donc pouſſé, et le corps A perdra quelque choſe de ſa viteſſe * et, par conſéquent, continuera d'aller vers la droite avec une viteſſe moindre que ne fut AB. Mais poſons que, tandis que ces choſes ſe paſſent, le bateau eſt emporté avec la viteſſe BA vers la gauche. Il en ſuivra que, tandis que le navigateur transporte le corps A avec la viteſſe AB, par rapport à lui-même et au bateau par lequel il eſt entraîné, ce même corps reſte en repos par rapport à la rive et au ſpectateur qui s'y trouve et auſſi la main C. L'autre main D avec le corps B ſe mouvra, au contraire, par rapport au même ſpectateur, avec la viteſſe BA vers la gauche, parce que nous l'avons ſuppoſée immobile par rapport au bateau et que le bateau eſt porté vers la gauche avec la viteſſe BA. Donc, ſi l'on ſuppoſe que le ſpectateur ſur la rive ait pris de ſes mains E, F les mains C, D du navigateur, il paraît que, tandis que ce dernier pouſſe la boule A vers B qui eſt en repos par rapport à lui, le ſpectateur pouſſe en même temps B vers A, qui eſt en repos par rapport à lui et à la rive. Mais nous avons dit qu'après le choc la boule A, par rapport au navigateur et au bateau, ſe porte vers la droite avec une viteſſe moindre que AB; or, le bateau eſt porté vers la gauche avec la viteſſe BA; il eſt donc clair que, par rapport à la rive et au ſpectateur qui s'y trouve, A ſe meut quelque peu vers la gauche après le choc. Il eſt donc montré que pour celui qui eſt à terre et qui pouſſe contre un corps en repos, quelque grand qu'il ſoit, un corps B, quelque petit qu'il ſoit, avec une viteſſe quelconque BA, le corps A ſe mettra en mouvement; ce qu'il fallait démontrer.

* Hyp. IV [1]).

Hypothèse V [2]).

Lorsque, de deux corps durs qui ſe rencontrent, il arrive que, après le choc, l'un d'eux a conſervé tout ſon mouvement, l'autre également n'aura rien perdu ou gagné en mouvement.

---

[1]) Cette indication manque dans le Manuscrit.

[2]) Dans le Manuscrit cette hypothèse précédait primitivement la „Propositio VII". Elle y fut biffée et ajoutée en marge avant la „Propositio IV".

p. 374. majus; B | minus; teneatque dextram D, quæ ſuſtinet corpus B, immotam, ſui nempe & navigii reſpectu; verſus ipſam vero moveat manum C, unaque corpus A, celeritate quavis AB. * Impelletur ergo B, & amittet corpus A aliquid * Hyp. IV [1]). de celeritate ſuâ, ideoque in partem dextram perget celeritate minori quam fuerat AB. dum autem hæc contingunt ponatur ferri navigium celeritate BA, ſiniſtram verſus; unde eveniet, ut dum vector corpus A transfert celeritate AB, reſpectu ſui navisque, quâ vehitur, idem immotum ſtet reſpectu ripæ, ſpectatorisque in eâ conſiſtentis, pariterque manus C. Altera vero D cum corpore B movebitur, ejusdem ſpectatoris reſpectu, celeritate BA ſiniſtrorſum, quoniam navigii reſpectu immotam poſuimus, navigiumque fertur celeritate BA verſus ſiniſtram. Quare ſi ſpectator in ripâ ſtans, prehendiſſe ponatur manibus E, F manus vectoris C, D, apparet, dum hic globum A movet verſus B immotum ſui reſpectu, ſimul illum movere B verſus A, qui ſui & ripæ reſpectu immotus quieſcit. Diximus autem ab impulſu, globum A reſpectu vectoris & navigii, ferri in dextram partem minori velocitate quam AB; atqui navigium fertur celeritate BA verſus ſiniſtram; ergo, reſpectu ripæ & ſpectatoris in eâ ſtantis, manifeſtum eſt A ab impulſu moveri aliquantum in partem ſiniſtram. Itaque oſtenſum eſt in terrâ ſtanti, corporique quieſcenti & quamlibet magno A, quamlibet exiguum B, celeritate qualicunque BA, impingenti, motum iri corpus A: quod erat demonſtrandum.

[Fig. 4.]

Hypothesis V [1]).

Corporibus duobus duris ſibi mutuo occurrentibus, ſi, poſt
p. 375. impulſum, contingat alteri eorum omnem quem | habebat motum conſervari, etiam alterius motui nihil decedere neque adjici.

Proposition IV [1]).

Toutes les fois que deux corps entrent en collision, la viteſſe relative de l'éloignement eſt la même que fut celle du rapprochement.

De deux corps égaux cela eſt évident d'après la propoſition II [2]). Qu'ils ſoient donc inégaux et qu'il ſoit poſé, comme premier cas, que, contre un plus grand A en repos [Fig. 5], eſt pouſſé un corps plus petit B avec une viteſſe BA vers la droite. Je dis qu'après le contact les corps iront ſe ſéparer avec la même viteſſe BA de ſorte que ſi dans une partie de temps le corps B avait parcouru l'espace BA, après une autre partie de temps égale ils ſe trouveront de nouveau ſéparés par un espace égal à cet espace BA.

En effet [3]), il eſt certain que A reçoit quelque viteſſe par le choc du corps B [4]); ſoit AC cette viteſſe; mais elle doit être moindre que la viteſſe avec laquelle B lui-même ſe mouvait [5]) puisque, ſi B était égal à A, celui-ci recevrait du choc pré-
* Prop. I. ciſément la viteſſe BA. * Soit AC diviſée en deux parties égales au point D, et ſoit AE égal à AD. Si donc nous ſuppoſons que ces mouvements ont lieu dans un bateau qui eſt emporté vers la gauche avec une viteſſe DA; il eſt néceſſaire qu'avant le choc le corps A, qui était en repos dans le bateau, ſe mouvait par rapport à la rive avec la dite viteſſe DA vers la gauche; mais après le choc, puisqu'il a été dit ſe mouvoir dans le bateau avec la viteſſe AC vers la droite et le bateau lui-même avec la viteſſe DA dans la direction oppoſée, le corps A ſe mouvra, par rapport à la rive, avec la viteſſe DC ou AD vers la droite. Donc, par rapport à la rive, le corps A conſerve la même viteſſe avant et après le choc. Par ſuite B

---

[1]) Dans le Manuscrit cette Proposition était suscrite „Hypothesis", mais Huygens biffa ce mot et le remplaça par „Propositio 4."

[2]) Voir la p. 37.

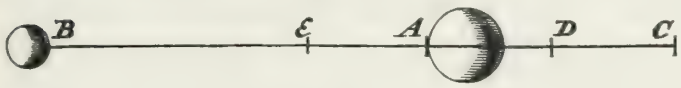
[3]) Voici, en faisant librement usage de l'algèbre moderne, le raisonnement qui va suivre pour autant qu'il se rapporte à ce premier cas. Soient zéro et v_B les vitesses des corps A et B avant, v'_A et v'_B celles après le choc. Supposons que ces mouvements avaient lieu dans un bateau possédant la vitesse $-\frac{1}{2}v'_A$. Alors les vitesses avant le choc étaient par rapport à la rive respectivement $-\frac{1}{2}v'_A$ et $v_B - \frac{1}{2}v'_A$. Après le choc la vitesse du corps A par rapport à elle est $\frac{1}{2}v'_A$; sa vitesse n'est donc pas changée en valeur absolue. Il doit donc en être de même du corps B d'après l'hypothèse V. Ce dernier corps doit donc se mouvoir après le choc avec la

Propositio IV [1]).

Quoties duo corpora inter ſe colliduntur, eadem eſt, mutuo reſpectu, discedentibus celeritas, quæ fuit appropinquantibus.

De æqualibus corporibus manifeſtum eſt ex propoſitione II [2]). Sint igitur nunc inæqualia, primumque is caſus proponatur, quo, majori A quiescenti [Fig. 5], impingitur corpus minus B, celeritate BA dextram verſus pergens. Dico ipſa poſt contactum eâdem celeritate BA ſeparatum iri, adeo ut, ſi parte una temporis corpus B confecerit ſpatium BA, poſt alteram ſimilem temporis partem, rurſus ſpatio, quod ipſi BA æquale ſit, ſeparata inveniantur.

[Fig. 5.]



Conſtat [3]) enim A celeritatem aliquam accipere impulſu corporis B [4]); ſit ea AC, minorem autem eſſe oportet celeritate BA quâ ipſum B movebatur [5]): nam ſi ipſi B æquale eſſet A, tum demum celeritatem BA ex impulſu acciperet. * Dividatur AC in duo æqualia puncto D, ſitque AE æqualis AD. Si igitur in navigio hoſce motus contingere exiſtimemus, quod ſiniſtram verſus prætervehatur celeritate DA: neceſſe eſt ut ante impulſum, corpus A quod in navigio quiescebat, motum fuerit reſpectu ripæ dictâ celeritate DA, ſiniſtram verſus; poſt impulſum vero, cum in navigio motum dicatur celeritate AC dextrorſum, ipſum vero navigium celeritate DA in partem contrariam feratur, movebitur A, ripæ reſpectu, * Prop. I.

---

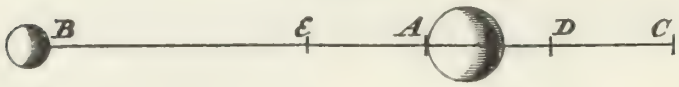
vitesse $v_B - \frac{1}{2}v'_A$ ou $\frac{1}{2}v'_A - v_B$; mais le premier cas est impossible à cause de la présence du corps A dont la vitesse $\frac{1}{2}v'_A$ est moindre que la vitesse $v_B - \frac{1}{2}v'_A$, où $v'_A < v_B$ puisque si B, qui est plus petit que A, avait été égal à A on aurait eu $v'_A = v_B$ (voir la Prop. II, p. 37). La vitesse d'éloignement mutuel après le choc sera donc $\frac{1}{2}v'_A - (\frac{1}{2}v'_A - v_B) = v_B$ par rapport à la rive, mais aussi dans le bateau et partout ailleurs. Elle est donc égale à la vitesse de rapprochement avant le contact.

[4]) Par la Prop. III, p. 39.

[5]) On remarquera que Huygens introduit ici une nouvelle hypothèse, d'ailleurs très plausible, qu'il n'énonce pas explicitement, savoir: que par le choc avec un corps donné de vitesse donnée un corps en repos recevra d'autant moins de vitesse qu'il est plus grand.

* Hyp. V. auſſi *, par rapport à la rive, ne doit avoir rien perdu de ſa viteſſe. Or, avant le choc, B ſe mouvait par rapport à la rive avec la viteſſe BE vers la droite, parce que dans le bateau il avait la viteſſe BA vers la droite, mais le bateau lui-même la viteſſe DA, ou AE, dans la direction opposée. Donc auſſi après le choc il devra ſe mouvoir par rapport à la rive avec la viteſſe BE, mais vers la gauche: car le mouvement plus lent du corps A empêche qu'il ſe meuve vers la droite. Puisque donc B après le choc ſe meut, par rapport à la rive, avec la viteſſe EB vers la gauche, mais A vers la droite avec la viteſſe AD ou EA, il faut qu'ils ſe ſéparent avec la viteſſe compoſée des deux BE et EA, c'eſt-à-dire avec la viteſſe BA et cela non ſeulement par rapport à la rive mais auſſi par rapport au bateau, parce que réellement ils ſe ſéparent avec cette viteſſe. Or, il eſt certain que ce qui arrive aux corps ſe rencontrant dans un bateau en mouvement doit arriver en dehors du bateau de la même manière partout ailleurs.

[Fig. 5.]



Ce cas étant démontré, les autres s'enſuivent facilement; or, il en reſte quatre différents, car, ou bien le corps plus petit eſt en repos, ou bien les deux ſont animés de mouvements oppoſés, ou bien le corps le plus petit ſuit le plus grand d'un mouvement plus vite ou bien le contraire a lieu. On pourra traiter tous ces cas en même temps.

Soit, en effet, comme précédemment, le corps A [Fig. 6] plus grand que B, et que A ſe meuve avec la viteſſe AC, B, au contraire, ſe trouve ſoit tout-à-fait en repos, ſoit en mouvement avec la viteſſe BC; puisque donc les corps, ſe mouvant ainſi, ont, l'un par rapport à l'autre, la viteſſe AB, je dis qu'après le choc ils ſe ſépareront avec cette même viteſſe.

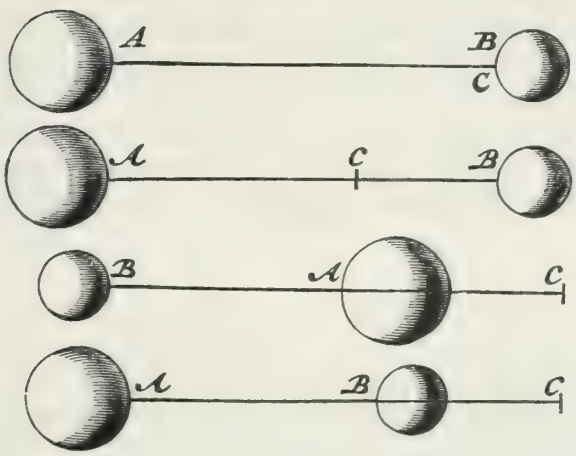
En effet, ſi, de nouveau, ces mouvements ſont conſidérés comme ayant lieu dans un bateau qui eſt emporté avec la viteſſe CA, ſavoir la même que celle du corps A mais dans le ſens oppoſé, il eſt évident que par rapport à la rive A eſt immobile, mais que B le rencontre, dans tous les cas, avec la viteſſe BA. Or, A eſt plus grand que B: c'eſt là donc le cas précédent qui ſe préſente, d'où il paraît que les deux corps doivent ſe ſéparer après le choc avec la même viteſſe AB par rapport à cette rive, et par ſuite auſſi par rapport au bateau; il eſt donc évident qu'avec cette viteſſe ils s'éloigneront en réalité l'un de l'autre.

celeritate DC ſeu AD in partem dextram. Itaque, reſpectu ripæ, corpus A
p. 376. ante & poſt | impulſum, eandem ſervat celeritatem. Quare etiam B, * ejusdem * Hyp. V.
reſpectu, nihil de ſuâ celeritate perdidiſſe oportet. Movebatur autem B reſpectu ripæ ante occurſum celeritate BE dextrorſum, quia in navigio habebat celeritatem BA dextram verſus, ipſum vero navigium celeritatem DA ſeu AE in partem oppoſitam. Igitur & poſt occurſum, reſpectu ripæ, moveri debebit celeritate BE, ſed ſiniſtram verſus: nam quominus poſſit verſus dextram obſtat tardior motus corporis A; cum igitur poſt impulſum moveatur B, ripæ reſpectu, celeritate EB ſiniſtram verſus, at A dextrorſum celeritate AD ſeu EA, neceſſe eſt ipſa a ſe mutuo discedere celeritate ex utrisque BE, EA compoſitâ, hoc eſt, celeritate BA, neque id tantum ripæ, ſed & navigii reſpectu, quum reverâ eâ celeritate ſeparentur. Quod autem in navigio progrediente ſibi occurrentibus contingit etiam extra navigium ubique eodem modo contingere conſtat.

Hoc caſu demonſtrato reliqui facile conſequuntur, ſuperſunt autem quatuor diverſi, nam vel minus corpus quiescit, vel utraque adverſis motibus cientur, vel celeriore motu minus inſequitur majus, vel contra; quos omnes ſimul proponere licebit.

Sit enim ut ante corpus A [Fig. 6] majus quam B, & feratur A celeritate AC; B vero vel omnino quiescat, vel habeat celeritatem BC; cum igitur corpora ſic mota, mutuo reſpectu, habeant celeritatem AB; dico, & poſt impulſum eadem celeritate ipſa ſeparatum iri.

[Fig. 6.]



Etenim ſi denuo hi motus in navigio fieri conſiderentur, quod prætervehatur celeritate CA, eâdem nempe quâ fertur corpus A, ſed in partem contrariam; evidens eſt ripæ reſpectu, A quidem immotum ſtare, B vero, omni caſu, ipſi occurrere celeritate BA. Eſt autem A majus quam B, ergo exiſtit caſus præcedens,
p. 377. ex | quo patet eadem celeritate AB, poſt impulſum, corpora ſeparari debere ejusdem ripæ reſpectu. Unde etiam navigii reſpectu, & reverâ hac celeritate ipſa à ſe invicem recedere perſpicuum eſt.

Proposition V.

Si deux corps retournent de nouveau à la rencontre, chacun avec la viteſſe dont il a rejailli après le choc, ils acquerront après le ſecond choc la même viteſſe qu'ils avaient avant le premier.

Suppoſons [1]) que le corps A s'était mû avec la viteſſe AC [Fig. 7], mais B avec la viteſſe BC, et qu'ils ſe ſont rencontrés de ſorte que A a reçu après le choc la viteſſe CD et B la viteſſe CE: mais qu'enſuite chacun d'eux retourne à la rencontre avec la même viteſſe; ſavoir A avec la viteſſe DC et B avec la viteſſe EC. Je dis qu'ils reculeront, A avec la viteſſe CA; B avec la viteſſe CB, avec lesquelles ils tendaient primitivement à leur rencontre. En effet, ſi nous imaginons que, tandis qu'ils vont à leur ſeconde rencontre, A avec la viteſſe DC, B avec la viteſſe EC, ces mouvements ont lieu dans un bateau qui eſt transporté avec la viteſſe AD, A poſſèdera, par rapport à la rive, la viteſſe AC, parce que dans le bateau il ſe meut avec la viteſſe DC et le bateau même avec la viteſſe AD: mais B poſſédera par rapport à la rive la viteſſe BC; car puisque DE eſt égal à AB *, en retranchant la partie commune DB, BE ſera égal à AD; le bateau ſe meut donc avec la viteſſe BE, mais B dans le bateau avec la viteſſe EC, donc, comme nous le diſions, B ſe mouvra par rapport à la rive avec la viteſſe BC. Il faut donc que par rapport à cette rive ils reculent du contact: A avec la viteſſe CD et B avec la viteſſe CE, puisqu'il a été ſuppoſé au commencement que ſi A ſe porte vers le contact avec la viteſſe AC et B avec la viteſſe

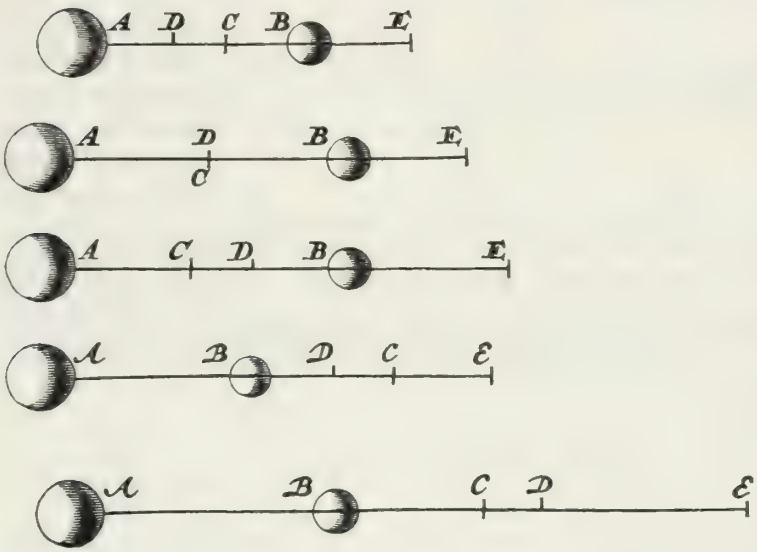
* Prop. IV.

[1]) Voici, en termes algébriques, le raisonnement qui va suivre: soient v_A et v_B les vitesses des corps A et B avant, v'_A et v'_B celles après le premier choc, et supposons que ces mouvements ont lieu dans un bateau possédant la vitesse $v_A + v'_A$. Considérons maintenant le mouvement après que les vitesses v'_A et v'_B ont été remplacées par $-v'_A$ et $-v'_B$. Le corps A se meut alors par rapport à la rive avec la vitesse v_A; le corps B avec la vitesse $-v'_B + v_A + v'_A$; mais par la Prop. IV (p. 43) on a: $v'_A - v'_B = v_B - v_A$ et par suite $-v'_B + v_A + v'_A = v_B$. Or, après la seconde rencontre ces vitesses v_A et v_B changeront donc en v'_A et v'_B, toujours par rapport à la rive. Par rapport au bateau les nouvelles vitesses seront donc $v'_A - (v_A + v'_A) = -v_A$ et $v'_B - (v_A + v'_A) = (v'_B - v'_A) - v_A = (v_A - v_B) - v_A = -v_B$. La proposition est donc prouvée pour les mouvements dans le bateau; elle doit donc être valable partout.

Propositio V.

Si duo corpora, eâdem celeritate ſingula ad occurſum revertantur quâ ab impulſu reſilierunt, ſingula, poſt alterum impulſum, eandem acquirent celeritatem, quâ ferebantur ad occurſum primum.

[Fig. 7.]

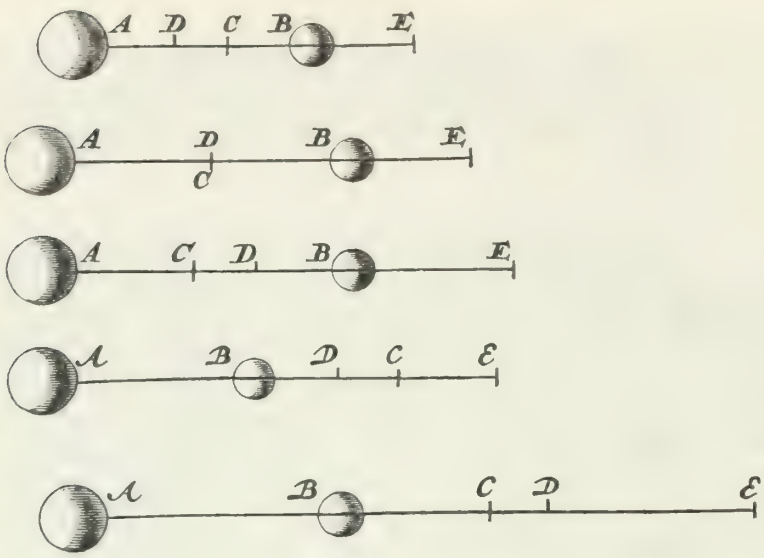


Ponatur [1]) corpus A motum fuiſſe celeritate AC [Fig. 7], B vero celeritate BC, eaque invicem occurriſſe; & ab occurſu disceſſerit A celeritate CD; B celeritate CE: poſtmodum vero iisdem hisce revertatur utrumque ad occurſum, nempe A celeritate DC; B, celeritate EC. Dico inde receſſurum A celeritate CA; B vero celeritate CB, quibus primo ad occurſum tetenderant. Etenim dum pergunt ad ſecundum occurſum, A quidem celeritate DC, B vero celeritate EC, ſi imaginemur in navigio hosce motus accidere, quod prætervehatur celeritate AD, feretur jam, ripæ reſpectu, A celeritate AC, quia in navigio movetur celeritate DC, ipſum vero navigium celeritate AD: B vero reſpectu ripæ, celeritate BC: nam quia DE æqualis eſt AB *, demptâ communi DB, erit BE æqualis AD; movetur ergo navigium celeritate BE; B autem in navigio celeritate EC; unde, reſpectu ripæ, movebitur B celeritate BC, ſicut diximus: Neceſſe eſt igitur, ejusdem ripæ reſpectu, discedere ipſa ab occurſu, A quidem celeritate CD, B vero celeritate CE, poſitum enim fuit ab initio, ſi A tendat ad occurſum celeritate AC, & B

*Prop. IV.

BC, ils reculent après le choc: A avec la viteſſe CD et B avec la viteſſe CE. Puisque donc A, par rapport à la rive ſe meut avec la viteſſe CD et le bateau avec la viteſſe AD, il arrivera que dans le bateau A ſe mouvra avec la viteſſe CA. De même, comme B par rapport à la rive ſe meut avec la viteſſe CE et le bateau avec la viteſſe AD ou BE, la viteſſe de B dans le bateau ſera CB. Nous avons donc montré que les corps qui dans le bateau furent portés vers le contact avec les viteſſes DC, BC [1]) retourneront dans le bateau avec les viteſſes CA, CB. Cela doit donc arriver partout et ce qui fut propoſé eſt prouvé.

[Fig. 7.]



Proposition VI [2]).

Dans deux corps qui ſe rencontrent la quantité de mouvement, priſe pour les deux enſemble, ne ſe conſerve pas toujours la même après le choc qu'elle était auparavant, mais peut être augmentée ou diminuée.

La quantité de mouvement eſt eſtimée de telle manière que dans des corps inégaux de même viteſſe chaque corps fournit une quantité de mouvement d'autant plus grande qu'il eſt plus grand. Mais dans des corps égaux de viteſſe inégale d'autant que l'un eſt plus rapide que l'autre. Démontrons maintenant ce qui eſt propoſé.

Soit le corps A plus grand que B; mais que A ſoit en repos et que B ſoit porté à ſa rencontre avec la viteſſe BA [Fig. 8.], A ſera donc mis en mouvement * et acquerra une certaine viteſſe, p. e. AC. Mais B retournera avec la viteſſe AD,

* Prop. III.

p. 378. celeritate BC, | discedere post impulsum, A quidem celeritate CD, B vero, celeritate CE. Dum ergo A, respectu ripæ movetur celeritate CD, navigium vero celeritate AD, fiet, ut in navigio feratur A celeritate CA. Item quum B ripæ respectu moveatur celeritate CE, & navigium celeritate AD seu BE, erit ipsius B in navigio celeritas CB. Quæ igitur in navigio ferebantur ad occursum celeritatibus DC, BC [1]), ea in navigio referri ostensum est celeritatibus CA, CB unde ubivis idem contingere necesse est, & constat propositum.

Propositio VI [2]).

Corporibus duobus sibi mutuo occurrentibus non semper post impulsum eadem motus quantitas in utroque simul sumpto conservatur quæ fuit ante, sed vel augeri potest vel minui.

Quantitas motus sic æstimatur, ut in corporibus inæqualibus æque celeriter motis, tanto majorem motus quantitatem quodque constituat, quanto majus est. In corporibus autem æqualibus inæquali celeritate motis, quanto alterum altero est velocius: ut igitur quod propositum est demonstremus.

[Fig. 8.]

Esto corpus A majus quam B; A vero quiescat & B ad ipsum feratur celeritate BA [Fig. 8]: movebitur igitur A, * & aliquam celeritatem acquiret, puta AC. revertetur autem B celeritate AD, ita ut tota celeritas CD, quam mutuo respectu habebunt æqualis sit celeritati AB. * Quod si igitur corpus A ipsi B æquale esset, eadem motus quantitas existeret post impulsum atque ante; etenim manifestum est eandem constitui, sive duo p. 379. corpora ipsi B æqualia moveantur, alterum celeritate AD, alterum ce | leritate

* Prop. III.

* Prop. IV.

[1]) Lisez: EC.

[2]) Par cette Proposition Huygens réfute l'article XXXVI de la „Pars secunda" des „Principia philosophiæ" de Descartes, où l'on lit en marge „Deum esse primariam motûs causam: & eandem semper motûs quantitatem in universo conservare" (voir la p. 61 du T. VIII, 1905, de l'édition des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery).

de ſorte que la viteſſe totale CD, qu'ils auront l'un par rapport à l'autre, ſera égale à AB *. Si donc le corps A était égal à B, il exiſterait après le choc la même
* Prop. IV. quantité de mouvement qu'avant; puisqu'il eſt évident qu'elle eſt la même ſoit que deux corps égaux à B ſe meuvent l'un avec la viteſſe AD, l'autre avec la viteſſe AC, ſoit que B ſeul ſe meuve avec la viteſſe CD ou BA. Mais le corps A eſt plus grand que B, donc il paraît que la quantité de mouvement eſt plus grande lorsque, après le choc, le corps A poſſède la viteſſe AC, et le corps B la viteſſe AD, qu'auparavant lorsque B ſeul avait la viteſſe BA. D'autre part que la quantité de mouvement peut être diminuée ſe montre comme il ſuit. Puisque ſi B rencontre avec la viteſſe BA le corps A en repos, ce corps A prendra la viteſſe AC et qu'il reſtera en B la viteſſe AD, il arrivera réciproquement, ſi A vient avec la viteſſe CA et B du côté oppoſé avec la viteſſe DA, qu'après le contact A reſte
* Prop. V. ſans mouvement et que B rejaillit avec la viteſſe AB *, d'où il ſuit, par ce que nous avons démontré plus haut, que la quantité de mouvement après le choc ſera moindre qu'elle n'était avant.

Proposition VII.

Lorsqu'un corps plus grand rencontre un corps plus petit en repos, il lui donne une viteſſe moindre que le double de la ſienne.

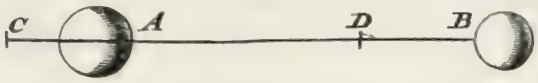
Que le corps A [Fig. 9] avec la viteſſe AB rencontre le corps B en repos, je dis qu'il imprimera après le contact à B une viteſſe moindre que le double de AB. En effet puisqu'après le choc les corps doivent ſe ſéparer avec la même viteſſe
* Prop. IV. AB *, il ſerait néceſſaire, ſi la viteſſe du corps B deviendrait le double de la viteſſe AB, que le corps A ſe mût après le choc vers le corps B avec la même viteſſe
* Hyp. IV [1]. AB, ce qui ne peut avoir lieu *. Et ſi la viteſſe du corps B deviendrait plus que le double, il faudrait qu'après le choc le corps A pourſuivît ſon mouvement avec une viteſſe plus grande que AB, ce qui eſt également abſurde; d'où s'enſuit ce qui était propoſé.

De même que pour des corps égaux il a été montré pour tous les cas de quelle manière l'un communique le mouvement à l'autre, ſi l'on admet que des corps

[1]) Cette indication manque dans le Manuscrit.

AC, ſive ſolum B moveatur celeritate CD ſeu BA. atqui corpus A majus eſt quam B, ergo apparet majorem motus quantitatem conſtitui quum poſt impulſum corpus A fertur celeritate AC, & corpus B celeritate AD, quam antea, quum ſolum B haberet celeritatem BA. Rurſus quod minui poſſit motus quantitas ſic oſtenditur. Etenim ſi occurrente B, corpori A, quiescenti, celeritate BA, acquiritur ipſi A celeritas AC, remanetque in B celeritas AD: fiet viciſſim, ſi A adveniat celeritate CA, B vero ex adverſo celeritate DA, ut A, poſt contactum, motus expers remaneat, B vero reſiliat celeritate AB *; unde, ex iis quæ antea oſtenſa ſunt, minor jam motus quantitas erit poſt concurſum quam fuerat ante. * Prop. V.

[Fig. 8.]



Propositio VII.

Si corpus majus minori quiescenti occurrat, minorem ei velocitatem dat quam duplam ſuæ.

Occurrat corpus A [Fig. 9] celeritate AB, minori quiescenti B: dico ipſi B minorem imprimi celeritatem quam ſit dupla AB. Quia enim poſt impulſum eadem celeritate AB a ſe invicem discedere debent corpora *, neceſſe eſſet ſi dupla fieret celeritas corporis B celeritatis AB, ut A, poſt impulſum, eâdem celeritate AB corpus B inſequeretur, quod fieri non poteſt *: ſi vero major quam dupla, oporteret ut A, poſt impulſum, majori celeritate quam AB moveri pergeret; quod ſimiliter abſurdum eſt; quare conſtat propoſitum. * Prop. IV. * Hyp. IV [1]).

[Fig. 9.]

Sicuti de corporibus æqualibus oſtenſum fuit in univerſum, qua ratione alterum
p. 380. alteri motum transferat, eo conceſſo quod æqualia æquali celeritate ſibi impa|cta [2])

---

[2]) Huygens a remplacé dans le Manuscrit le mot „collisa", qu'il biffa, par les mots „sibi impacta".

égaux, ſe rencontrant avec des viteſſes égales, rejailliſſent auſſi également, de même quand il s'agit de corps inégaux, on peut déterminer tous les cas, dont il exiſte pluſieurs, en poſant ce qui ſuit: ſavoir que ſi deux corps inégaux ſe meuvent à une rencontre mutuelle, mais que leurs viteſſes ſont inverſement proportionnelles à leurs grandeurs, ils retourneront du contact avec la même viteſſe avec laquelle ils étaient venus.

Comme, quand A [Fig. 10] ſoit triple de B, mais la viteſſe BC, avec laquelle B ſe meut, triple de celle AC de A; alors après le contact en C, chacun des deux corps retournera avec la même viteſſe qu'il avait auparavant. D'ailleurs puisque ceci (quoique nullement contraire à la raiſon et tout-à-fait conforme à l'expérience) n'eſt pas auſſi évident que ce qui a été admis pour les corps égaux, nous tâcherons de le confirmer par une démonſtration.

Il eſt certain que lorsque deux corps graves ſe meuvent en bas dans un mouvement naturellement accéléré, le rapport des espaces parcourus eſt égal au carré du rapport des viteſſes maximales qu'ils ont acquiſes. En effet, ceci a été démontré par Galilée dans le troiſième dialogue „De motu" [1]) et obſervé dans des expériences innombrables et très exquiſes: comme auſſi que la viteſſe acquiſe par un corps tombant eſt capable de le reſtituer à la même hauteur d'où il eſt descendu [2]). De plus, des démonſtrations de ces deux propoſitions ſont expoſées dans ce que nous avons écrit ſur l'horloge [3]). Or, partant de là, le dit théorème pourra être démontré.

Proposition VIII.

Lorsque deux corps, dont les viteſſes ſont inverſement proportionnelles à leurs grandeurs, ſe rencontrent de côtés oppoſés, chacun d'eux rejaillira avec la même viteſſe avec laquelle il s'eſt approché.

Soient A et B [Fig. 11] deux corps qui ſe rencontrent, et dont le premier eſt plus grand que le ſecond, et que la grandeur de A ſoit à celle de B comme la viteſſe

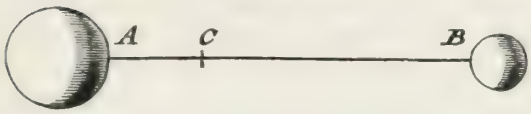
[1]) Voir l'ouvrage de 1638 cité dans la note 1 de la p. 31 de notre T. I. On trouve le théorème en question à la p. 210 du Vol. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galilei" où l'on lit: „Patet etiam hinc, eandem spatiorum rationem esse duplam rationis maximorum graduum velocitatis".

[2]) Voir les p. 206—207 du Vol. VIII cité dans la note précédente.

[3]) Voir les Prop. III et IV de l'„Horologium oscillatorium" p. 25—29 de l'édition originale de 1673 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 257 de notre T. VII. Remarquons que la

æqualiter quoque reſiliant. Ita, in diverſæ magnitudinis corporibus, omnes caſus determinari poſſunt; qui quidem plurimi exiſtunt, hoc quod ſequitur poſito. Nimirum, ſi inæqualia duo corpora ad occurſum mutuum ferantur, celeritates autem magnitudinibus contrariâ ratione respondeant, quod tum ſingula a contactu, eadem quâ venere celeritate, retrorſum agantur.

[Fig. 10.]



Veluti ſi A [Fig. 10] ſit triplum ad B: celeritas autem BC, quâ movetur B ſit tripla celeritatis AC quâ movetur A; quod facto concurſu in C, corpus utrumque, eâdem quâ prius ferebatur celeritate, revertatur. Cæterum, quia hoc non æque evidens eſt (licet a ratione non alienum, experimentisque apprime conſentiens) atque illud quod circa æqualia corpora aſſumptum fuit, demonſtratione ipſum confirmare conabimur.

Conſtat ſane, quoties corpora duo gravia deorſum feruntur motu naturaliter accelerato, duplicatam eſſe rationem ſpatiorum ab ipſis peractorum rationis maximorum graduum celeritatis ipſis acquiſitæ. Hoc enim a Galilæo demonſtratum eſt, dialogo de motu tertio [1]), & experimentis innumeris exquiſitiſſimisque deprehenſum: uti hoc quoque, quod celeritas cadenti corpori acquiſita, poſſit ipſum ad eandem, unde deſcendit, altitudinem reſtituere [2]). Quorum etiam utriusque demonſtrationes, in iis quæ de horologio ſcripſimus exhibentur [3]). Hinc autem dictum theorema jam demonſtrari poterit. |

p. 381.

Propositio VIII.

Si corpora duo ſibi ex adverſo occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contrariâ ratione respondeant, utrumque eâdem quâ acceſſit celeritate reſiliet.

Occurrant ſibi corpora A & B [Fig. 11], quorum illud quam hoc majus ſit, & quam rationem habet magnitudo A, ad magnitudinem B, eandem habeat celeritas

---

phrase présente se retrouve dans le Manuscrit de 1656 ou d'un peu plus tôt, mentionné p. 10 de l'„Avertissement" qui précède, mais écrite en marge, tandis que l'état de ce Manuscrit prouve clairement qu'elle y fut ajoutée après coup à une époque inconnue. Comparez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 30.

BC du corps B à celle AC du corps A: il faut prouver que, après le contact mutuel, chacun d'eux retourne avec la viteſſe avec laquelle il eſt venu, ſavoir, A avec la viteſſe CA, B avec la viteſſe CB. Or, il eſt certain que ſi A eſt réfléchi avec la viteſſe CA, B ſera auſſi réfléchi avec la viteſſe CB, parce que ſans cela la viteſſe
* Prop. IV. relative de ſéparation ne ſerait pas la même que celle du rapprochement*. Si donc le corps A ne retourne pas avec la viteſſe CA, qu'il rejailliſſe, en premier lieu, ſi cela eſt poſſible, avec une viteſſe moindre CD; par ſuite B rejaillira avec une viteſſe CE plus grande que celle avec laquelle il était venu, de ſorte que DE
* Prop. IV. eſt égal à AB*. Suppoſons que le corps A ait acquis ſa première viteſſe AC, avec laquelle il ſe mouvait vers le contact, en tombant de la hauteur HA, de telle manière qu'après être descendu jusqu'en A il ait changé ſon mouvement vertical en un mouvement horizontal de la viteſſe AC; et que pareillement le corps B ait acquis la viteſſe BC en tombant de la hauteur KB [1]); ces hauteurs ſont donc dans la raiſon doublée des viteſſes, c'eſt-à-dire: comme le carré AC eſt au carré CB, ainſi HA à KB. Mais ſi enſuite, après le choc, les corps A et B changent leurs mouvements horizontaux, dont les viteſſes ſont meſurées par CD et CE, en des mouvements perpendiculaires vers le haut: on ſait que le corps A arrivera à la hauteur AL, de ſorte que AL eſt à AH comme le carré CD au carré CA. Car ſi tel eſt le rapport de AL à AH, il eſt certain qu'un corps tombant de la hauteur LA acquerra la viteſſe CD; d'où réciproquement s'il a la viteſſe CD, il pourra atteindre la hauteur AL, en vertu de ce qui a été poſé plus haut [3]): mais le corps B, en changeant ſa viteſſe CE en un mouvement vertical vers le haut, parviendra à la hauteur BM, de manière que MB eſt à KB comme le carré CE au carré CB. Joignons HK, LM, qui néceſſairement ſe couperont, p. e. en P [4]); et ſoit chacun de ces ſegments diviſé dans la même raiſon en N et en O, de ſorte que, comme les grandeurs B et A, c'eſt-à-dire comme AC à CB, ainſi ſoit HN à NK et de même LO à OM. Par ſuite, lorsque le centre de gravité du corps A eſt ſitué en H, et le centre de gravité du corps B en K, le centre de leur gravité compoſée ſera au point N. Mais après qu'ils ſont tombés de H et de K et

---

[1]) Voici une petite figure, empruntée au Manuscrit mentionné dans la note 3 de la p. 52, qui montre le mécanisme imaginé par Huygens pour convertir des vitesses verticales en des vitesses horizontales et réciproquement, savoir deux parois élastiques placées sous un angle de 45° avec l'horizon.

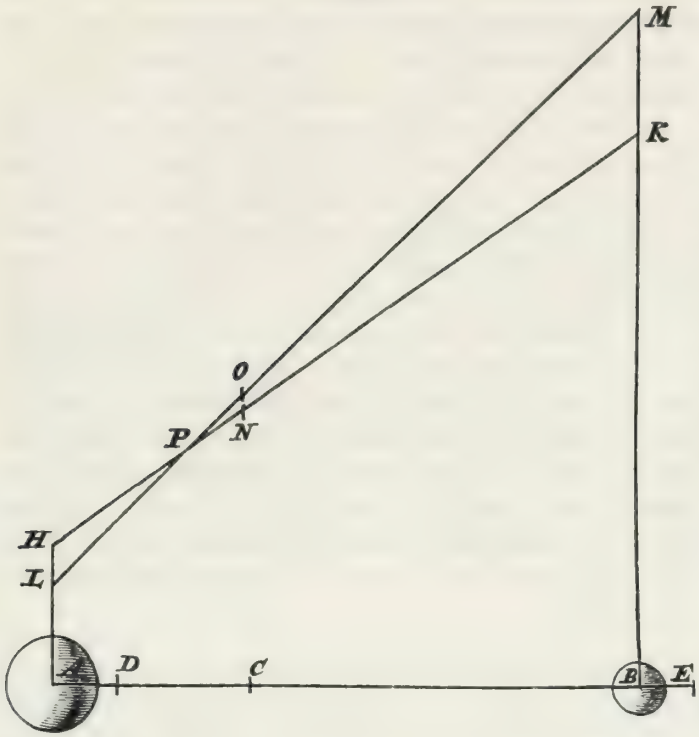
[2]) Huygens remplaça dans le Manuscrit le mot „descendenti" par „decidenti".

[3]) Voir le troisième alinéa de la p. 53.

[4]) La phrase précédente, à commencer par les mots „quæ necessario", fut insérée de la main de Huygens dans le Manuscrit. D'ailleurs, puisqu'elle se retrouve dans le Manuscrit d'environ 1656, mentionné dans la note 3 de la p. 52, il ne s'agit que de la correction d'une inadvertance du copiste.

corporis B, quæ ſit BC, ad celeritatem corporis A, quæ ſit AC. oſtendendum eſt, poſt contactum mutuum, utrumque eâdem quâ venit celeritate reverti, nempe A, celeritate CA, B vero, celeritate CB: conſtat autem, ſi A reflectatur celeritate CA, etiam B reflecti celeritate CB, quia alioqui non eadem eſſet mutuo reſpectu celeritas recedendi, quæ fuit appropinquandi *. Si igitur corpus A non revertitur celeritate CA, reſiliat primò, ſi fieri poteſt, celeritate minori CD; ergo B reſiliet celeritate CE, majori quam quâ advenerat, ita ut DE, ſit æqualis AB *. Ponamus corpus A acquiſiviſſe celeritatem priorem AC, quâ tendebat ad occurſum, cadendo ex altitudine HA, ut nimirum poſtquam descenderit usque in A, motum perpendicularem mutaverit in horizontalem cujus celeritas AC; corpus autem B acquiſiviſſe ſimiliter celeritatem BC, cadendo ex altitudine KB [1]); ſunt igitur hæ altitudines in celeritatum ratione duplicatâ, hoc eſt, ſicut quadratum AC ad quadratum CB, ita HA ad KB. Quod ſi deinde, poſt occurſum, corpora A & B motus ſuos Horizontales, quorum celeritates metiuntur CD, CE, convertant in motus perpendiculares ſurſum; conſtat corpus A perventurum ad altitudinem AL, ita ut ſit AL ad AH,
p. 382. ſicut quadratum | CD, ad quadratum CA. Quando enim hujusmodi rationem habet AL ad AH, certum eſt corpori decidenti [2]) ex altitudine LA, acquiri velocitatem CD; unde & viciſſim, velocitatem habens CD, attingere poterit altitudinem AL, per ea quæ ſuperius poſita fuere [3]); corpus autem B convertendo celeritatem CE in motum perpendicularem ſurſum, perveniet ad altitudinem BM, ut ſit MB ad KB ſicut quadratum CE ad quadratum CB. Jungantur HK, LM quæ neceſſario ſe mutuo ſecabunt, puta in P [4]); & dividantur utraque ſimiliter in N & O, ut, ſicut magnitudo B ad A, hoc eſt, ſicut AC ad CB, ita ſit HN ad NK, itemque LO ad OM.

[Fig. 11.]



* Prop. IV.

* Prop. IV.

qu'après leur contact mutuel ils se sont élevés jusqu'en L et en M, le centre de leur gravité composée sera en O, ce qui ne peut arriver parce que, comme nous le montrerons bientôt, le point O est plus haut que N; car en mécanique c'est un axiome très certain que par un mouvement des corps qui résulte de leur gravité le centre commun de leur gravité ne peut pas s'élever [1]). Or, que le point O est plus haut que le point N se démontre comme il suit [2]): L'excès du carré EC sur le carré BC est égal * à deux rectangles CBE avec le carré BE, c'est-à-dire au rectangle construit sur la somme de EC et CB, comme l'un des côtés, et sur BE. De même, l'excès du carré AC sur le carré CD est égal au rectangle construit sur la somme de AC et CD, comme l'un des côtés, et sur AD. Mais AD est égal à BE, parce que AB est égal à DE. Il paraît donc que le premier excès, savoir des carrés EC, CB, est au dernier, celui des carrés AC, CD, comme la somme de EC et CB à celle de AC et CD [4]). Mais comme la somme de EC et CB est plus grande que le double de CB, tandis que la somme de AC et CD est moindre que le double de AC, le rapport de la somme de EC et CB à celle de AC et CD sera certainement plus grand que celui de CB à CA. Donc aussi l'excès du carré EC sur le carré CB aura à celui du carré AC sur le carré CD un rapport plus grand que BC à CA. Mais puisque le carré EC est au carré CB comme MB est à BK en longueur, on aura par partage que l'excès du carré EC sur le carré CB est au carré CB comme MK à KB: or le carré CB est au carré CA comme la ligne KB à HA: et le carré CA est à son excès sur le carré CD comme HA est à HL,

* Eucl. l. 11 Prop. IV [3]).

---

[1]) Cet axiome peut être considéré comme une modification de celui-ci: que le centre de gravité se place aussi bas que possible. Sur l'historique de ce dernier axiome on peut consulter le Chap. XV (p. 1—151 du T. II) des „Origines de la Statique" par P. Duhem, Paris, Hermann, 1906, où il figure sous le nom de „Principe de Torricelli". Huygens l'avait déjà utilisé vers 1648 dans ses recherches sur la chaînette qui „ne faict point une parabole" (voir les pp. 28 et 40 de notre T. I et les trois derniers alinéas de la note 2 qui commence à la p. 37 du T. XI). De plus, il en avait fait en 1650 la base du premier Livre (p. 93—119 du T. XI) de son merveilleux traité sur l'équilibre des corps flottants, publié par nous pour la première fois; consultez encore les pp. 84 et 92 du même Tome XI.

Ces deux dernières applications de l'axiome concernent la Statique. Or, la modification de Huygens lui permet de l'appliquer à un problème de dynamique; ce qui en élargit de beaucoup la portée. Voir encore les p. 21—24 de l'Avertissement qui précède.

[2]) En termes algébriques il s'agit de prouver qu'on a toujours:

$$\frac{q(p-e)^2+p(q+e)^2}{p+q} > \frac{qp^2+pq^2}{p+q},$$

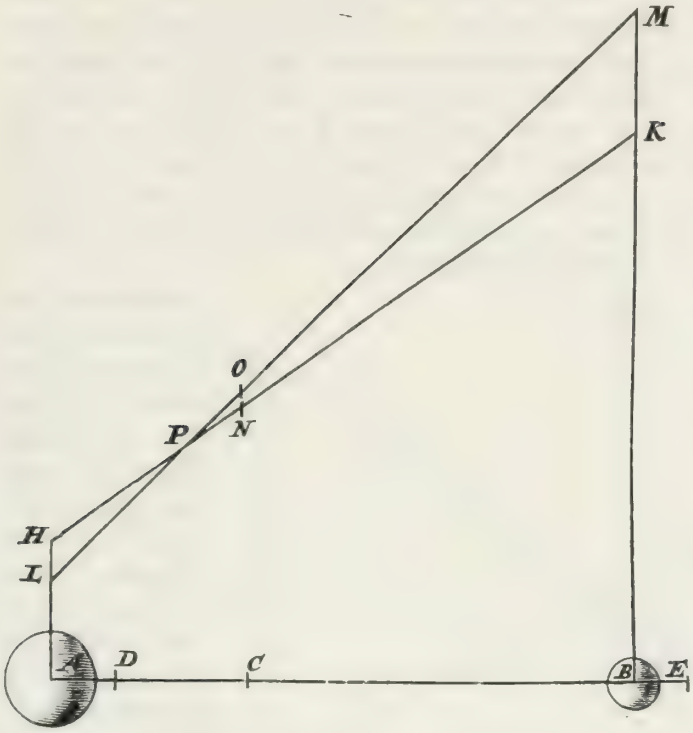
où $p = \mathrm{AC}$, $q = \mathrm{BC}$, $e = \mathrm{AD} = \mathrm{BE}$.

[3]) „Si recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo" (Clavius, Euclidis elementorum libri XV, Francofurti, Ex Officina Typographica Nicolai Hoffmanni, 1607, p. 172).

[4]) Le Manuscrit avait „AD, DC", ce qui fut corrigé de la main de Huygens.

Itaque cum corporis A, centrum gravitatis positum est in H, & corporis B centrum gravitatis in K, compositæ ipsorum gravitatis centrum est in puncto N.

[Fig. 11.]

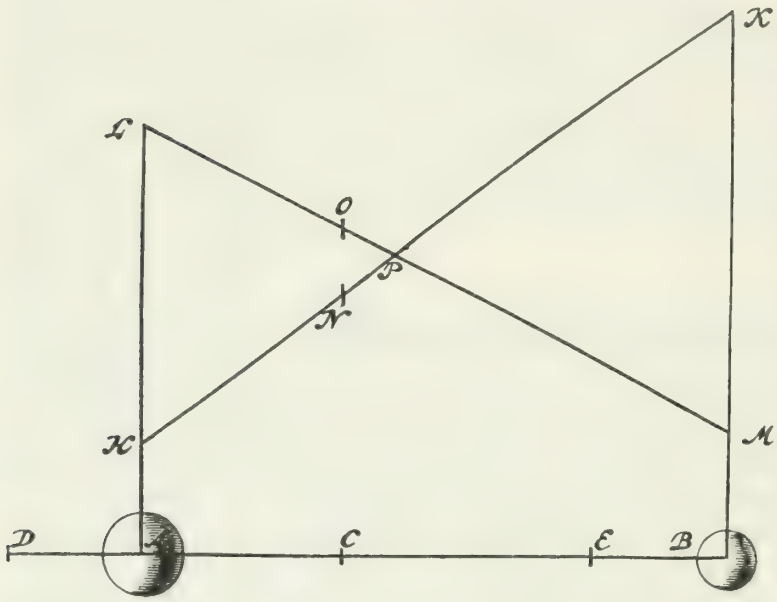


Postquam vero ex H & K deciderunt, ac post mutuum occursum rursus in altum sese sustulere usque in L & M, centrum compositæ ex ipsis gravitatis erit in O: quod fieri non potest; quoniam, ut mox ostendemus, altius est punctum O quam N: certissimum enim in mechanicis est axioma, motu corporum qui a gravitate ipsorum proficiscitur, centrum commune gravitatis ipsorum non posse attolli [1]). Quod autem punctum O sit altius quam N, sic ostenditur [2]). Excessus quadrati EC supra quadratum BC, æqualis est * duobus rectangulis CBE, cum quadrato BE, hoc est, rectangulo quod fit ex duabus EC, CB tanquam unâ, & BE. Similiter excessus quadrati AC, supra quadratum CD, æquatur rectangulo sub duabus AC & CD tanquam unâ, & AD. Est autem AD æqualis BE, quum sit AB æqualis DE. Itaque patet illum excessum, nempe quadratorum EC, CB, ad hunc excessum quadratorum AC, CD, sese habere; sicut utraque simul EC, CB ad utramque
p. 383. simul AC, CD [4]). Quum autem majores | sint duæ EC & CB quam dupla CB; at duæ simul AC, CD minores quam dupla AC, major utique erit ratio duarum simul EC, CB, ad utramque simul AC, CD, quam CB ad CA, ergo & excessus quadrati EC, supra quadratum CB, ad excessum quadrati AC supra quadratum CD majorem habet rationem quam BC ad CA. Quia vero, sicut quadratum EC ad quadratum CB, ita est MB ad BK longitudine; erit dividendo, ut excessus quadrati EC, supra quadratum CB, ad quadratum CB ita MK ad KB: sicut autem quadratum CB ad quadratum CA, ita est KB linea ad HA: utque quadratum CA ad excessum suum supra quadratum CD, sta HA ad HL, erat enim

* Eucl. l. 11 Prop. IV [3]).

car le carré AC était au carré CD comme HA à AL: donc, par égalité, on aura que l'excès du carré EC ſur le carré CB eſt à l'excès du carré AC ſur le carré CD comme MK à HL. Donc le rapport de MK à HL ſera auſſi plus grand que celui de BC à CA. Mais MK eſt à HL comme MP à PL et BC à CA comme MO à OL. Par conſéquent le rapport de MP à PL eſt auſſi plus grand que celui de MO à OL; et, par compoſition, celui de ML à PL plus grand que le rapport de ML à LO. Donc LO eſt plus grand que LP, d'où il paraît que le point O tombe par rapport au point d'interſection P au côté qui eſt vers M; mais la droite qui joint les points O et N eſt parallèle aux perpendiculaires MB et HA, puisque par ces points les droites LM et HK ſont diviſées dans le même rapport. Donc, de même que M eſt plus haut que K, il paraît que O eſt auſſi plus haut que N. Ce qui reſtait à démontrer.

[Fig. 12.]



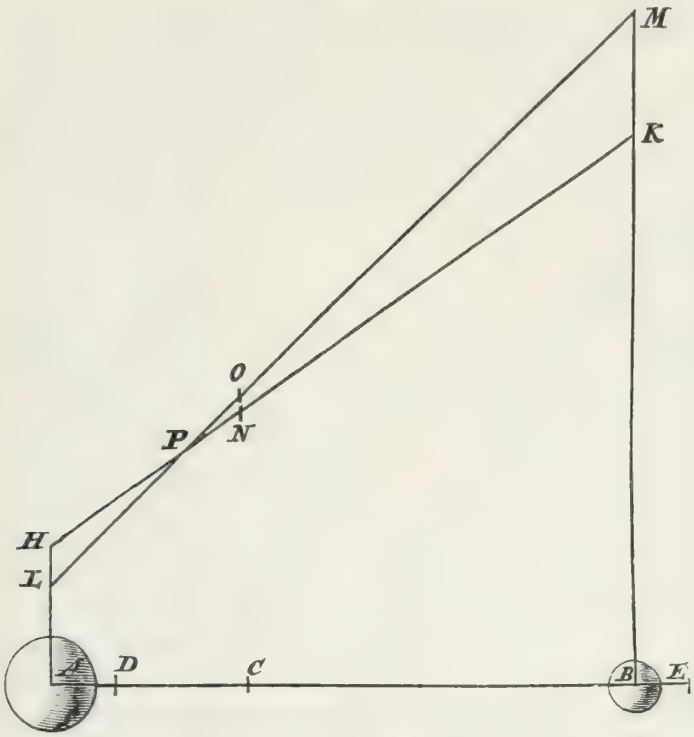
Maintenant que le corps A, ſi cela eſt poſſible, ſoit réfléchi du choc avec une viteſſe CD [Fig. 12], plus grande que celle CA avec laquelle il allait à la rencontre [1]). Or, CD ſera moindre que CB, la viteſſe du corps B avant la rencontre. Car ſi B n'était pas moindre que A mais égal à A, alors ſeulement A reculerait après le choc avec la viteſſe CB *[2]). Or, B ſera réfléchi du choc avec la viteſſe CE de ſorte que DE ſoit égal à AB *. Suppoſons que tout le reſte ſe paſſe comme dans le cas précédent et que la conſtruction ſoit achevée comme dans ce cas. Il arrivera donc que L eſt plus haut que H, parce que DC eſt plus

* Prop. II.
* Prop. IV.

[1]) Dans ce qui suit il s'agit, cette fois encore, de prouver que dans le cas en considération le point O (Fig. 12) se trouverait situé au-dessus du point N; ce qui est impossible d'après le principe

ut quadratum AC, ad quadratum CD, ita HA ad AL: Itaque, ex æquo erit, ſicut exceſſus quadrati EC ſupra quadratum CB, ad exceſſum quadrati AC ſupra quadratum CD, ita MK ad HL. Quare major quoque erit ratio MK ad HL, quam BC ad CA. Eſt autem ut MK ad HL, ita MP, ad PL; ut autem BC ad CA ita MO ad OL. Ergo major quoque ratio MP ad PL, quam MO ad OL; &, componendo, major ratio ML ad LP, quam ML ad LO. Itaque LO major quam LP; unde liquet punctum O cadere ad eam partem interſectionis P, quæ eſt verſus M; quæ autem conjungit puncta O N, parallela eſt perpendicularibus MB, HA, quoniam iis punctis rectæ LM, HK ſecundum eandem rationem dividuntur. Igitur ſicut ſublimius eſt M quam K, ita quoque O ſublimius eſſe apparet quam N. Quod ſupererat demonſtrandum.

[Fig. 11.]



Jam ſi fieri poteſt reflectatur ab occurſu corpus A celeritate CD [Fig. 12], majori quam CA, quâ ad occurſum pergebat [1]). Erit autem CD minor quam CB, quæ fuit celeritas corporis B ante occurſum. Etenim ſi B non eſſet minus quam A
p. 384. ſed ipſi æquale, tum demum A ab im | pulſu recederet celeritate CB * [2]); reflectetur autem B ab occurſu celeritate CE, ita ut DE ſit æqualis AB *. Jam cætera facta intelligantur, conſtructioque peracta ſicut in caſu præcedenti, eveniet igitur ut L ſit ſublimius quam H, quoniam DC major quam AC: utque M, ſit humilius

* Prop. II.
* Prop. IV.

---

que Huygens vient d'introduire. En termes algébriques il faut donc démontrer l'inégalité:

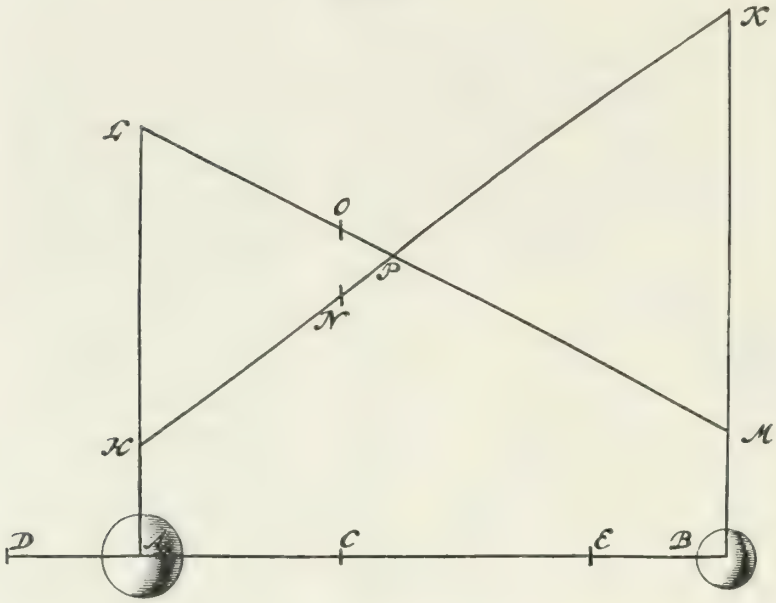
$$\frac{q(p+e)^2 + p(q-e)^2}{p+q} > \frac{qp^2 + pq^2}{p+q},$$

où $p = AC$, $q = BC$, $e = AD = BE$.

[2]) Comparez la note 5 de la p. 43.

grand que AC; et M ſera plus bas que K, parce que EC eſt moindre que CB. Enſuite on démontrera comme précédemment que la différence des carrés DC et CA eſt à la différence des carrés BC et CE comme la ſomme de AC et CD à celle de EC et CB. Mais comme cette dernière ſomme eſt moindre que le double de CB, et la précédente plus grande que le double de AC, le rapport de la ſomme de AC et CD à celle de CE et CB ſera plus grand que AC à CB. La différence des carrés DC et CA aura donc à la différence des carrés BC et CE un rapport plus grand que celui de AC à CB. Or, on démontrera que la première différence eſt de nouveau à la ſeconde comme LH à KM. Donc auſſi le rapport de LH à KM, c'eſt-à-dire de LP à PM, eſt plus grand que AC à CB, ou LO à OM; par conſéquent le point O tombe par rapport au point d'interſection P au côté qui eſt vers L. Mais ON, comme auparavant, eſt parallèle à LH. Par ſuite, comme le point L eſt plus élevé que H, O ſera auſſi plus élevé que N, mais ceci eſt abſurde pour la même raiſon que dans le cas précédent.

[Fig. 12.]

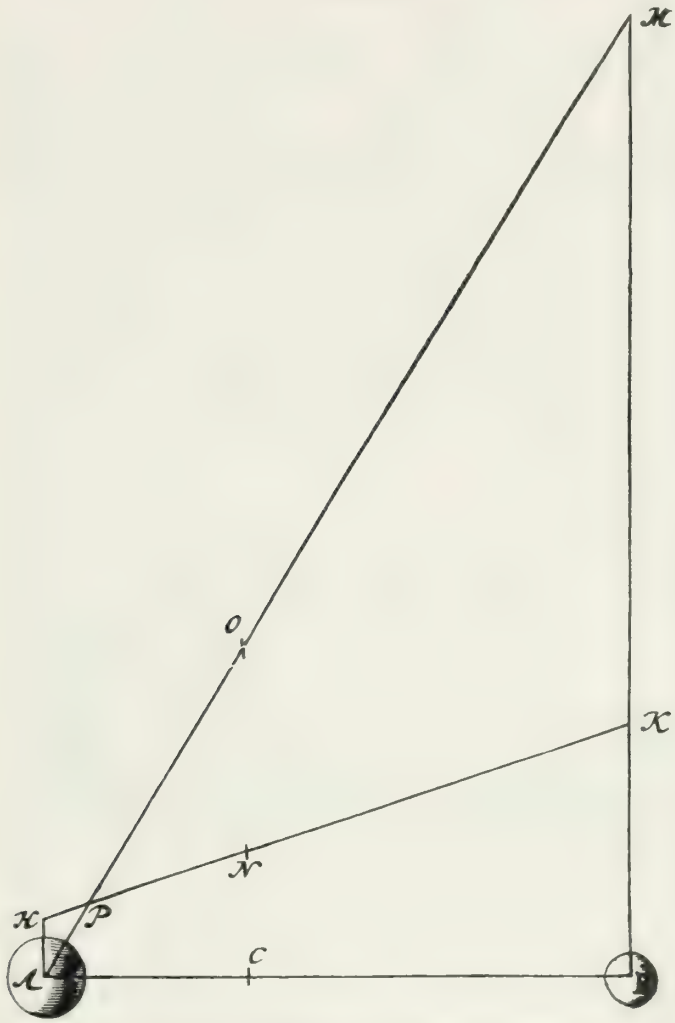


Et lorsqu'on dirait qu'après le choc le corps A [Fig. 13] reſtât en repos et que
Prop. IV. B ſeul fût réfléchi [1]), celui-ci prendrait donc la viteſſe AB * parce qu'avant le choc les deux corps ont eu la viteſſe relative AB. Or, ſuppoſant comme précédemment, que la viteſſe BC ait été acquiſe par le corps B en tombant de la hauteur KB, il ſuit que ſi l'on fait BK en longueur à BM comme le carré CB au carré AB,

[1]) C'est le cas particulier où l'on a $e = p$ dans l'inégalité de la note 2 de la p. 56.

quam K, quoniam EC minor quam CB. Porro oſtendetur ſicut prius, differentiam quadratorum DC, CA eſſe ad differentiam quadratorum BC, CE, ut duæ ſimul AC, CD, ad duas EC, CB. Quum vero hæ ſint ſimul minores quam dupla CB, illæ vero majores quam dupla AC, erit major ratio duarum ſimul AC, CD ad duas EC, CB, quam AC ad CB. Itaque differentia quadratorum DC, CA, ad differentiam quadratorum BC, CE, majorem habet rationem, quam AC ad CB. Ut autem dicta differentia, ad dictam differentiam, ita demonſtrabitur rurſus eſſe LH ad KM. Ergo maior quoque ratio LH ad KM, hoc eſt, LP ad PM, quam AC ad CB, hoc eſt, quam LO ad OM; quamobrem punctum O cadet ad eam partem interſectionis P quæ eſt verſus L. ON autem, ſicut ante, parallela eſt LH. Ergo ſicut punctum L ſublimius eſt quam H, etiam O ſublimius erit quam N, hoc autem, ob eandem quam in caſu præcedenti diximus rationem, abſurdum eſt.

[Fig 13.]



Quod ſi vero dicatur conſiſtere poſt occurſum corpus A [Fig. 13], ſolumque B reflecti [1]), reflectetur ergo celeritate AB *, quoniam etiam ante occurſum corpora habuere celeritatem AB reſpectu mutuo. Ponendo autem, ſicut ante; celeritatem BC corpori B acquiſitam eſſe cadendo ex altitudine KB, ſequitur, ſi fiat ut quadratum CB ad quadratum AB, ita BK ad BM longitudine; ipſam BM fore altitudinem ad quam aſſurgere poterit corpus B, ſi convertat motum horizontalem, quo fertur celeritate AB, in motum perpendicularem ſurſum. | Corpus autem A, cum, poſt occurſum,

* Prop. IV.

p. 385.

BM ſera la hauteur à laquelle pourra monter le corps B s'il change le mouvement horizontal par lequel il eſt entraîné avec la viteſſe AB en un mouvement perpendiculaire en haut; mais le corps A, puisque après le choc il a été dit être ſans mouvement, reſtera dans la droite AB. Si donc on tire MA et ſi on la diviſe en O de ſorte que AO ſoit à OM comme AC à CB, O ſera le point jusqu'auquel montera le centre de la gravité compoſée des deux corps. Mais les corps étant ſitués en H et en K, d'où l'on ſuppoſe qu'ils ſont descendus, avaient leur centre de gravité commun en N qui diviſe pareillement la droite HK dans le rapport de AC à CB; donc ſi l'on montre comme auparavant que le point O eſt plus élevé que le point N la démonſtration ſera réduite à la même abſurdité que plus haut. Or, cela peut être montré comme il ſuit. Puisque le carré AB eſt au carré BC comme, en longueur, MB eſt à BK, on aura, par partage, que l'excès du carré AB ſur le carré BC eſt au carré BC comme MK à KB; mais comme le carré BC eſt au carré CA ainſi KB eſt auſſi à HA, car ceci a été ſuppoſé comme dans le premier cas; donc, par égalité, l'excès du carré AB ſur le carré BC ſera au carré CA comme MK eſt à HA; mais le rapport du dit excès au carré CA eſt certainement plus grand que celui de la droite BC à CA [1]: donc auſſi le rapport de MK à HA, c'eſt-à-dire de MP à PA, ſera plus grand que le rapport de BC à CA, c'eſt-à-dire de MO à OA. Et, par compoſition, le rapport de MA à AP ſera plus grand que celui de MA à AO; d'où il réſulte que le point O tombe par rapport au point d'interſection P au côté qui eſt vers M. Or, M eſt plus haut que K; donc, puisque ON eſt néceſſairement parallèle à MK, le point O ſera auſſi plus haut que N: ce qui reſtait à démontrer.

[Fig. 14.]

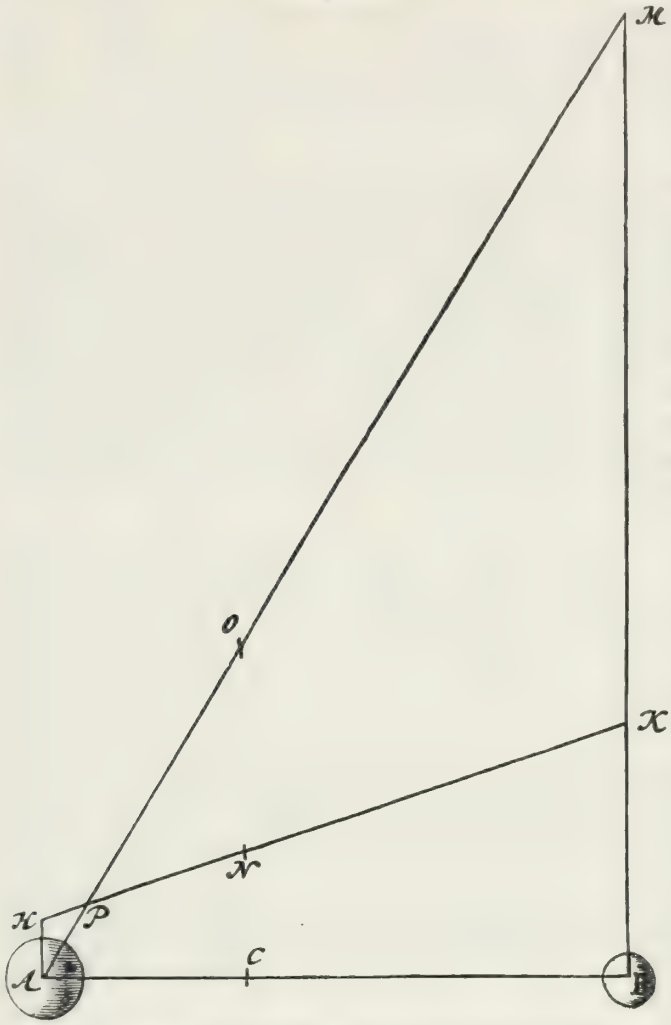
Si, enfin on diſait que le corps A après le choc continuera de ſe mouvoir vers le même côté avec la viteſſe CF [Fig. 14], celle-ci certes ne ſera pas plus grande que la viteſſe AC avec laquelle il ſe mouvait avant le choc: or, le corps B devra dans ce cas précéder le corps A avec la viteſſe CG, dont l'excès FG ſur la viteſſe CF ſoit égal à AB *. Mais que cela ne peut avoir lieu ſera établi comme il

* Prop. IV.

[1]) Puisqu'on a $\frac{(p+q)^2-q^2}{p^2} > \frac{q}{p}$.

motus expers dicatur, manebit in rectâ AB. Itaque ſi jungatur MA, ſeceturque in O ut ſit AO ad OM ſicut AC ad CB, erit punctum O ad cujus altitudinem ascendet centrum gravitatis ex utroque corpore compoſitæ. Poſitis autem corporibus in H & K, unde decidiſſe ponuntur, erat ipſorum commune gravitatis centrum in puncto N, quod ſimiliter dividit rectam HK, ſecundum rationem AC ad CB; itaque ſi rurſus oſtendatur punctum O ſublimius eſſe puncto N, ad idem quod ſuperius abſurdum deducta erit demonſtratio. Illud vero ſic oſtenditur. Quum ſit ut quadratum AB ad qu.BC, ita MB ad BK longitudine, erit dividendo, ſicut exceſſus quadrati AB ſupra qu.BC ad qu. BC, ita MK ad KB; ſicut autem qu. BC ad qu. CA, ita & KB ad HA, namque poſitum hoc eſt, ſicuti in caſu primo; igitur ex æquo ſicuti exceſſus quadrati AB ſupra qu.BC ad qu.CA, ita erit MK ad HA; exceſſus autem dicti ad qu.CA, omnino major eſt ratio quam rectæ BC ad CA [1]): itaque & MK ad HA, hoc eſt, MP ad PA, major erit ratio quam BC ad CA, hoc eſt, quam MO ad OA. Et componendo igitur major ratio MA, ad AP, quam MA ad AO; unde liquet punctum O cadere ad eam partem interſectionis P quæ eſt verſus M. Eſt autem M altius quam K: ergo quum ON ſit neceſſario parallela ipſi MK, erit quoque punctum O altius quam N: quod oſtendere reliquum erat.

[Fig. 13.]



Si denique dicatur corpus A poſt occurſum verſus eandem partem pergere moveri celeritate CF [Fig. 14], ea quidem non major erit quam AC quâ arte

ſuit [1]): prenons CD égal à CF, enſuite DE égal à AB; par ſuite, CE devient autant plus petit que ED, que CG eſt plus grand que ce même ED, ou FG: mais ſi nous ſuppoſons, comme dans le premier cas, que le corps A ſoit rejeté après le choc avec la viteſſe CD,

[Fig. 14.]

il eſt montré indubitablement que même la viteſſe CE ne peut convenir au corps B ſans amener une abſurdité, ſavoir qu'après avoir converti en mouvements verticaux ceux qui ſe font ſelon l'horizon, la gravité compoſée des corps monterait plus haut que la poſition d'où elle eſt deſcendue. Ceci doit donc arriver à plus forte raiſon ſi le corps B obtiendrait une viteſſe CG encore beaucoup plus grande que CE, mais que A aurait une viteſſe CF égale à CD. Donc le corps A ne continuera pas non plus à ſe mouvoir après le choc dans la même direction. Il reſte donc qu'il retourne après le choc avec la même viteſſe CA avec laquelle il ſe portait auparavant à la rencontre: et, par ſuite, B auſſi rejaillira avec la viteſſe CB. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IX.

Étant donnés deux corps inégaux ſe rencontrant directement, dont tous les deux, ou ſeulement un des deux ſoit en mouvement; étant donnée auſſi la viteſſe de chacun, ou celle d'un ſeul, lorſque l'autre eſt en repos, trouver les viteſſes avec lesquelles ils ſe meuvent après le choc.

Soit AD [Fig 15.] la viteſſe de A dirigée vers la droite: mais que B ou bien ſe meuve dans la direction contraire, ou bien précède dans la même direction avec la viteſſe BD, ou bien ſoit en repos, ſavoir que le point D tombe en B. Leur viteſſe relative ſera donc AB.

Diviſons AB en C de ſorte que AC ſoit à CB comme B à A en grandeur et faiſons CD égale à CE. Je dis que EA ſera la viteſſe du corps A après le choc,

[1]) En termes algébriques on doit prouver cette fois qu'on a:

$$\frac{qf^2 + p(p+q+f)^2}{p+q} > \frac{qp^2 + pq^2}{p+q}, \text{ où } CF = f < p.$$

occurſum movebatur: debebit autem corpus B ipſum præcurrere celeritate CG, cujus ſupra celeritatem CF exceſſus FG æqualis ſit AB *. At hoc fieri non poſſe * Prop. IV.
p. 386. ſic conſtabit [1]): |ſumatur CD æqualis CF; deinde DE æqualis AB; ſit igitur CE minor quam ED quanto CG eâdem ED, ſive FG, major eſt; quum autem, ponendo, ut in caſu primo, corpus A, ab occurſu retro verſum fuiſſe celeritate CD, evincatur ne quidem celeritatem CE corpori B convenire poſſe, quin ad abſurdum deveniatur, ut nimirum converſis motibus qui ſecundum Horizontem ſunt, in motus perpendiculares, altius aſcendat corporum compoſita gravitas quam unde deſcenderat; idem multo magis fieri neceſſe eſt ſi corpus B celeritatem CG adhuc multo majorem quam CE acquirat, A vero celeritatem CF habeat ipſi CD æqualem. Igitur neque perget moveri corpus A, poſt occurſum, in eandem partem. Quamobrem ſupereſt ut retro feratur celeritate CA quantâ prius ad occurſum tetendit: atque ideo B quoque reſiliet celeritate CB. Quod erat demonſtrandum.

Propositio IX.

Datis corporibus duobus inæqualibus, directè ſibi occurrentibus, quorum utrumque vel alterum tantum moveatur, datâque utriusque celeritate, vel unius, ſi alterum quiescat; invenire celeritates quibus utraque poſt occurſum ferentur.

Moveatur corpus A dextram verſus celeritate AD [Fig. 15]: B vero, vel in partem contrariam moveatur, vel in eandem partem præcedat celeritate BD, vel denique quiescat, hoc eſt, cadat punctum D in B. Erit igitur ipſis mutuo reſpectu celeritas AB.

Dividatur AB in C ut ſit AC ad CB, ſicut B ad A magnitudine, & ſumatur ipſi

---

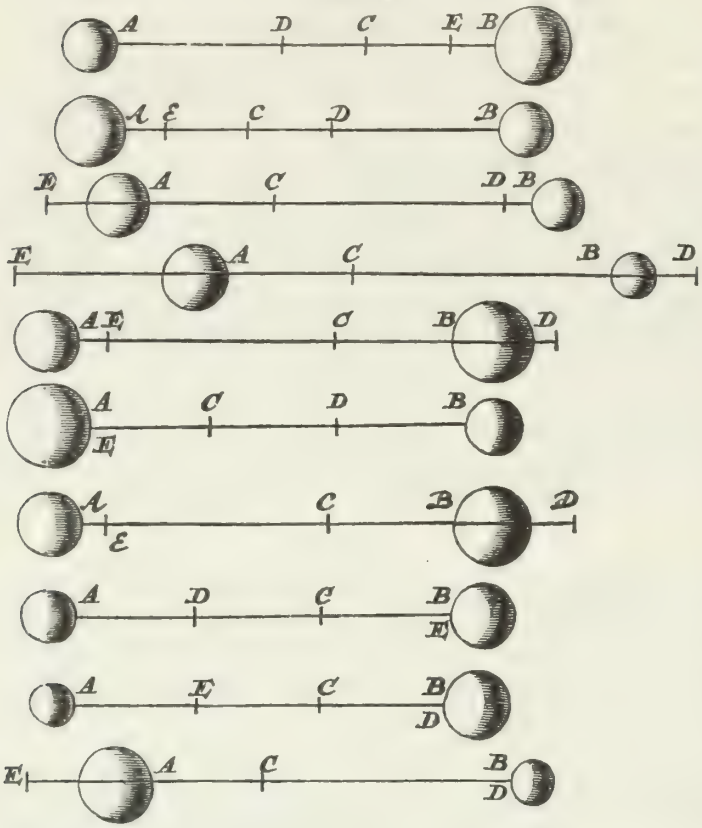
À cet effet il suffira à coup sûr qu'on montre:

$$\frac{qf^2 + p(p+q-f)^2}{p+q} > \frac{qp^2 + pq^2}{p+q},$$

inégalité qui devient identique à celle de la note 2 de la p. 56 lorsqu'on remplace f par $p - e$ où $e = AD$. Il en résulte que la démonstration du cas présent peut se réduire à celle du premier cas; ce dont Huygens profite ici.

mais EB celle du corps B, et cela dans la direction indiquée par l'ordre des points E A, E B [1]). Alors que le point E tombe en A, le corps A ſera réduit au repos: mais ſi E tombe en B, le corps B ſera en repos.

[Fig. 15.]



En effet, lorsque nous aurons montré que ces événements ſe paſſent ainſi dans un navire qui eſt emporté avec une viteſſe uniforme, il ſera certain qu'ils arriveront de la même façon pour celui qui ſe trouve à terre. Figurons nous donc que le navire ſe meuve le long de la rive d'un fleuve et que dans ce navire un paſſager porte de ſes mains F, G deux boules A, B, ſuspendues à des fils, lesquelles, en les mouvant avec des viteſſes AD & BD, ſavoir par rapport à lui-même et au navire, il faſſe ſe rencontrer au point D; mais poſons que le navire s'avance avec la viteſſe DC dans la direction indiquée par l'ordre des points D, C. Il arrivera donc que, par rapport à la rive et au ſpectateur qui s'y trouve, la boule A ſe meut avec la viteſſe AC vers la droite, puisque par rapport au navire elle avait la viteſſe AD. Mais la boule B ayant dans le bateau la viteſſe BD, aura par rapport à la rive la viteſſe BC vers la gauche. Si donc le ſpectateur qui ſe trouve ſur la rive prend de ſes mains H K les mains F G du paſſager, et avec elles les têtes des fils qui ſoutiennent les boules A B, il paraît que tandis que le paſſager, par rapport à lui-même, les meut avec les viteſſes AD, BD, en même temps celui qui eſt ſur la rive les meut, par rapport à lui même et à la rive, avec les viteſſes AC, BC. Or, puisque ces viteſſes ſont en proportion réciproque des grandeurs des corps A et B, il faut que ces corps, par rapport au même ſpectateur, rejailliſſent de leur contact avec les mêmes viteſſes CA et CB, ainſi qu'il a été demontré plus haut [3]).

p. 387. CD æqualis CE. Dico EA | fore celeritatem corporis A poſt occurſum, EB vero corporis B, idque in eam partem quam demonſtrat ordo punctorum E A, E B [1]). Quod ſi in A incidat punctum E, ad quietem redigetur corpus A; ſi vero E incidat in B, quieſcet corpus B.

Si enim hæc ita contingere oſtenderimus in navi quæ æquabili celeritate provehitur, conſtabit & in terrâ ſtanti eodem modo eventura. Intelligatur itaque navis ferri juxta ripam fluminis, in quâ conſiſtens vector ſuſtineat manibus F, G, globos A, B, ex filis ſuſpenſos, quos ita movendo celeritatibus AD, & BD, reſpectu nimirum ſui naviſque, concurrere faciat in puncto D, navis autem pergere ponatur celeritate DC, in partem eam quam oſtendit ordo punctorum D C; eveniet igitur ut, reſpectu ripæ & ſpectatoris in eâ ſtantis, globus A moveatur celeritate AC dextram verſus, quia reſpectu navis habebat celeritatem AD. Globus autem B cum in navi habeat celeritatem BD, habebit, reſpectu ripæ, celeritatem BC ſiniſtram verſus. Quod ſi igitur ſpectator in ripâ ſtans prehendat manibus ſuis H K, manus vectoris F G [2]), cumque iis capita filorum quibus corpora A B ſuſtinentur; apparet dum vector, ſui reſpectu, illa movet celeritatibus AD, BD, ſimul eum qui in ripâ conſiſtit illa movere reſpectu ſui & ripæ, celeritatibus AC, BC, quæ celeritates quum ſint in proportione reciprocâ ipſarum magnitudinum, neceſſe eſt ut corpora A, B, ejusdem ſpectatoris reſpectu, reſiliant a contactu iisdem celeritatibus CA, CB, ut in præcedentibus demonſtratum fuit [3]). Navis autem ſemper progreditur celeritate DC ſive CE; idque ſecundum ordinem punctorum

---

[1]) Voici, en forme algébrique, la règle générale à laquelle on arrive en appliquant la construction de Huygens. Soient m_A et m_B les grandeurs, ou plutôt les masses, des corps A et B; $v_A = AD$ et $v_B = BD$ leurs vitesses avant, $v'_A = EA$ et $v'_B = EB$ après le choc, toutes comptées positives lorsqu'elles sont dirigées de gauche à droite. Posons encore $M = m_A + m_B$, on trouve alors:

$$Mv'_A = M.EA = M.CA + M.EC = -M.AC + M.CD = -M.AC + M(AD - AC) = M.AD - 2M.AC = Mv_A - 2m_B AB = (m_A + m_B)v_A - 2m_B(v_A - v_B) = (m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B;$$ et pareillement:

$$Mv'_B = M.EB = M.CB + M.EC = M.CB + M.CD = M.CB + M(CB + BD) = M.BD + 2M.CB = Mv_B + 2m_A AB = (m_A + m_B)v_B + 2m_A(v_A - v_B) = -(m_A - m_B)v_B + 2m_A v_A.$$

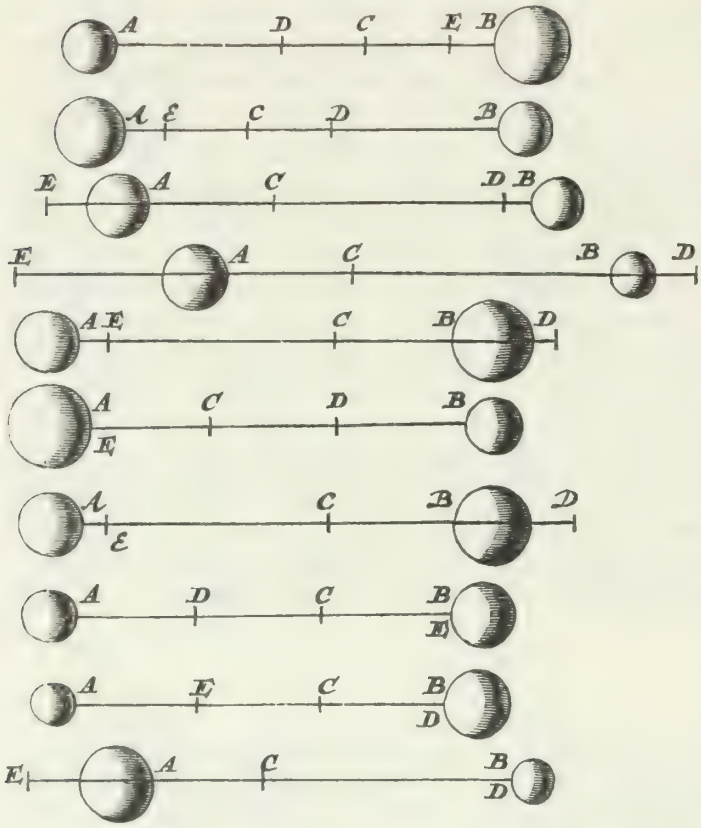
Inutile de dire que ces formules sont identiques avec celles qu'on donne dans les traités modernes pour le choc direct des corps élastiques lorsqu'on néglige leurs mouvements vibratoires après le choc.

[2]) On lit encore de la main de Huygens en marge du Manuscrit: „handen F G in de schuyt, H K op het land" (les mains F G dans le bateau, H K sur la terre).

[3]) Voir la Prop. VIII, p. 53. Ajoutons que les cinq derniers mots furent ajoutés de la main de Huygens dans le Manuscrit.

Mais le navire avance toujours avec la viteſſe DC ou CE; (et cela ſelon l'ordre des points C E): il faut donc que A, par rapport au bateau et au paſſager, ſe meuve avec la viteſſe EA dans la direction que déſigne l'ordre des points E A. B, au contraire, par rapport à ce même bateau, avec la viteſſe EB, elle auſſi ſelon l'ordre des points E B; mais lorsque E tombe en A, ou B, il paraît que le corps A ou B ſe meut après le choc, avec la même viteſſe que le navire lui-même et dans la même direction; d'où il réſulte que dans ces cas ils doivent être en repos par rapport au navire et au paſſager. Nous avons donc montré que les corps A et B, qui, dans le navire ſe portaient au contact avec les viteſſes AD, BD, ſe meuvent après leur contact dans le même bateau avec les viteſſes EA, EB ſelon l'ordre de ces points. Or, ce qui arrive dans le bateau doit certainement ſe paſſer de même, comme nous l'avons dit, pour celui qui ſe trouve à terre. Ce qui a été propoſé eſt donc prouvé [4]). Cependant pour l'uſage dans le calcul il ſera permis de tirer de la conſtruction de ce problème les règles ſuivantes.

[Fig. 15.]



Dans le cas de deux corps A et B, tous les deux en mouvement, afin de trouver la viteſſe du corps A après le choc, que l'on faſſe comme la ſomme des corps eſt au double du corps B ainſi leur viteſſe relative à une autre viteſſe qui ſoit nommée C: la différence entre cette viteſſe et celle du corps A avant le choc, ou dans un des cas leur ſomme, ſavoir lorsque A précède dans le mouvement, donnera la viteſſe avec laquelle ce dernier corps ſe mouvra après la rencontre, c'eſt-à-dire en reculant lorsque l'excès ſera en faveur de C, et en avançant dans le cas contraire [5]).

C E [1]); igitur neceſſe eſt ut A moveatur, navigii & vectoris reſpectu, celeritate EA, in partem eam, quam deſignat ordo punctorum E A. B vero, ejus-
p. 388. dem | navigii reſpectu [2]), celeritate EB, ſecundum ordinem item [3]) punctorum E B; cum autem E incidit in A, vel B, apparet corpus A vel B poſt occurſum, pari celeritate cum navi ipſâ, inque eandem partem ferri: unde illa eis caſibus, reſpectu navis & vectoris, quiescere neceſſe eſt. Itaque oſtendimus corpora A & B, quæ in navi movebantur ad occurſum celeritatibus AD, BD, poſt occurſum in eâdem navi moveri celeritatibus EA, EB, ſecundum ordinem horum punctorum. Quod autem in navi contingit, idem in terrâ conſiſtenti, uti diximus, evenire certum eſt. Igitur conſtat propoſitum [4]). Ad calculi vero uſum licebit ex conſtructione hujus problematis formare regulas ſequentes.

Si fuerint duo corpora A & B, quorum utrumque moveatur; ad inveniendam celeritatem corporis A poſt impulſum, fiat, ut ſumma corporum ad duplum corporis B, ita celeritas, quam habent reſpectu mutuo, ad aliam celeritatem quæ dicatur C: differentia inter hanc & celeritatem corporis A ante impulſum, vel uno caſu eorum ſumma, cum nimirum A in motu præcedit, efficiet celeritatem, quâ hoc ipſum poſt occurſum movebitur, regrediendo quidem ſi exceſſus fuerit penes C, at pergendo ſi contra [5]). Quod ſi nulla ſit differentia, corpus A poſt occurſum quieſcet.

Inventâ autem celeritate corporis A, etiam corporis B celeritas innotescit, ex eo quod mutuo reſpectu eadem debeat eſſe corporum celeritas poſt atque ante occurſum.

---

[1]) L'indication de la direction de la vitesse selon l'ordre des points fut ajoutée de la main de Huygens. Il résulte du Manuscrit d'environ 1656 qu'elle avait été omise par mégarde par le copiste.

[2]) Les mots qui précèdent, à commencer par: „celeritate EA", avaient été également omis par le copiste.

[3]) Le mot „item" fut inséré de la main de Huygens.

[4]) Ce qui va suivre jusqu'au début de la Prop. XI fut intercalé après coup par la main du copiste mais sur l'indication de Huygens lui-même puisqu'on lit en marge du Manuscrit de la main de celui-ci: „il faut insérer icy ce qu'il y a pag. 21.1." Tout cela doit dater d'une époque postérieure à celle où le reste du texte fut composé. En effet cela manque dans le Manuscrit d'environ 1656.

[5]) En tenant compte du sens des mouvements tel que Huygens le suppose, on retrouve facilement dans ce qui précède la première formule de la note 1 de la p. 67 sous la forme:

$$v'_A = v_A - \frac{2m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B).$$

Et ſi la différence eſt nulle, le corps A reſtera en repos après la rencontre.

Or, la viteſſe du corps A étant trouvée, celle du corps B eſt également connue puisque leur viteſſe relative doit être la même après et avant la rencontre.

Si le corps A a été donné comme étant en repos et que B eſt ſeul en mouvement vers A, il paraît que la viteſſe de A après la rencontre eſt égale à la viteſſe C, trouvée ainſi que nous l'avons dit. D'où l'on déduit encore le théorème ſuivant.

Proposition X.

La viteſſe qu'un corps plus grand donne à un corps plus petit en repos, ſe rapporte à celle que le corps plus petit avec la même viteſſe imprime au plus grand en repos comme la grandeur du plus grand à celle du plus petit.

Soit le corps A plus grand que B, et ſuppoſons que la viteſſe AC [Fig. 16] ſoit imprimée au corps A en repos s'il eſt pouſſé par le corps B, ſe mouvant avec la viteſſe BA; mais que le corps B en repos, s'il eſt pouſſé par le corps A ſe mouvant avec la même viteſſe AB, reçoive la viteſſe BD: je dis que comme A eſt à B en grandeur, ainſi la viteſſe BD à AC.

En effet, puisque la viteſſe BD eſt au double de la viteſſe AB comme le corps A eſt à la ſomme de B et de A *; mais que la ſomme de B et A eſt à B comme le double de la viteſſe AB à la viteſſe AC *, on aura, par égalité, que la viteſſe BD eſt à la viteſſe AC comme le corps A à B; ce qu'il fallait démontrer [2]).

* Prop. IX [1]).

* Prop. IX.

---

[1]) Voir le dernier alinéa qui se rapporte à cette Proposition. On a dans le premier cas, où A repose avant le choc: $C = \frac{2m_B}{m_A + m_B}$ BA et dans le second: $C = \frac{2m_A}{m_A + m_B}$ AB.

[2]) On trouve encore, écrite de la main de Huygens à une date inconnue, sur une feuille détachée, la Proposition suivante: „Si corpus minus moveatur ac majori quiescenti occurrat, motus quantitas post impulsum augebitur tantoque magis quanto corpus quiescens majus fuerit. Ita tamen ut nunquam fiat prioris tripla."

Nous ne connaissons pas la manière dont cette Proposition a été déduite par Huygens, mais il est facile d'en constater l'exactitude.

Soit à ce propos dans les notations de la note 1 de la p. 67, v_B dirigée vers A qui se trouve

Si corpus A quiescens detur, solumque B versus ipsum moveatur, apparet celeritatem ipsius A post occursum, fore æqualem celeritati C, ita, ut jam diximus, inventæ. Hinc vero & theorema sequens deducitur.|

p. 389.

Propositio X.

Celeritas quam majus corpus dat minori quiescenti, ad eam quam simili velocitate minus imprimit quiescenti majori, eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem.

Esto corpus A majus quam B, & ponamus quiescenti A, si impellatur a corpore B, moto velocitate BA [Fig. 16], tribui velocitatem AC. Ipsi vero B quiescenti, si impellatur a corpore A, pari velocitate AB, dari velocitatem BD: dico ut A ad B magnitudine, ita esse celeritatem BD ad AC.

[Fig. 16.]

Quia enim celeritas BD est ad duplam celeritatem AB ut corpus A ad utrumque simul B & A*; sicut autem utrumque B & A ad B, ita dupla celeritas AB ad celeritatem AC *, erit ex æquo celeritas BD ad celeritatem AC, sicut corpus A ad B; quod erat demonstrandum [2]). *Prop. IX [1]). * Prop. IX.

à droite de B, $v_A = 0$ et $m_A > m_B$. On a alors:

$$v'_A = \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B;\ v'_B = -\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_B;$$

et l'on trouve pour la quantité totale du mouvement suivant la conception de Descartes:

$$\frac{3m_A m_B - m^2_B}{m_A + m_B} v_B = m_B v_B \left(3 - \frac{4m_B}{m_A + m_B}\right),$$

où $m_B v_B$ représente la quantité du mouvement avant le choc, et où $\frac{4m_B}{m_A + m_B}$ diminue continuellement de 2 à zéro lorsque m_A augmente depuis $m_A = m_B$ jusqu'à $m_A = \infty$.

Proposition XI [1].

Dans le cas de deux corps qui ſe rencontrent, ce que l'on obtient en prenant la ſomme de leurs grandeurs multipliées par les carrés de leurs viteſſes ſera trouvé égal avant et après la rencontre: ſavoir lorsque les rapports des grandeurs et des viteſſes ſont données en nombres ou en lignes.

Que A et B ſoient les corps, dont A ſe meut avant la rencontre avec la viteſſe AD [Fig. 17], mais B avec la viteſſe BD. Soit trouvé d'autre part, par ce qui précède [2], qu'après la rencontre le corps A poſſède la viteſſe EA, et le corps B la viteſſe EB: ſavoir en diviſant AB en C de ſorte que comme A ſoit à B ainſi BC à CA, et en faiſant CE égal à CD. Puisque donc le rapport de la grandeur de A à B eſt indiqué par le rapport de CB à CA, on doit démontrer que le ſolide conſtitué par la ligne CB ſur le carré AD enſemble avec le ſolide par la droite CA ſur le carré BD eſt égal à la ſomme du ſolide par la même ligne CB ſur le carré EA et du ſolide par la droite CA ſur le carré EB [3]. Or, s'il y a quatre grandeurs dont la première excède autant la deuxième que la troiſième la quatrième, ou dont la première eſt inférieure à la deuxième autant que la troiſième à la quatrième, la ſomme de la première et de la quatrième ſera certainement égale à la ſomme de la deuxième et de la troiſième. Ce qui a été propoſé ſera donc juſtifié lorsque nous aurons montré que le ſolide ſur le carré AD et la droite CB excède autant ou eſt autant ſurpaſſé par le ſolide ſur le carré EA et la même droite CB que celui conſtitué ſur le carré EB par la droite CA excède ou eſt ſurpaſſé reſpectivement par le ſolide ſur le carré BD et la même droite CA. Mais ceci ſe montre comme il ſuit.

---

[1]) Cette Proposition est numérotée 10 dans le Manuscrit où la Prop. X de la p. 71 fut insérée après coup; comparez la note 4 de la p. 69.

[2]) Voir l'alinéa qui commence en bas de la p. 65.

[3]) Prenant en considération le sens des segments (de sorte qu'on a p. e. $CD = -DC$) et comptant comme positifs ceux qui sont dans la direction AB, cette relation peut s'écrire sous la forme $CB\,(AC + CD)^2 + AC\,(CB - CD)^2 = CB\,(AC - EC)^2 + AC\,(EC + CB)^2$, valable pour tous les cas de la Fig. 17. Pour la prouver il suffit d'y substituer $EC = CD$ après quoi elle se réduit à une identité.

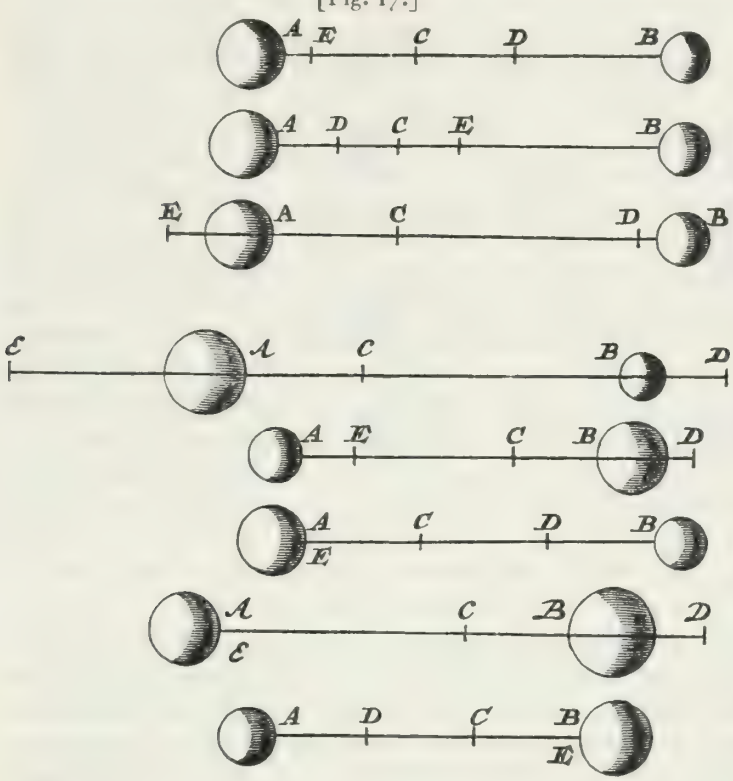
Toutefois la démonstration qui suit devient assez compliquée à cause de la forme géométrique à la mode des anciens que Huygens lui donne et des différents cas qu'il doit distinguer en conséquence.

Propositio XI [1]).

Duobus corporibus ſibi mutuo occurrentibus, id quod efficitur ducendo ſingulorum magnitudines in velocitatum ſuarum quadrata, ſimul additum, ante & poſt occurſum corporum æquale invenitur: ſi videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur.

Sint corpora A & B, quorum A moveatur, ante occurſum, celeritate AD [Fig. 17]; B vero, celeritate BD. Poſt occurſum autem ſit inventa, per antecedentem [2]), corporis A celeritas EA, & corporis B, celeritas EB: divi- | dendo nempe AB in C, ut ſit ſicut A ad B ita BC ad CA, & poſitâ CE æquali CD. Quia igitur ratio magnitudinis A ad B, deſignatur ratione lineæ CB ad CA; oſtendendum eſt ſolidum ex lineâ CB in quadratum AD, una cum ſolido è rectâ CA in quadratum BD, æquari aggregato ſolidi ab eâdem CB in quadratum EA, & ſolidi è rectâ CA in quadratum EB [3]). Atqui, ſi ſint quatuor magnitudines, quarum prima ſecundam tantum exſuperet, quantum tertia quartam, vel quarum prima tantundem à ſecundâ deficiat atque tertia à quartâ; certum eſt, primam cum quartâ æquari ſecundæ & tertiæ. Itaque conſtabit propoſitum, ſi oſtenderimus ſolidum a quadrato AD in rectam CB tantum excedere vel ſuperari a ſolido ex quadrato EA in eandem CB, quantum quod ſit a quadrato EB in rectam CA, ſimul excedit vel ſuperatur a ſolido ex quadrato BD in eandem CA. Hoc vero ſic oſtenditur.

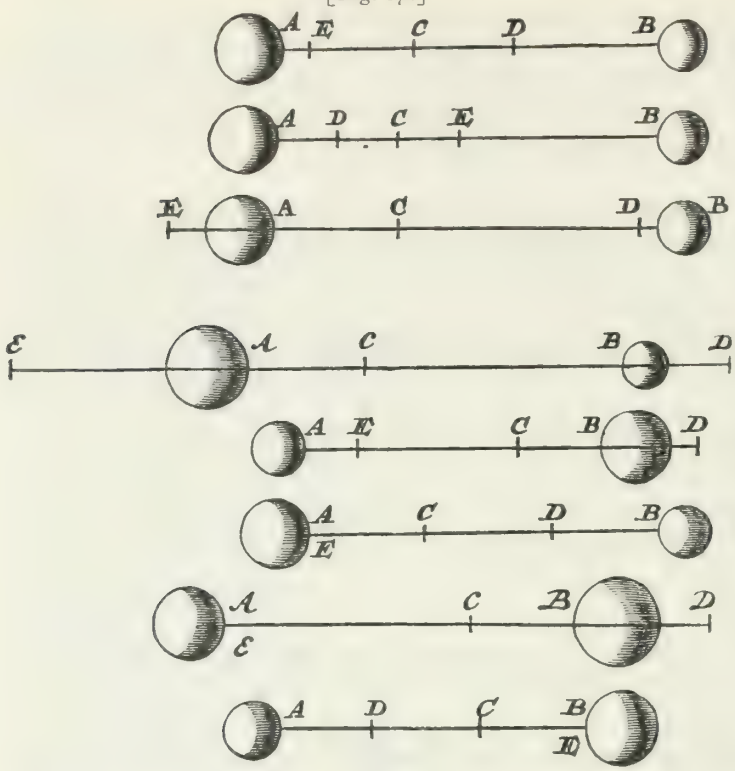
[Fig. 17.]



p 390.

En tout cas, ou bien le point C tombe entre A et D, ou bien le point D entre A et C [1]). Toutes les fois où C eſt ſitué entre A et D, AD ſera égale à la ſomme de AC et CD, mais AE à leur différence; car CE eſt égale à CD. Par conſéquent AD ſera alors toujours plus grande que AE. Mais dans les mêmes cas BE ſera égale à la ſomme de BC et de CE; BD, au contraire, à leur différence et, par ſuite, BE ſera toujours plus grande que BD. Mais toutes les fois que D tombera entre A et C, AE ſera égale à la ſomme de AC et de CE; AD, au contraire, à leur différence; par ſuite AE ſera plus grande que AD. Mais, dans ces cas-ci BD ſera auſſi plus grande que BE, parce que celle-là eſt égale à la ſomme de BC et de CD et celle-ci à leur différence. Il paraît donc que toutes les fois que AD eſt plus grande que AE, BE eſt auſſi plus grande que BD, mais que toutes les fois que AE eſt plus grande que AD, BD eſt auſſi plus grande que BE.

[Fig. 17.]



Enſuite, puisque DE eſt diviſée en C en deux parties égales, quelle que ſoit la ſituation du point A, la différence des carrés AD et AE ſera toujours égale au quadruple du rectangle ACD ou ACE, par la propoſition 8 du ſecond livre des Éléments [2]); ſavoir en prenant pour la droite diviſée d'une manière quelconque dans le premier et le cinquième cas [3]) AC qui eſt diviſée en E: dans le deuxième et le huitième, AC qui eſt diviſée en D: dans le troiſième et le quatrième EC coupée par A: dans le ſixième et le ſeptième, où il n'y a pas de carré AE, il paraît que la dite différence eſt le carré AD, qu'on ſait être égal pareillement au quadruple du rectangle ACD ou ACE. Pour la même raiſon, à cauſe de la Biſection de la ligne DE en C, quelle que ſoit la ſituation du point B, la différence des carrés BE et BD ſera toujours égale au quadruple du rectangle BCD ou BCE. Or, puis-

Omni casu aut punctum C cadit inter A & D, aut D inter A & C [1]). Quoties C situm est inter A & D æquabitur AD duabus simul AC, CD; AE vero, earundem differentiæ; nam CE, æqualis est CD, unde tunc semper major erit AD quam AE. Iisdem vero casibus erit BE æqualis duabus simul BC, CE; at BD earum differentiæ; ac proinde semper major BE quam BD. At quoties D cadet inter A & C, erit AE æqualis duabus simul AC, CE; AD vero, ipsarum differentiæ; ac proinde AE major quam AD. Sed & BD hisce casibus major erit, quam BE, quoniam illa æquabitur duabus simul BC, CD; hæc vero earundem differentiæ. Itaque apparet quoties AD major est quam AE, etiam BE majorem esse quam BD; quoties autem AE major quam AD, etiam majorem esse BD quam BE.

p. 391. Porro quoniam DE ex æquo divisa est in C, quomo | docunque sese habeat punctum A, erit semper differentia quadratorum AD, AE æqualis quadruplo rectangulo ACD vel ACE, per 8 secundi elementorum [2]); sumendo nimirum pro lineâ utcunque sectâ, in primo & quinto casu [3]), AC quæ dividitur in E: in secundo & octavo, AC quæ dividitur in D, in tertio & quarto casu EC quam secat A: in sexto & septimo, ubi nullum est quadratum AE, apparet pro dictâ differentiâ esse quadratum AD, quod similiter æquari constat quadruplo rectangulo ACD vel ACE. Eâdem ratione propter Bisectionem lineæ DE in C, quomodocunque se habeat punctum B, erit semper differentia quadratorum BE, BD æqualis quadruplo rectangulo BCD, vel BCE. Est autem, propter communem altitudinem, quadruplum rectangulum BCD, ad quadruplum rectangulum ACD, quod æquale erat differentiæ quadratorum AD, AE, sicut BC, ad AC. Igitur differentia quadratorum BE, BD ad differentiam quadratorum AD, AE, ut BC ad AC. Quamobrem quod fit ex differentiâ quadratorum AD, AE, in rectam BC, quod ipsum est differentia solidorum ex quadrato AD in BC, &

---

[1]) Puisque le point C se trouve toujours entre A et B, c'est-à-dire à droite du point A, Huygens n'exclut ici (à l'exception du cas intermédiaire où C et D coïncident et où les vitesses ont les mêmes valeurs absolues avant et après le choc) que les cas où la vitesse AD du corps A avant le choc est dirigée de droite à gauche, auxquels cas le corps A est poursuivi par le corps B. Or, il est évidemment permis dans les cas où les deux corps se meuvent au début dans la même direction de supposer que ce soit le corps B qui est poursuivi par le corps A et que la poursuite se fasse de gauche à droite. Aucun cas essentiellement différent des autres n'est exclu par cette supposition.

[2]) Voici cette Proposition des „Éléments" d'Euclide: „Si recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato" (Clavius, p. 183).

[3]) Il s'agit des divers cas représentés dans la Fig. 17.

qu'ils ont en commun la hauteur, le quadruple du rectangle BCD eſt au quadruple du rectangle ACD, qui était égal à la différence des carrés AD et AE comme BC eſt à AC. Donc la différence des carrés BE et BD eſt à la différence des carrés AD et AE comme BC à AC. Par conſéquent, le produit de la différence des carrés AD et AE par la droite BC, ou, ce qui revient au même, la différence des ſolides conſtitués par BC ſur le carré AD et par BC sur le carré AE, eſt égal au produit de la différence des carrés BE et BD par la droite AC, ſavoir à la différence des ſolides ſur le carré BE par AC et ſur le carré BD par AC.

Mais toujours lorsque le carré AD ſurpaſſe le carré AE ou lui eſt inférieur, le carré BE lui auſſi ſurpaſſe reſpectivement le carré BD ou eſt excédé par lui. Il paraît donc que le ſolide conſtitué par BC ſur le carré AD excède autant ou eſt autant ſurpaſſé par le ſolide conſtitué par BC ſur le carré de AE que le ſolide conſtitué par AC ſur le carré BE, excède ou eſt reſpectivement ſurpaſſé par celui conſtitué par AC ſur le carré BD: ce qu'il fallait démontrer.

Lemme I [1]).

Soit la droite AB [Fig. 18] diviſée en C et D de ſorte que le ſegment AC eſt moindre que CD et CD moindre que BD; je dis que le rectangle ſur AD et CB eſt moindre que le double de la ſomme des deux rectangles ACD et CDB [2]).

Décrivons ſur le ſegment CD le carré CGND, et prolongeons CG jusqu'en E de ſorte que GE ſoit égale à CA et complétons le rectangle ECBF et prolongeons

---

[1]) Ce Lemme et le suivant servent à préparer la démonstration de la Prop. XII qui suit.

[2]) Posons $CD = a$, $AC = a - e$, $DB = a + f$, où a, e et f sont des grandeurs positives et $a > e$. Il s'agit alors de démontrer l'inégalité:

$$(2a - e)(2a + f) < 2\,[a(a - e) + a(a + f)],$$

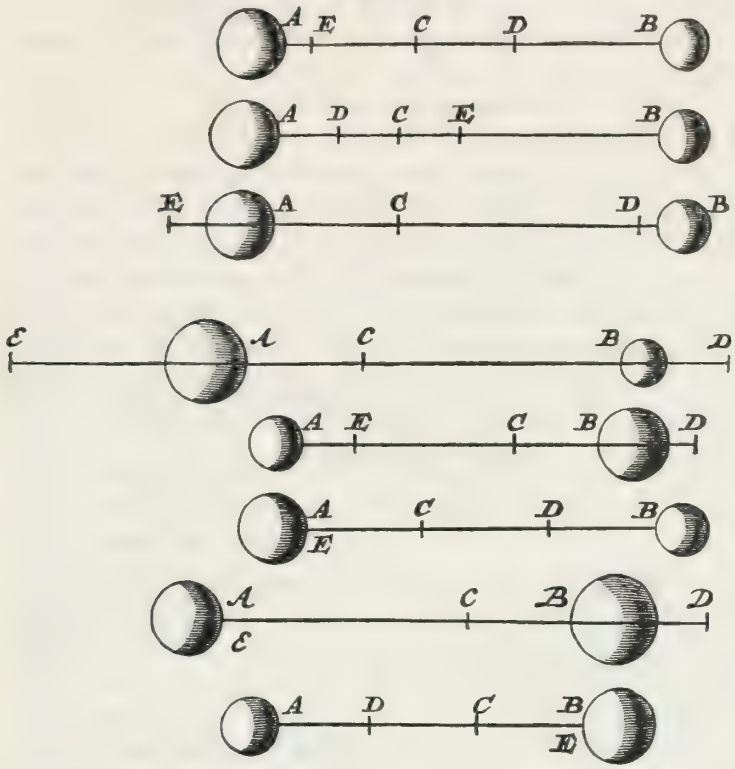
dont la vérification est facile.

Remarquons que le Lemme reste valable lorsqu'on a $AC > CD > BD$ puisqu'en invertissant l'ordre des segments le premier rectangle ne change pas et que les deux autres rectangles dont il est question dans le Lemme échangent leurs valeurs. Comparez à ce propos la note 3 de la p. 82.

[3]) Dans le Manuscrit Huygens remplaça ici „absolvatur" par „perficiatur".

ex quadrato AE in BC, æquale eſt ei quod fit ex differentiâ quadratorum BE, BD in rectam AC, hoc eſt, differentiæ ſolidorum ex quadrato BE in AC, & ex quadrato BD in AC.

[Fig. 17.]



Semper autem cum quadratum AD ſuperat vel deficit a quadrato AE, etiam quadratum BE ſimul ſuperat vel exceditur a quadrato BD. Ergo apparet ſolidum ex quadrato AD in BC, ſemper tantum excedere vel ſuperari ab eo quod fit ex quadrato AE in BC, quantum id quod ex quadrato BE in AC, ſimul excedit vel ſuperatur ab eo, quod ex quadrato BD in AC: quod erat demonſtrandum. |

Lemma I [1]).

p. 392. Recta AB [Fig. 18] ſecta ſit in C & D ita ut ſegmentum AC minus ſit quam CD, & CD minus quam BD. Dico rectangulum ex AD, CB minus eſſe quam duplum utriusque ſimul rectanguli ACD, CDB [2]).

Deſcribatur ſuper ſegmentum CD quadratum CGND, & producatur CG usque in E, ut GE ſit æqualis CA, & perficiatur [3]) rectangulum ECBF [4]), &

---

[4]) On lisait primitivement „CF" mais Huygens ajouta le „E" et le „B".

DN jusqu'à K et GN jusqu' à H. Puisque donc CG eſt égale à CD et GE à AC, la droite entière CE ſera égale à AD. Ainſi le rectangle CF eſt celui qui eſt conſtruit ſur AD et CB. Mais le rectangle EN eſt égal au rectangle ACD, et le rectangle NB au rectangle CDB, il faut donc montrer que le rectangle CF eſt moindre que le double de la ſomme des rectangles EN et NB; faiſons GL égale à GE, et menons LM parallèle à AB, Or, puisque GL eſt moindre que GC (car GE ou AC eſt moindre que CD), LM tombera entre GH et CB.

D'ailleurs, puisque CD eſt moindre que DB, le rectangle LD ſera moindre que le rectangle DM. Mais LN eſt égal au rectangle NE et le rectangle NM eſt égal au rectangle NF et par ſuite la ſomme des rectangles LN et NF eſt égale à la ſomme de NE et NM. Si donc on ajoute aux quantités égales des quantités inégales, ſavoir aux rectangles LN et NF le rectangle LD et aux rectangles NE, NM le rectangle MD, ce qui eſt compoſé de ceux-là, c'eſt-à-dire le carré CN avec le rectangle NF ſera moindre que ce qui eſt compoſé de ceux-ci, c'eſt-à-dire le rectangle NB avec le rectangle NE: d'où il ſuit que ce qui eſt compoſé de toutes ces quantités enſemble, ſavoir le rectangle CF, doit être moindre que le double des rectangles NB et NE; ce qu'il fallait démontrer.

Lemme II.

Soient AB, AC, AD [Fig. 19] trois droites proportionnelles, dont AB eſt la plus grande et ajoutons à chacune d'elles la même longueur AE. Je dis que le rectangle ſur BE et DE eſt plus grand que le carré CE [2]).

[Fig. 19.]

En effet, puisque AB, AC, AD, ſont proportionnelles, l'excès BC ſera à l'excès CD comme BA eſt à AC, ou comme CA eſt à AD. Mais le rapport de CA à AD eſt plus grand que CE à ED, donc auſſi BC à CD eſt plus grand que CE à ED, et, par permutation, le rapport de BC à CE eſt plus grand que CD à DE et, par compoſition, le rapport de BE

---

[1]) Huygens intercala après coup „ſive AC".

[2]) Posant AB $= a$, AD $= b$, AE $= f$, il s'agit donc de démontrer pour $a > b$ la relation:

$$(a+f)(b+f) > (\sqrt{ab}+f)^2,$$

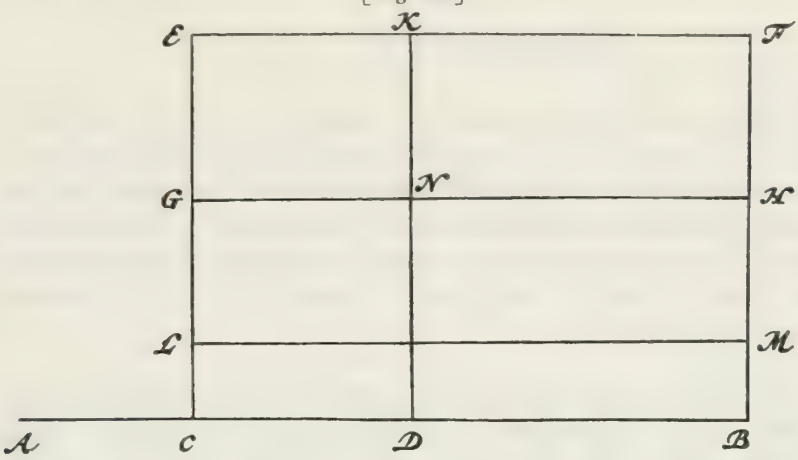
ce qui est facile puisqu'elle conduit immédiatement à l'inégalité bien connue:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab},$$

pour $a \neq b$.

producantur DN in K, & GN in H. Quoniam igitur CG eſt æqualis CD, & GE æqualis AC, erit tota CE æqualis AD. Itaque rectangulum CF eſt id quod ſub AD, CB continetur. Rectangulum vero EN æquale rectangulo ACD, & rectangulum NB, æquale rectangulo CDB; oportet igitur oſtendere quod rectangulum CF minus eſt quam duplum utriusque ſimul rectanguli EN, & NB; ſumatur GL æqualis GE, & agatur LM parallela AB; quia autem minor eſt GL quam GC (nam GE ſive AC [1]) minor eſt quam CD) cadet LM inter GH & CB.

[Fig. 18.]



Jam quia CD minor eſt quam DB, erit rectangulum LD minus quam rectangulum DM. At LN æquale eſt rectangulo NE, & rectangulum NM æquale eſt rectangulo NF, ideoque duo ſimul rectangula LN & NF æqualia duobus NE & NM, itaque ſi æqualibus inæqualia addantur, nimirum rectangulis LN & NF, rectangulum LD, & rectangulis NE, NM, rectangulum MD, fiet quod ex illis componitur nempe quadratum CN cum rectangulo NF minus quam quod ex his componitur, nempe rectangulum NB cum rectangulo NE: unde quod ex omnibus ſimul componitur, hoc eſt, rectangulum CF minus apparet eſſe quam duplum rectangulorum NB & NE; quod erat oſtendendum. |

p. 393.

Lemma II.

Sint tres proportionales rectæ AB, AC, AD [Fig. 19], quarum major AB, omnibusque adjiciatur eadem longitudo AE. Dico rectangulum ex BE, DE, majus eſſe quadrato CE [2]).

Quia enim proportionales ſunt AB, AC, AD, erit quoque exceſſus BC ad exceſſum CD, ſicut BA ad AC, ſive ut CA ad AD. Major autem eſt ratio CA ad AD, quam CE ad ED, itaque major quoque BC ad CD, quam CE ad ED; &, permutando, major ratio BC ad CE quam CD ad DE; &, componendo,

à EC eſt donc plus grand que CE à ED : par conſéquent, le rectangle ſur BE et ED eſt plus grand que le carré de CE, ce qui était propoſé.

Proposition XII [1]).

Si quelque corps ſe meut vers un plus grand ou un plus petit qui eſt en repos, il lui donnera une plus grande viteſſe par le moyen d'un corps interpoſé de grandeur intermédiaire, de même en repos, que s'il ſe heurte contre lui ſans aucun intermédiaire. Et dans ce cas il lui communiquera une viteſſe maximum lorsque le corps interpoſé eſt moyen proportionnel entre les deux extrêmes [2]).

Que le corps A [Fig. 20] ſe meuve vers le corps C en repos et ſoit A plus grand ou plus petit que ce C, et qu'entre les deux ſoit poſé un corps B en repos et de grandeur intermédiaire : de ſorte que A pouſſe d'abord B et que B enſuite pouſſe C; je dis que C acquiert ainſi une plus grande viteſſe que ſi A l'eût rencontré directement.

Que le rapport qu'ont entre eux les corps A, B, C ſoit auſſi le rapport qu'aient les droites DE, EH, HK et que LP ſoit la viteſſe du corps A, dont le double ſoit LQ; ſi donc comme la ſomme de DE et EH à DE on fait LQ à MR, MR ſera la

---

[1]) Huygens mentionne cette Proposition et sa démonstration dans une lettre à Claude Mylon du 6 juillet 1656; voir la p. 448 de notre T. I.

Dans le Manuscrit elle est comptée la onzième; comparez la note 1 de la p. 72.

[2]) Soit v_A la vitesse avec laquelle le corps A de masse m_A se meut avant le choc avec les corps B ou C de masses m_B et m_C, v'_B celle acquise par B après le choc, v''_C celle que B communique à C après le second choc; soit enfin v'_C la vitesse que C acquiert s'il est choqué directement par A sans l'intervention du corps B.

On trouve alors en appliquant la deuxième formule de la note 1 de la p. 67.

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A, \quad v''_C = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)}, \quad v'_C = \frac{2m_A}{m_A + m_C} v_A.$$

On a donc :

$$\frac{v''_C}{v'_C} = \frac{2m_B(m_A + m_C)}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)} = 1 + \frac{(m_A - m_B)(m_B - m_C)}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)},$$

valeur plus grande que l'unité toutes les fois que m_B est intermédiaire en grandeur entre m_A et m_C.

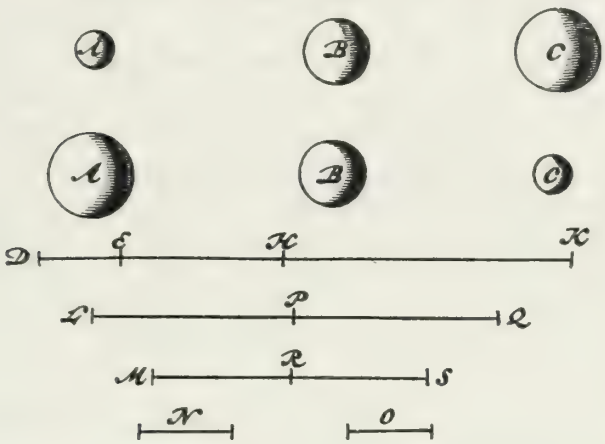
Quant au rapport maximum de v''_C à v'_C on l'obtient facilement en écrivant :

major igitur ratio BE ad EC quam CE ad ED: Quamobrem rectangulum ex BE, ED, majus quadrato ex CE quod erat propositum.

Propositio XII [1])

Si quod corpus majori vel minori quiescenti obviam pergat, majorem ei celeritatem dabit per interpositum corpus mediæ magnitudinis itidem quiescens quam si nullo intermedio ipsi impingatur. Maximam vero celeritatem tum conferet, quum corpus interpositum fuerit medium proportionale inter extrema [2]).

[Fig. 20.]



Moveatur corpus A [Fig. 20] versus C quod quiescat, sitque A majus vel minus ipso C, atque inter utrumque medium ponatur corpus B immotum, & mediocris magnitudinis; ita ut A primum impellat B, B vero deinde impellat C dico majorem motum sic acquiri corpori C, quam si simpliciter ei occurrisset A.

Quam rationem inter se habent corpora A, B, C, eandem habeant rectæ DE, EH, HK, sitque LP celeritas corporis A, cu | jus
p. 394. dupla sit LQ; si igitur fiat sicut utraque simul DE, EH ad DE, ita LQ, ad MR;

$$\frac{v''_C}{v'_C} = \frac{2m_B(m_A + m_C)}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)} = \frac{2(m_A + m_C)}{m_A + m_C + 2\sqrt{m_A m_C} + \left(\sqrt{m_B} - \frac{\sqrt{m_A m_C}}{\sqrt{m_B}}\right)^2}.$$

Il est donc atteint pour $m_B = \sqrt{m_A m_C}$. Notons encore qu'alors, posant $m_C = \varepsilon m_A$, on trouve:

$$v''_C\,(\text{max.}) = \frac{4}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2}\, v'_A.$$

Ajoutons qui le premier alinéa (p. 153) de la Pièce III de l'Appendice III nous fait connaître la manière dont la formule pour m_B a été obtenue par Huygens.

* Prop. IX. viteſſe acquiſe par le corps B en repos lorsqu'il eſt pouſſé par A *. Soit MS le double de MR. Si donc, de nouveau, comme la ſomme de EH et HK à EH ainſi MS ſoit à N, N ſera la viteſſe du corps C après qu'il a été pouſſé par B avec la
* Prop. IX. viteſſe MR *. Mais ſi, comme la ſomme de DE et HK à DE ainſi LQ eſt à O, O ſera la viteſſe cherchée du corps C lorsqu'il eſt pouſſé par le corps A avec la viteſſe LP. Il faut donc démontrer que la viteſſe N eſt plus grande que O.

Le rapport de LQ à N eſt compoſé des rapports de LQ à MR et de MR à N. Or, le rapport de LQ à MR eſt le même que le rapport de HD à DE. Et le rapport de MR à N le même que celui de KE au double de EH. Car, comme KE à EH, ainſi eſt SM à N; par ſuite, KE eſt au double de EH comme SM à 2N, c'eſt-à-dire comme RM à N. Donc le rapport de LQ à N ſe compoſera des rapports de HD à DE et de KE au double de EH et il ſera, par conſéquent, celui du rectangle ſur HD et KE au double du rectangle DEH. Mais le rapport de LQ à O eſt, par conſtruction, celui de la ſomme de DE et HK à DE, c'eſt-à-dire, en prenant EH pour la hauteur commune, celui de la ſomme des rectangles DEH et EHK au rectangle DEH, ou du double de cette ſomme au double du rectangle DEH. Mais le rectangle ſur HD et KE eſt moindre que le double des rectangles
* Lemme I [3]). DEH, EHK *. Donc le rapport du rectangle ſur HD et KE au double du rectangle DEH ſera moindre que celui des rectangles DEH, EHK pris deux fois au double du même rectangle DEH. Mais nous avons dit que le rapport du rectangle ſur HD et KE au double du rectangle DEH eſt celui de LQ à N. Et le rapport du double des rectangles DEH, EHK au double du rectangle DEH a été dit être celui de LQ à O. Donc le rapport de LQ à N ſera moindre que celui de LQ à O, et, par ſuite, N plus grand que O.

Soit maintenant B moyen proportionnel entre A et C; je dis que dans ce cas la plus grande viteſſe de toutes ſera donnée au corps C [4]).

En effet ſoit dit, s'il eſt poſſible, qu'étant interpoſé au lieu du corps B d'abord un corps X [Fig. 21] plus grand (de ſorte que A pouſſe X et X pouſſe C) le corps C ait acquis ainſi une plus grande viteſſe que lorsque B aurait été interpoſé [5]).

---

[1]) Ce qui suit dans cette ligne et les suivantes jusqu'aux mots „simul DE, HK ad" y compris, fut intercalé en marge par Huygens dans le Manuscrit; évidemment il ne s'agissait que de corriger une inadvertance du copiste, comme cela résulte aussi de la comparaison avec le Manuscrit d'environ 1656.

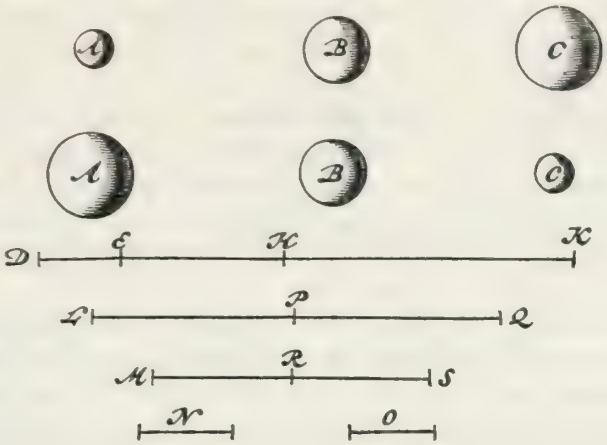
[2]) Ce mot fut intercalé de la main de Huygens dans les mêmes circonstances.

[3]) Huygens applique ici le lemme aux deux cas DE < EH < EK, c'est-à-dire A < B < C, et DE > EH > EK (A > B > C) quoiqu'il ne l'ait formulé et prouvé que pour le premier de ces cas (voir les p. 77—79); mais comparez le dernier alinéa de la note 2 de la p. 76.

[4]) Comparez pour une démonstration algébrique les deux derniers alinéas de la note 2 de la p. 80.

erit MR, celeritas acquiſita corpori quiescenti B cum pellitur ab A. * Sit MS dupla ipſius MR. Rurſus igitur ſi ſit, ut utraque ſimul EH, HK ad [1]) EH ita MS ad N, erit N celeritas corporis C poſtquam impulſum eſt ab B celeritate MR. * Si vero ut utraque ſimul DE, HK ad DE ita ſit LQ ad O, erit O celeritas corporis C quæſita ſi pellatur a corpore A celeritate LP. Itaque demonſtrandum eſt majorem eſſe celeritatem N quam O. * Prop. IX. * Prop. IX.

[Fig. 20.]



Ratio LQ ad N compoſita eſt ex rationibus LQ ad MR & MR ad N. Ratio autem LQ ad MR eadem eſt rationi HD ad DE. Et ratio MR ad N eadem rationi KE ad duplam EH. Eſt enim ut KE ad EH, ita SM ad N, unde KE ad duplam [2]) EH ut SM ad 2N, hoc eſt, ut RM ad N. Ergo ratio LQ ad N componetur ex rationibus HD ad DE, & KE ad duplam EH, ac proinde erit ea quæ rectanguli HD, KE ad duplum rectangulum DEH. Ratio autem LQ ad O eſt ea quam habet utraque ſimul DE, HK ad DE, ex conſtructione, hoc eſt, ſumpta communi altitudine EH, quam habent utraque ſimul rectangula DEH, EHK, ad rectangulum DEH, vel quam illa bis ſumpta ad duplum rectangulum DEH. Eſt autem rectangulum HD, KE, minus quam duplum rectangulorum DEH, EHK *. Ergo minor erit ratio rectanguli HD, KE, ad duplum rectangulum DEH, quam rectangulorum DEH, EHK, bis ſumptorum, ad idem duplum rectangulum DEH. Quam autem rationem habet rectangulum HD, KE ad duplum rectangulum DEH, eam dictum eſt habere LQ ad N. Et quam rationem habet duplum rectangulorum DEH, EHK, ad duplum rectangulum DEH, eam dictum eſt habere LQ ad O. Igitur minor erit ratio LQ ad N quam LQ ad O, ac proinde N major quam O. | * Lemm. I [3]).

p. 395. Eſto jam B proportione medium inter A & C, dico hac ratione maximam omnium celeritatum corpori C collatum iri [4]).

Nam, ſi fieri poteſt, interpoſito primum loco B, corpore majori X [Fig. 21], ita ut A pellat X, X autem pellat C, dicatur major ſic celeritas acquiri corpori C, quam ſi interponatur B [5]). Et ſicut A ad X, ita ſit DE ad ET. Ergo ET

---

[5]) Huygens semble donc vouloir donner à sa démonstration la forme d'une réduction à l'absurde; mais il abandonne ensuite cette idée pour démontrer directement que la vitesse acquise par

Or, comme A à X, ainſi ſoit DE à ET. Donc ET eſt plus grand que EH, ſuppoſant bien entendu que comme précédemment les proportionnelles DE, EH, HK ſont dans le même rapport que les corps A, B, C. Mais ſoit VE la troiſième proportionnelle aux deux lignes TE et HE, et ſoit trouvée enſuite, comme dans ce qui précède, la viteſſe N acquiſe par le corps C par l'intermédiaire du corps B. Et de la même manière ſoit trouvée la viteſſe acquise par le même corps C par l'intermédiaire de X *. Savoir, ſi l'on fait comme la ſomme de A et X à A, c'eſt-à-dire, comme la ſomme de DE, ET à DE ainſi LQ [1]) à IY, IY ſera la viteſſe imprimée au corps X par la pouſſée de A: d'où de nouveau ſi l'on fait comme la ſomme de X et C à X, c'eſt-à-dire comme la ſomme de ET et HK à ET ainſi le double de IY, ſoit ZY, à G: G ſera la viteſſe cherchée du corps C. Il faut donc montrer que N est plus grande que G.

* Prop. IX.

Le rapport de LQ à N ſera démontré, comme précédemment [2]), être compoſé des rapports de HD à DE et de KE au double de HE; mais comme KE eſt au double de HE ainſi HD eſt au double de ED, parce que KH, HE et ED ſont proportionnelles. Donc le rapport de LQ à N ſe compoſera cette fois des rapports de HD à DE et de HD au double de DE: il ſera donc le même que celui du carré HD au double du carré DE. Mais le rapport de LQ à G eſt compoſé des rapports de LQ à IY et de IY à G, dont le rapport de LQ à IY eſt le même que celui de TD à DE, par conſtruction, mais le rapport de IY à G eſt le même que celui de la ſomme de KH et TE au double de TE, car, par conſtruction, ZY eſt à G comme la ſomme de KH et TE eſt à TE, par ſuite, en doublant les ſeconds termes des rapports, ZY ſera au double de G, ou IY à G, comme la ſomme de KH et TE au double de TE, comme nous l'avons dit. Par conſéquent, le rapport de LQ à G ſe compoſe des rapports de TD à DE et de la ſomme de KH et TE au double de TE: mais, puisque DE, EH, HK ſont proportionnelles, le rectangle ſur DE et HK eſt égal au carré EH. D'ailleurs le rectangle ſur EV et ET eſt auſſi égal à ce même carré EH, parce que EV, EH, ET ſont proportionnelles. Par conſéquent le rectangle ſur DE et HK eſt égal au rectangle ſur EV et ET. D'où il ſuit que VE eſt à ED comme HK à ET, et, par compoſition, que VD eſt à DE comme la ſomme de KH et TE à TE, et, en doublant les ſeconds termes, VD eſt au double de DE

l'intermédiaire du corps B excède celle qu'on obtiendrait par l'interposition de tout autre corps X plus grand que B.

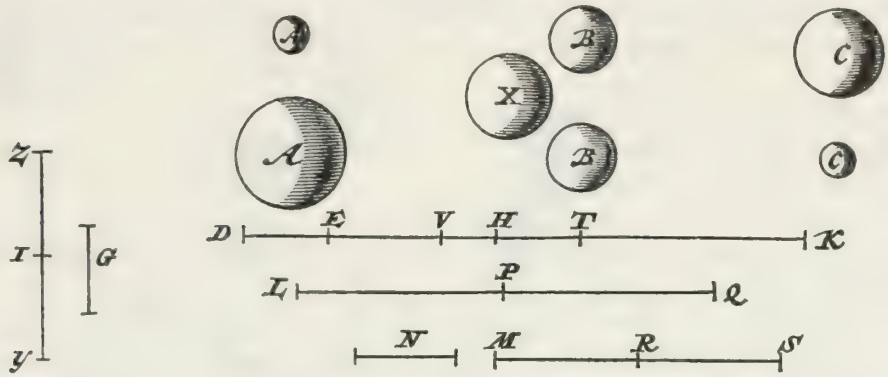
[1]) LQ représente, comme dans la Fig. 20 (p. 81), le double de la vitesse initiale du corps A.

[2]) Voir le deuxième alinéa de la p. 83.

[3]) Ce mot fut intercalé par Huygens pour corriger une inadvertance du copiste; comparez la note 1 de la p. 82.

major quam EH; positis videlicet, sicut ante, proportionalibus DE, EH, HK, in eâdem ratione quæ est corporum A, B, C. Sit autem duabus TE, HE tertia pro-

[Fig. 21.]

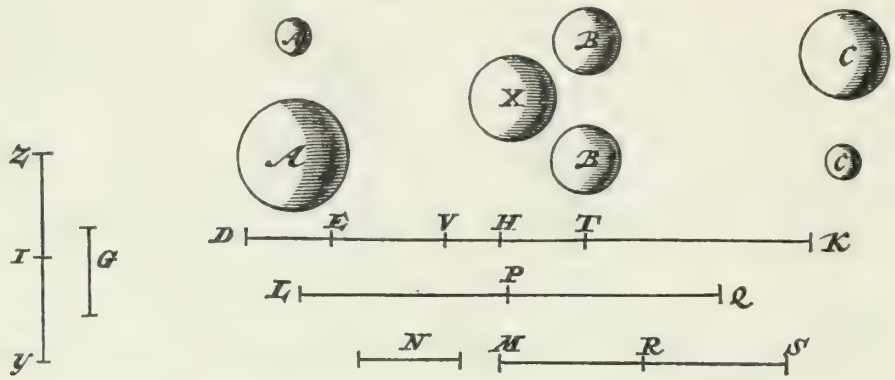


portionalis VE: atque inveniatur porro, sicuti in præcedentibus, celeritas N corpori C acquisita per interpositum B. Similique ratione inveniatur, celeritas quæ eidem C acquiretur per interpositum X *. Nempe si fiat ut utrumque simul A & X ad X, hoc est, ut utraque simul DE, ET ad DE, ita LQ [1]) ad IY, erit IY celeritas impressa corpori X impellente A: unde rursus si fiat ut utrumque simul X & C ad X, hoc est, ut utraque simul ET, HK ad ET ita dupla IY quæ sit ZY ad G; erit G celeritas quæsita corpori C. Quamobrem ostendendum est N majorem esse quam G. * Prop. IX.

Ratio LQ ad N, sicut antea [2]), componi ostendetur ex rationibus HD ad DE, & KE ad duplam HE; est autem sicut KE, ad duplam HE, ita HD ad duplam ED, quia proportionales KH, HE, ED. Igitur ratio LQ ad N componetur jam ex rationibus HD ad DE, & HD ad duplam DE: ac propterea erit eadem quæ quadrati HD ad duplum quadrati DE. Ratio autem LQ ad G compônitur ex rationibus LQ ad IY & IY ad G, quarum ratio LQ ad IY est eadem quæ TD ad DE ex constructione, ratio autem IY ad G eadem quæ utriusque simul KH, TE ad duplam [3]) TE; etenim ex constructione est sicut utraque simul KH, TE ad TE,
p. 396. ita ZY ad G, | ideoque, sumptis consequentium duplis, sicut duæ KH, TE, ad duplam TE, ita ZY ad duplam G, sive IY ad G, uti dictum fuit: itaque ratio LQ ad G componitur ex rationibus TD ad DE, & duarum simul KH, TE ad duplam TE: quia vero proportionales sunt DE, EH, HK, erit rectangulum DE, HK æquale quadrato EH. Sed & rectangulum EV, ET eidem quadrato EH æquale est, quoniam proportionales EV, EH, ET. Igitur rectangulum DE, HK æquale rectangulo EV, ET. Unde sicut VE ad ED ita HK ad ET, & componendo, sicut VD ad DE, ita utraque simul KH, TE ad TE; &, sumptis consequentium duplis, sicut VD ad duplam DE, ita duæ KH, TE ad duplam TE. Itaque ratio LQ ad G

comme la ſomme de KH et TE eſt au double de TE. Donc le rapport de LQ à G ſe compoſe des rapports de TD à DE et de VD au double de DE. Il eſt, par ſuite,

[Fig. 21.]



le même que celui du rectangle TDV au double du carré DE. Mais le rapport de LQ à N a été montré être le même que celui du carré HD au double du carré DE. Donc, puisque le rectangle TDV eſt plus grand que le carré HD, par le Lemme II (car TE, HE et VE ſont proportionnelles et la longueur ED eſt ajoutée à elles), il s'enſuivra que le rapport de LQ à G eſt plus grand que celui de LQ à N et que par ſuite N eſt plus grande que G, ce qu'il fallait démontrer.

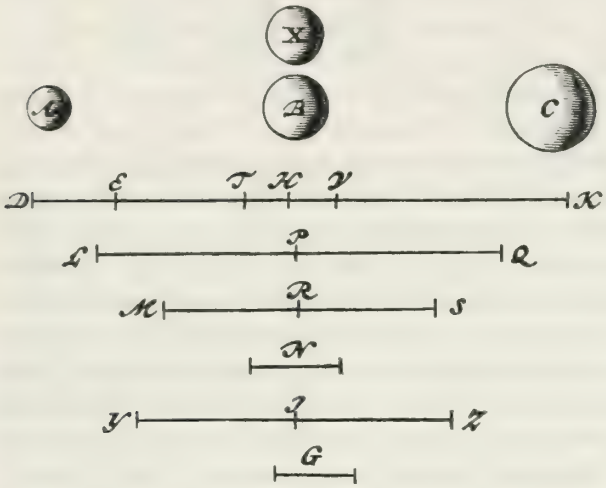
Qu'il ſoit dit enſuite qu'en interpoſant un corps X moindre que B une plus grande viteſſe ſerait acquiſe par le corps C [1]). Soit de nouveau comme A à X ainſi DE à ET [Fig. 22]. Donc puisque X eſt ſuppoſé moindre que B, ET ſera également moindre que EH, car, comme A à B, ainſi DE eſt à EH. Mais pour le reſte qu'on répète la conſtruction et la démonſtration appliquées tantôt, par laquelle de nouveau la viteſſe N ſera montrée être plus grande que G. Il eſt donc certain que la viteſſe maximum ſera acquiſe par le corps en repos C lorsqu'on interpoſe le corps B qui eſt moyen proportionnel entre A et C.

Proposition XIII [2]).

À meſure qu'un plus grand nombre de corps ſont interpoſés entre deux corps inégaux, dont l'un ſoit en repos, et l'autre en mouvement, un plus grand mouvement pourra être communiqué au corps en repos. Mais le plus grand mouvement ſera transmis par un même nombre de corps interpoſés lorsque ces corps conſtituent avec les deux extrêmes une ſuite continue de grandeurs proportionnelles.

componitur ex rationibus TD ad DE & VD ad duplam DE, ac proinde eſt eadem quæ rectanguli TDV ad duplum quadratum DE. Ratio autem LQ ad N oſtenſa eſt eadem quæ quadrati HD ad duplum quadratum DE. Itaque cum rectangulum TDV majus ſit quam quadratum HD, per lemma II. (ſunt enim proportionales TE, HE, VE, quibus adjecta eſt longitudo ED) ſequetur majorem eſſe rationem LQ ad G quam LQ ad N; adeoque majorem eſſe N quam G, quod erat oſtendendum.

[Fig. 22.]



Dicatur deinde interpoſito corpore X [Fig. 22] minori quam B, acquiri majorem celeritatem corpori C [1]). Sit rurſus ut A ad X ita DE ad ET. igitur quia jam minor ponitur X quam B, erit quoque ET minor quam EH, nam, ſicut A ad B, ita eſt DE ad EH. De cætero autem eadem repetatur conſtructio & demonſtratio quæ modo adhibita fuit, quâ quidem rurſus celeritas N major oſtendetur quam G. Itaque conſtat maximam celeritatem acquiri corpori quiescenti C per interpoſitionem corporis B quod ſit medium proportionale inter A & C.|

p. 397. PROPOSITIO XIII [2]).

Quo plura corpora interponentur inter duo inæqualia, quorum alterum quiescat alterum moveatur, eo major motus quiescenti conciliari poterit. Maximus autem per unam quamque interpoſitorum multitudinem ita conferetur, ſi interpoſita cum extremis continuam proportionalium ſeriem conſtituant.

Sint proportionalia corpora A, B, C [Fig. 23], e quibus A moveatur reliqua duo quiescant; itaque maximus motus acquirendus corpori C per unius corporis

[1]) Comparez la note 5 de la p. 83.

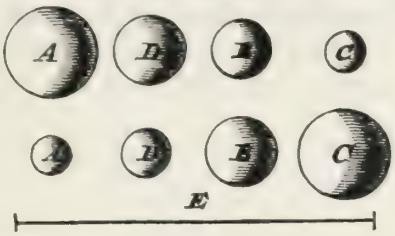
[2]) Elle est comptée la douzième dans le Manuscrit; comparez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 80.

Soient A, B, C [Fig. 23] les corps proportionnels, dont A ſoit en mouvement, les deux autres en repos, le plus grand mouvement que peut acquérir le corps C par l'interpoſition d'un ſeul corps eſt donc celui effectué par l'interpoſition de
* Prop. XII. B*. Mais que par l'interpoſition de deux corps un mouvement plus grand encore peut être effectué paraîtra comme ſuit. En effet, ſi entre A et B eſt interpoſé le moyen proportionnel D, le corps B acquiert déjà un plus grand mouvement que s'il fût ſimplement pouſſé par le corps A; mais à meſure que la viteſſe de B eſt plus grande, celle produite en C ſera auſſi plus grande. Donc C ſera mû plus fortement par les corps interpoſés D, B, que par B ſeul. Mais ſi enſuite au lieu de de B un autre corps eſt introduit qui ſoit moyen proportionnel entre D et C, il eſt évident qu'un mouvement encore plus grand ſera transmis à C que par les corps interpoſés D, B. Après cela on montrera comme ſuit que le plus grand mouvement eſt transmis au corps extrême par l'interpoſition de deux corps lorsque A, D, B, C ſont en proportion continue. D'abord il eſt certain que la viteſſe du corps C ne peut pas croître indéfiniment par l'interpoſition de deux corps; car la viteſſe
* Prop. VII. de D ſera toujours moindre que le double de la viteſſe A*. De même la viteſſe B ſera toujours moindre que le double de la viteſſe D et la viteſſe acquiſe par le corps C moindre que le double de la viteſſe B; de ſorte que la viteſſe C ſera certainement moindre que huit fois la viteſſe A. On voit donc, par ce qui précède, qu'il exiſte une certaine viteſſe que le corps C ne peut pas dépaſſer par l'interpoſition de deux corps. Soit E cette viteſſe que nous ſuppoſons être acquiſe de fait par le corps C, les corps D, B étant interpoſés entre lui et A; je dis que A, D, B, C ſont en proportion continue. Car, en premier lieu, ſi les trois A, D, B ne ſont pas proportionnels, il faudra qu'en ſubſtituant pour le corps D un autre qui ſoit moyen proportionnel entre A et B, un plus grand mouvement paſſe en B que par l'interpoſition de D et, par conſéquent, C acquiert une plus grande viteſſe que par l'interpoſition de D, B, c'eſt-à-dire plus grande que la viteſſe E, ce qui eſt abſurde, parce qu'il a été ſuppoſé que E fut la plus grande viteſſe que le corps C pût acquérir par l'interpoſition de deux corps. De même ſi D, B, C ne ſont pas proportionnels, on pourra mettre au lieu de B un autre corps moyen proportionnel entre D et C, d'où il reſſortira que de nouveau le corps C obtiendrait une viteſſe plus grande que par l'interpoſition de D, B, c'eſt-à-dire, plus grande que la viteſſe E, ce qui eſt abſurde pour la même raiſon. Par ſuite, puisque auſſi bien A, D, B que D, B, C ſont proportionnels, tous les corps A, D, B, C ſeront en proportion continue, ce qu'il fallait démontrer. Or, on pourra dès lors démontrer par le même raiſonnement qu'en interpoſant entre A et C trois corps on peut communiquer au corps C un plus grand mouvement encore que lorsque ſeulement deux corps furent interpoſés, et ainſi de ſuite. Et par une argumentation pareille on montrera que le corps C obtient la plus grande viteſſe lorsque tous les corps ſont dans une proportion continue [1]). La propoſition eſt donc démontrée.

interpoſitionem eſt ille qui efficitur per interpoſitum B *. Quod autem ope duorum interpoſitorum major adhuc effici poſſit hinc conſtabit. Etenim ſi inter A & B medium proportionale interponatur D, major jam motus acquiritur corpori B quam ſi ſimpliciter a corpore A fuiſſet percuſſum; quo autem major eſt celeritas in B, eo & major inducetur in C. Igitur C magis movebitur per interpoſita corpora D, B, quam per ſolum B. Quod ſi vero in locum B aliud poſtea conſtituatur quod ſit medium proportionale inter D & C, evidens eſt adhuc majorem motum in C tranſiturum, quam per interpoſita D B corpora. Porro quod maximus motus per interpoſitionem duorum corporum corpori extremo concilietur, cum A, D, B, C fuerint continue proportionalia, ſic oſtendetur. Principio conſtat celeritatem corporis C per interpoſita duo corpora non poſſe in quantumvis magnam excrescere; nam celeritas corporis D ſemper minor erit quam dupla celeritas A. * Item celeritas B ſemper minor erit quam dupla celeritas D & celeritas acquiſita corpori C ſemper minor erit quam dupla celeritas B. adeo ut minor ſaltem futura ſit celeritas C quam octupla celeritatis A. Itaque hinc intelligitur certam quandam celeritatem | exiſtere quâ major corpori C, per interpoſitionem duorum corporum, acquiri nequeat. Eſto ea celeritas E, quam quidem corpori C acquiſitam ponamus interpoſitis inter ipſum & A corporibus D, B dico A, D, B, C continue proportionalia eſſe. Etenim primo, ſi tria A, D, B non ſunt proportionalia, fiet ſubſtituendo corpus aliud pro corpore D, quod medium proportionale ſit inter A & B, ut major motus tranſeat in B quam per interpoſitum D. ac proinde etiam C majorem acquirit velocitatem, quam per interpoſita D, B, hoc eſt, majorem quam ſit velocitas E, quod abſurdum eſt, quia poſita fuit E maxima eſſe velocitas quam duorum corporum interpoſitione corpus C adipisci poſſet. Similiter ſi D, B, C non ſunt proportionalia, poterit in locum B aliud medium proportionale conſtitui inter D, C, quo fiet ut rurſus major acquiratur velocitas corpori C quam per interpoſita D B, hoc eſt, major velocitate E; quod eâdem ratione abſurdum eſt. Itaque quum & A, D, B & D, B, C ſint proportionales, erunt corpora omnia A, D, B, C in proportione continua, quod erat oſtendendum. Hinc vero jam eâdem ratione oſtendi poterit, interpoſitis inter A, C, tribus corporibus majorem adhuc motum corpori C tribui poſſe quam cum duo tantum interpoſita fuere, atque ita deinceps; ſimilique etiam argumentatione maximus motus corpori C acquiri oſtendetur cum omnium corporum continua eſt proportio [1]). Itaque conſtat propoſitum.

* Prop. XII.

[Fig. 23.]



* Prop. VII.

p. 398.

[1]) Dans ce cas, lorsque *n* représente le nombre des corps interposés on trouve, par des formules

Si [1]) l'on donne une rangée de cent corps dans la proportion de un à deux et que le mouvement commence par le plus grand on trouve en exécutant un calcul que nous ſupprimons, d'après la règle expoſée dans la neuvième [2]) propoſition, mais ſuivant ſa rédaction abrégée [3]), que la viteſſe du plus petit corps ſera à celle avec laquelle le plus grand fut mis en mouvement à peu près comme 14760000000 à 1 [4]). Or, ſi le mouvement commence par le plus petit corps la quantité de mouvement augmente dans l'univers [5]) à peu près dans le rapport de 1 à 4677000000000 [6]).

F I N.

---

analogues à celles de la note 2 de p. 80, pour la vitesse du dernier corps C l'expression:

$$v_C = \frac{2^{n+1}}{\left(1+\sqrt{\varepsilon}\right)^{n+1}} v_A, \text{ où } \varepsilon = m_C : m_A.$$

Ajoutons encore que, par les méthodes modernes bien connues, on trouve facilement que pour $n = \infty$ on a $v_C = v_A : \sqrt{\varepsilon}$ de sorte qu'alors toute l'énergie du corps A passe après les chocs dans le corps C.

Nous empruntons cette remarque à l'annotation 17, p. 72, de l'ouvrage: „Christian Huygens' nachgelassene Abhandlungen über die Bewegung der Körper durch den Stoss [und] über die Centrifugalkraft. Herausgegeben von Felix Hausdorff, Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1903." Cet ouvrage, qui constitue le N°. 138 d'„Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften," contient une traduction allemande du présent Traité de Huygens.

D'ailleurs il est facile de généraliser la remarque en question pour le cas où les masses consécutives ne forment pas précisément une suite géométrique, mais où leur différences successives sont toutes du même ordre de grandeur, savoir de l'ordre n^{-1}.

En effet les formules de la note 1 de la p. 67 montrent qu'alors après les chocs les vitesses du premier corps et de tous les corps intermédiaires seront de l'ordre n^{-1} et par suites leurs forces vives de l'ordre n^{-2}. La somme de ces forces vives, étant de l'ordre n^{-1}, s'approche donc, lorsque n augmente, indéfiniment de zéro et avec elle (puisque, d'après la Prop. XI, p. 73, il n'y a pas de force vive perdue dans les chocs des corps durs de Huygens) la différence entre $m_C v^2_C$ et $m_A v^2_A$.

[1]) Ce dernier alinéa manque entièrement dans le Manuscrit d'environ 1656, mentionné à la p. 10 de l'Avertissement qui précède. Il a probablement été composé beaucoup plus tard, peut-être en 1667. Nous en possédons, sur une feuille détachée, la rédaction originale, qui ne diffère pas du texte latin présent.

[2]) Le mot „nona" fut écrit de la main de Huygens.

[3]) Comparez la dernière phrase du premier alinéa de la p. 69 et les deux alinéas qui la suivent.

[4]) En vérité on trouve, en appliquant la formule de la note 1, qui commence à la page précé-

Si [1]) corpora centum ex ordine dentur in proportione duplâ, incipiatque motus a maximo, invenitur ſubducto calculo ad præceptum regulæ propoſitione nona [2]) traditæ ſed in compendium redactæ [3]), celeritas minimi ad celeritatem quâ movebatur maximum proxime ea quæ 14760000000 ad 1 [4]). Si vero a minimo motus incipiat augetur in univerſum [5]) motus quantitas ſecundum rationem proxime quæ 1 ad 4677000000000 [6]).

FINIS.

---

dente, pour le rapport en question: $\frac{2^{99}}{(1+\frac{1}{2})^{99}}$: 1, c'est-à-dire à peu près 2338500000000 : 1, comme on le donne aussi à la p. 72 de l'ouvrage mentionné dans la note citée. Voir pour la méthode de calcul suivie par Huygens la Pièce V (p. 156—158) de l'Appendice III et pour l'explication de l'erreur commise la note 2 de la p. 158.

[5]) Comparez la note 1 de la p. 49.

[6]) Considérons le cas de n corps interposés. La quantité de mouvement est d'abord $m_A v_A$. Après les chocs tous les corps, excepté le dernier, se meuvent dans une direction contraire à celle possédée primitivement par le premier et plus petit. Or, le dernier corps aura alors la vitesse $\frac{2^{n+1}}{(1+\sqrt{\varepsilon})^{n+1}} v_A$ (voir la note 1 de la p. 89) et par suite la quantité de mouvement $\frac{2^{n+1}\varepsilon}{(1+\sqrt{\varepsilon})^{n+1}} m_A v_A$. Puisque la somme algébrique des quantités de mouvement doit rester la même, on trouve donc facilement pour la somme des quantités de mouvement des autres corps prises dans la direction contraire: $\frac{2^{n+1}\varepsilon}{(1+\sqrt{\varepsilon})^{n+1}} m_A v_A -$ $- m_A v_A$ et pour la somme totale des valeurs absolues des quantités de mouvement après les chocs: $\frac{2^{n+2}\varepsilon}{(1+\sqrt{\varepsilon})^{n+1}} m_A v_A - m_A v_A$. Le rapport en question est donc celui de 1 à $\frac{2^{n+2}\varepsilon}{(1+\sqrt{\varepsilon})^{n+1}} - 1$. Dans le cas numérique traité par Huygens, on a $n = 98$, $\varepsilon = 2^{99}$ et l'on trouve donc 1 à $2(\frac{4}{3})^{99} - 1$, ou, comme dans le texte, environ 4677000000000 à 1.

Consultez sur la méthode suivie par Huygens pour arriver à ce résultat la Pièce V mentionnée dans la note 4 et surtout la note 2 de la p. 158.

APPENDICE I [1])

À L'OUVRAGE: „DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE".

[1652—1654.]

[Première Partie.] [2])

[1652.] [3])

1. Si duo corpora æqualia perfectè dura æque celeriter in contrarias partes mota, inter ſe colliderentur, unumquodque in eam partem unde venit reflecteretur nulla parte celeritatis amiſſa [4]).

[[5]) Si B eſſet duplum A [Fig. 1] et æque celeriter mota, in contrarias partes, collidantur, reſtabit B quietum, at A ſiniſtram verſus movebitur, duplicatâ priori celeritate.] falſum [6]).

[Fig. 1.]

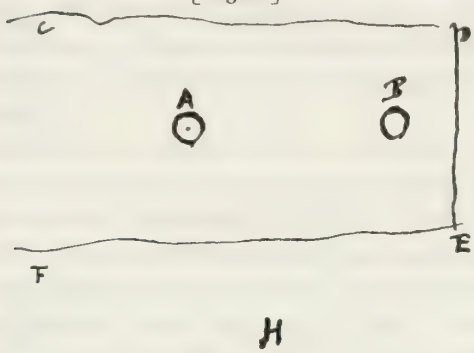
[dimidium enim corporis B, corpori A ſi occurrat, reflectetur ad dextram ea celeritate quâ venit, atqui altera medietas corporis B eadem celeritate pergere conatur ad ſiniſtram. itaque totum corpus B neceſſario neque in hanc neque in illam partem movebitur. Corpus autem A duplam celeritatem acquiret. nam ſi à corpore ſibi æquali hoc eſt à dimidio B impellatur eandem celeritatem acquirit ad ſiniſtram eundi quâ movebatur dextrorſum. at nunc impellitur a bis tanto corpore. Vel ſic. *Cum duo corpora ſibi mutuo occurrunt, eadem celeritas eſt eorum elongationis quæ acceſſus* [7]), (nam hoc unum tantum attendendum eſt quanta ſit colliſionis vis) igitur quum B maneat poſt colliſionem immotum, neceſſe eſt A duplo celerius retrocedere quam advenerat, ut æquali tempore æqualis fiat elongatio et acceſſus.]

---

[1]) Cet Appendice, que nous avons divisé en „Parties", contient les premières recherches de Huygens sur les lois de la percussion. Ces recherches se trouvent distribuées sur des feuilles détachées. Plus tard, à une époque inconnue, une pagination suivie fut apportée par Huygens lui-même qui les avait réunies dans deux couvertures sur lesquelles on lit

2. Si A et B ſint æqualia [Fig. 2] A autem quiescat: et B ad ipſum pergat. reſtabit B in loco concurſus immotum, at A movebitur ſiniſtram verſus, tanta celeritate quantam prius habuit B [8]).

[Fig. 2.]



Eadem erit vis colliſionis ac ſi B dimidia celeritate quam habet ſiniſtrorſum motum occurrat corpori A, eâdem dimidia celeritate moto dextrorſum. Itaque imaginemur hæc ita contingere in ſpatio CDEF. Sed hoc ipſum ferri interea ſiniſtram verſus eâdem quam diximus celeritate dimidiâ corporis B. quibus fiet ut reſpectu eorum qui extra ſpatium CDEF conſtituti ſunt ut H, videatur A quiescere et B moveri, ut

---

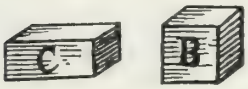
respectivement de sa propre main: „adversaria ad tractatum de motu per impulsum omnium prima" et „de motu per impulsum adversaria priora."

Quoiqu'il soit sûr que l'ordre de la pagination de Huygens ne coïncide pas toujours avec l'ordre chronologique, nous suivrons, faute de mieux, celle de la pagination à l'exception toutefois des cas où cela nous forcerait de séparer des parties qui évidemment font suite l'une à l'autre; consultez les notes 2, p. 104; 7, p. 107; 1, p. 108 et 8, p. 125.

[2]) Cette première Partie est empruntée à la page numérotée 1 par Huygens.

[3]) Voir pour la date des trois premières Parties les p. 6 et 7 de l'Avertissement.

[4]) C'est la première des règles de la percussion de Descartes, qu'il formule comme suit dans la „Pars secunda" de ses „Principia philosophiæ": „Primò, si duo illa corpora, puta B & C, essent planè æqualia, & æquè velociter moverentur, B quidem à dextrâ versus sinistram, & C illi in directum à sinistrâ versus dextram, cùm sibi mutuò occurrerent, reflecterentur, & postea pergerent moveri, B versus dextram & C versus sinistram, nullâ parte suæ celeritatis amissâ." (Voir la p. 68 du T. VIII, 1905, de l'édition nationale des Œuvres de Descartes).



On retrouve cette règle dans la deuxième des hypothèses énoncées (voir la p. 31 du Tome présent) dans le Traité „De Motu corporum ex percussione", lequel Traité nous mentionnerons dans la suite comme: Traité „De Motu".

[5]) Nous mettons entre crochets les phrases biffées par Huygens.

[6]) En effet Huygens fait ici fausse route en admettant ce théorème et la démonstration qui va suivre. Il s'en aperçoit et ne tarde pas à s'engager dans un tout autre chemin.

[7]) La phrase en italiques fut soulignée par Huygens. Il semble donc que dès le commencement de ses recherches il ait admis le principe en question qui constituera plus tard la „Prop. IV" du traité „De Motu", mais qu'il pourvoira alors d'une démonstration (voir la p. 43 du Tome présent).

[8]) C'est la „Prop. I" (p. 33) du Traité „De Motu" et la démonstration qui va suivre ne diffère pas essentiellement de celle donnée dans le Traité.

utrumque ab initio positum fuit. Itaque post collisionem ijs qui cum spatio [1]) CDEF una veherentur videbitur B dextrorsum reflecti, A vero sinistrorsum et utrumque cum dimidia celeritate ejus quam corpori B tribuimus respectu H. Sed quia eâdem dimidia celeritate navis posita est tendere sinistram versus, apparebit spectanti ex H, corpus B quiescere, at A moveri sinistrorsum ea celeritate qua prius movebatur B.

Axioma. [Quæ vis corpori quiescenti certam dat velocitatem, eadem corpori quod prioris duplum sit dimidium istius celeritatis conferre potis est. [2])]

Si A quiescat [Fig. 3] et B ipsi allidatur, sitque B quantumvis majus, non dabit corpori A velocitatem quæ sit dupla suæ, sed semper minorem [3]).

[Fig. 3.]

Necesse enim est corpora A et B post collisionem æque celeriter a se mutuo separari, atque prius accedebant. (atque hoc patebit si corpus B quiescere intelligatur, et A versus B moveri. paulum enim tantum movebit corpus B dextram versus, at A penè eadem celeritate quâ venit resiliet.) sed B corpori A occurrens paulum tantum de celeritate sua amittit et pergit sinistrorsum moveri, itaque necessario debebit A sinistrorsum moveri paulo minore quam dupla celeritate, ejus quam B habuit ab initio. nempe ut eadem sit separationis celeritas post duorum corporum occursum, quæ fuit appropinquandi.

[Deuxième Partie.] [4])

[1652.]

Ax. 1. [Eadem est celeritas separationis post duorum corporum concursum, quæ fuit appropinquandi. [2])] [5])

Per assumptionem magni et parvi corporis. primo ostende quod semper eadem est velocitas separ.is quando est eadem accedendi. inde enim in casu duorum corporum æqualium inventum probari potest [6]).

---

[1]) Au dessus de ce mot „spatio" Huygens écrivit: „navi".

[2]) Nous mettons entre crochets les phrases biffées par Huygens.

[3]) C'est la Prop. VII (p. 51) du Traité „De Motu" et les démonstrations ne diffèrent pas en principe.

[4]) Cette deuxième Partie ne doit pas être considérée comme la suite de la première, mais plutôt comme un nouveau départ. Elle est empruntée à la page numérotée 2 par Huygens dont on trouvera un fac-similé à la fin du Tome présent.

[5]) Si Huygens a biffé cet axiome, ce n'est pas parce qu'il doutait de sa justesse, mais puisqu'il venait de découvrir un autre axiome qu'on trouvera plus loin (voir la p. 96, où nous l'avons mis en italiques), lequel axiome lui semblait plus plausible et dont il savait déduire l'axiome biffé à l'aide d'une démonstration que l'on rencontrera vers la fin de cette deuxième Partie.

[ax. 1 [2])] Iis qui in navi ſunt quæ progreditur, corporum ſibi in navi occurrentium motus non alius apparet quam ſi navis immota ſtaret, vel ipſi una cum ijs extra navem eſſent. Idem de motu terræ. Hinc demonſtratur [7]) quod ſi corpora ſint duo æqualia alterum quiescens alterum quiescenti impactum, omnis motus tranſibit in id quod quiescebat, et illud quod movebatur reſtabit immotum in loco concurſus.

Majus corpus quiescens ab eodem corpore eadem celeritate impulſum minorem celeritatem acquirit quam corpus minus [8]).

Ex his demonſtrari poteſt non ſemper poſt duorum corporum colliſionem, tantundem motus remanere quantum erat antea, eo videlicet ſenſu, ut corporum magnitudines cum velocitatibus multiplicatæ, eundem numerum producant quem prius producebant [9]).

[ax. 2 [1])] Sed neceſſe eſt quadrata velocitatum ducta in magnitudinem corporum ſemper eundem numerum producere [10]). Ex hoc et primo ax. [11]) regula conficitur [12]).

---

[6]) Cet alinéa fut intercalé d'une écriture plus fine après que l'axiome précédent avait été biffé. Huygens y renvoie dans la deuxième phrase à la démonstration dont nous parlions dans la note précédente. Par la troisième Huygens veut indiquer probablement que l'hypothèse formulée dans le premier alinéa de la p. 92 pourrait être déduite de l'égalité des vitesses de séparation et d'approchement en considérant la parfaite symmetrie du cas en question par rapport aux deux corps. Comparez le quatrième alinéa de la p. 102.

[7]) Savoir en partant de l'axiome formulé dans le premier alinéa de la Première Partie. On trouve cette démonstration de la „Propositio Prima" du Traité „De Motu" aux p. 33—35.

[8]) Conférez la note 5 de la p. 43.

[9]) Comparez la „Prop. VI" du Traité „De Motu" et sa démonstration (p. 49—51).

[10]) C'est la „Prop. XI" (p. 73) du Traité „De Motu"; mais par quel raisonnement Huygens est-il arrivé dès l'abord à cette supposition? Sans doute non pas par celui suivi dans le Traité, puisqu'il y suppose que les lois du choc sont déjà connues complètement; mais plutôt par un raisonnement analogue à celui qui constitue le fond de la démonstration de la „Prop. VIII" (voir p. e. les p. 53—57). En effet, en admettant 1° la réversibilité de la percussion des corps, 2° le principe, appliqué dans la démonstration mentionnée, que le centre de gravité commun des corps ne peut monter par l'effet de la gravité seule, on en déduit facilement la supposition en question en convertissant, à l'exemple de Huygens, les vitesses horizontales en des vitesses verticales et en faisant monter les corps aussi haut qu'il est compatible avec leurs vitesses avant et après le choc.

Consultez sur le principe mentionné la note 1 de la p. 56 et les p. 21—22 de l'Avertissement qui précède, où nous remarquons à propos du passage présent que Huygens avait donc pressenti déjà vers 1652 la loi de la conservation de l'énergie pour le cas particulier, bien important, d'un champ gravifique homogène, savoir en faisant abstraction du frottement et de la résistance du milieu.

[11]) C'est à dire l'axiome biffé qui se trouve au début de la présente Deuxième Partie.

[12]) Comparez la onzième Partie de cet Appendice aux p. 132—133.

Si corpus 2 cum celeritate 3 impactum corpori 1 quiescenti, concedatur ipsi dare velocitatem 4 et sibi retinere veloc. 1 in eandem partem. Ostendi potest, quod corpus 1 cum celeritate 3 impactum corpori 2 quiescenti, dabit ipsi velocitatem 2, et sibi retinebit velocitatem 1 sed resiliens in partem contrariam [1]).

[ax. 3. [2])] Si corpus A majus occurrat B minori, sed velocitas in B sit ad velocitatem in A reciprocè ut magnitudo A ad B, tum utrumque cum eadem qua venit celeritate resiliet [3]).

Hoc concesso omnia demonstrari possunt [4]). Cartesius autem concedere cogitur [5]).

Sed videndum an demonstrari per notiora queat.

Axioma. Si duo corpora ex adverso sibi mutuo occurrant, unumque eorum eadem qua venit celeritate retro feratur nihil de motu suo amittens, etiam alterum eâ quâ venit celeritate resiliet [6]).

Duo corpora ex adverso sibi mutuo occurrentia pari celeritate separantur qua et appropinquant [7]).

[Fig. 4.]

Sunto duo corpora A et B [Fig. 4] sibi mutuo ex adverso occurrentia in puncto C; ad quod pervenisse ponantur ex locis A et B in tempore D. post occursum vero ad C *venerint rursus in tempore D ad E et F* [8]). dico spatium FE spatio AB æquale esse. Ponamus enim corpora A B præter motus istos quos jam ipsis tribuimus, adhuc alij motui esse simul obnoxia quo versus partem B ferantur, in tempore D per spatium æquale GB, hoc est dimidio

---

[1]) À cet effet il suffit d'ajouter aux vitesses qu'on rencontre dans le premier cas la vitesse commune 3 qui reduit en repos le corps le plus grand.

[2]) L'indication entre crochets fut biffé par Huygens, ce qui veut dire ici qu'il préférait plus tard introduire un autre axiome fondamental, savoir celui qui suit et que nous avons mis en italiques.

[3]) C'est la „Prop. VIII" (p. 53) du Traité „De Motu".

[4]) C'est la voie suivie dans le Traité „De Motu", où la „Prop. IX" (p. 65) qui contient la solution complète de Huygens du problème du choc central des corps durs, est déduite de la „Prop. VIII" et du Principe de la relativité.

[5]) Comparez le troisième alinéa de la p. 95 et la note 2 de la p. 49.

[6]) Dans le Manuscrit cet alinéa, que nous avons reproduit en italiques, est encadré par un trait de plume pour en marquer l'importance (voir le fac-similé à la fin du Tome présent). L'axiome constitue l'„Hypothesis V" (p. 41) du Traité „De Motu".

EB. vel imaginemur motus corporum A et B quos primò dedimus, in navi contigiſſe quæ dextram verſus feratur celeritate GB [9]). Igitur [10]) eorum reſpectu quibus navis ita movetur, videtur corpus in tempore D percurriſſe ſpatium ipſi GC æquale; repercuſſum verò, cum intra navem tempore D dextram verſus feratur per ſpatium CE, videbitur ijs qui extra navem ſunt, moveri per ſpatium æquale ipſi CG, quoniam navis interea temporis dextrorſum quoque perrexit per ſpatium æquale EG. Itaque extra navem poſitis æquali celeritate ante et poſt occurſum corpus B moveri videbitur. Quare et corpus A æquè celeriter ante et poſt occurſum moveri apparere debebit, per axiom. at corpus A ante occurſum neceſſario viſum fuit ipſis moveri celeritate HC (poſita vl. [11]) AH æquali EG vel GB.). hoc eſt viſum fuit in tempore D tranſire ſpatium HC, ergo et reſiliens apparet ijsdem moveri per ſpatium æquale HC in tempore D. Quare in navi transijſſe neceſſe eſt per ſpatium æquale duobus HC et HA ſive EG. at poſitum fuit in navi transijſſe ſpatium FC. igitur FC æquale HC et GB. Quare HF ∞ GB. ſed et HA. Ergo FA ∞ EB. additaque communi AE, erit FE æqualis AB. quod erat demonſtrandum.

---

[7]) C'est l'axiome biffé du début de cette Deuxième Partie, mais il est posé maintenant en théorème dont la démonstration, basée sur l'axiome en italiques, va suivre. Il est d'ailleurs identique avec la „Prop. IV" (p. 43) du Traité „De Motu" et les démonstrations quoique différentes (comparez la note 9 de cette page avec la note 3 de la p. 42) reposent sur les mêmes principes.

[8]) La phrase que nous avons mise en italiques fut soulignée par Huygens.

[9]) Le bateau est donc supposé se mouvoir avec la vitesse $-\frac{1}{2}(v_B + v'_B)$, où v_B et v'_B représentent respectivement les valeurs algébriques des vitesses de B par rapport au bateau avant et après le choc.

[10]) Voici sous forme algébrique le raisonnement qui va suivre. Par rapport à la rive les vitesses des corps A et B étaient donc avant le choc respectivement: $v_A - \frac{1}{2}(v_B + v'_B)$ et $\frac{1}{2}(v_B - v'_B)$, et après le choc: $v'_A - \frac{1}{2}(v_B + v'_B)$ et $\frac{1}{2}(v'_B - v_B)$; celle du corps B n'est donc pas changée par le choc en valeur absolue. Il faut donc, d'après l'axiome, qu'il en soit de même de la vitesse du corps A. On a donc: $v'_A - \frac{1}{2}(v_B + v'_B) = -v_A + \frac{1}{2}(v_B + v'_B)$, d'où l'on déduit facilement: $v'_A - v'_B = -(v_A - v_B)$; ce qu'il fallait prouver.

[11]) Lisez: „videlicet".

[Troisième Partie.] [1])

[1652.]

$$bx + ay \infty ac \text{ [2])}$$
$$y \infty c - \frac{bx}{a}$$

$$acc - 2bcx + \frac{bbxx}{a} + bxx \infty acc \text{ [3])}$$
$$2ca \infty bx + ax$$
$$\frac{2ca}{b+a} \infty x$$

$$ax + by \infty bc \text{ [4])}$$
$$y \infty c - \frac{ax}{b}$$

$$axx + bcc - \frac{2bacx}{b} + \frac{aaxxb}{bb} \infty ccb$$
$$abxx + aaxx \infty 2acbx$$
$$bx + ax \infty 2cb$$
$$x \infty \frac{2cb}{b+a}$$

$$axx + byy \infty bcc \text{ [5])}$$
$$yy \infty \frac{bcc - axx}{b}$$

---

[1]) Cette Troisième Partie se trouve sur la même page que la Deuxième, mais pour la lire on doit mettre le Manuscrit en sens inverse. On trouve alors en haut de la feuille les calculs que nous reproduisons. Viennent ensuite deux lignes appartenant à la Deuxième Partie et après elles la minute d'une lettre à van Schooten, que nous reproduisons également. Voir le fac-similé.

[2]) Ici a et b représentent les masses de deux corps A et B. A est supposé se mouvoir avant le choc avec la vitesse c. B est alors en repos. Leurs vitesses après le choc sont représentées respectivement par y (pour A) et x (pour B). Huygens applique le principe de la conservation de la quantité du mouvement. Comparez dans l'Avertissement qui précède l'alinéa qui commence en bas de la p. 7 et surtout la note 3 de la p. 8.

[3]) Application du principe de la conservation des forces vives.

[4]) Le calcul présent n'est qu'une répétition de celui qui précède. Seulement c'est maintenant le corps A qui repose avant le choc et de plus x représente la vitesse après le choc du corps A, y celle du corps B.

[5]) Huygens débute ici par le principe de la conservation des forces vives sans achever le calcul. Outre ceux que nous venons de reproduire les pages 1 et 2 contiennent encore d'autres calculs inachevés, biffés en partie et peu compréhensibles.

librum tuum de locis planis quem dudum perlegere desidero si commodum est velim ut mittas nunc mihi, vel si excurrere huc vacat ut ipse adferas, sunt enim quædam quæ ostendere invicem tibi præsenti cupiam ex inventis meis et non pauca narrare habeo de itinere gandavensi unde nunc primum reverti. diu cum P. Gregorio collocutus sum cujus quadraturam licet ab ipso confessionem exprimere non satis potuerim, Gotscovius condemnavit dixitque mea opera eversam funditus, Ita nobis retulit D. Edelheer Antverpiensium Syndicus. vale [6]).

[Quatrième Partie.] [7])

[1654.]

Subtilis disquisitio et jucunda. eoque magis necessaria quod percussionis naturam et potentiam explicat nihil enim usu frequentius et effectu potentius, at nullius rei æque fundamenta ignorantur. antiquis philosophis quod sciam nihil rei spectum Recentiores autem multi. Galileus cum de motu plurima explicasset [8]) nihil

[6]) Ce qui précède est sans aucun doute la minute d'une lettre à van Schooten à laquelle celui-ci répondit le 28 juillet 1652; voir les p. 183—184 de notre T. I. Nous ne manquerons pas de reproduire cette minute dans le Tome où nous publierons les lettres écrites par Huygens ou adressées à lui dont nous avons pu prendre connaissance après la publication du dernier volume de sa Correspondance (notre T. X, paru en 1905). Toutefois il nous semble utile de la donner déjà ici parce qu'elle peut servir à déterminer la date des travaux de Huygens qui précèdent et aussi pour épargner au lecteur peu familier avec l'écriture de Huygens de déchiffrer cette partie du fac-similé qu'on trouve à la fin du Tome présent. Nous nous dispensons pourtant d'ajouter ici des notes pour expliquer le contenu. On les trouvera dans le Supplément à la Correspondance auquel nous venons de faire allusion.

[7]) Cette Partie est empruntée à une feuille séparée contenant les pages numérotées 7—10 par Huygens; comparez la note 1 de la p. 92. Or, la p. 10 est occupée par la minute de la lettre à van Schooten du 7 octobre 1654 qu'on trouve aux p. 458—459 de notre T. III.

Ajoutons que les pages numérotées 3—6 qui remplissent la lacune entre les pages numérotées 1 et 2 et celles que nous allons reproduire, contiennent les minutes des lettres de Huygens au même du 5 et du 7 novembre 1652 (voir les p. 454—458 du T. III) et rien d'autre se rapportant au choc des corps.

[8]) Il s'agit dans ce qui suit de l'ouvrage „Discorsi e Dimostrazioni matematiche, intorno à due nuoue scienze" de 1638, cité dans la note 1 de la p. 31 de notre T. I et en particulier du passage de la „Giornata quarta" qu'on trouve p. 291—293 du Vol. VIII (1898) de l'édition nationale des Œuvres de Galilée. Entre autres Galilée y met dans la bouche de Sagredo les remarques suivantes: „E 'l dubbio e lo stupor mio consiste nel non restar capace onde possa derivare, e da qual principio possa dependere, l'energia e la forza immensa che si vede consistere nella percossa, mentre col semplice colpo d'un martello, che non abbia peso maggiore d'8 o 10 libre, veggiamo superarsi resistenze tali, le quali non cederanno al peso d'un grave che, senza percossa, vi faccia impeto, solamente calcando e premendo, benchè la gravità di quello passi molte centinaia di libre. Io vorrei pur trovar modo di misurar la forza di

tamen definivit quod ad nos pervenerit [1]) nisi quod immensam percussionis potentiam dixerit. Verba ipsius operæ pretium interpretari quia simul sententiam ipsius de contemplationis hujus difficultate exhibent diligentiamque ab eo adhibitam testantur. ut et momentum [2]). verba Galilei. Post hunc autem alij [3]) quoque impulsus regulas tradidere sed paucas tantum veritati consentaneas quas ab experimentis edocti fuere neque tamen ratione ulla evidenti demonstrarunt. Cartesius vero contra experimentorum fidem novas condere ausus est [4]) quas nulla demonstratione egere dixit principia sua intelligentibus [5]). Cujus sententiam nonnullos amplecti video [6]). Sed cum in plerisque à veritate abeat quo major est tradentis autoritas eo utilius ut error redarguatur. Non autem ideo sententiam circa hæc nostram illius sententiæ præferendam contendemus quod omnibus cum experimentis accuratè consentiat cum ipsius manifesto adversetur. sed demonstrationibus primum omnia firmabimus evidentissimis, quæ si experientia comprobentur tum hoc quoque evicisse credemus non omnino inutilia esse duritiei defectu corpora quædam, neque à circumfuso aere ita impediri ipsorum motum, quin ad experimenta sufficiant. nam hanc causam adfert quo minus exhiberi Theorematum suorum veritas possit [7]).

---

questa percossa; la quale non penso però che sia infinita, anzi stimo che ella abbia il suo termine da potersi pareggiare e finalmente regolare con altre forze di gravità prementi, o di leve o di viti o di altri strumenti mecanici, de i quali io a sodisfazione resto capace della multiplicazione della forza loro."

À ces remarques Galilée fait répondre Salviati comme suit: „V. S. non è solo, nella maraviglia dell' effetto e nella oscurità della cagione di così stupendo accidente. Io vi pensai per alcun tempo in vano, accrescendo sempre la confusione, sin che finalmente, incontrandomi nel nostro Academico [Galilée lui-même], da esso ricevei doppia consolazione: prima, nel sentire come egli ancora era stato lungo tempo nelle medesime tenebre; e poi nel dirmi che, dopo l'avervi in vita sua consumate molte migliara di ore specolando e filosofando, ne aveva conseguite alcune cognizioni lontane dai nostri primi concetti, e però nuove e per la novità ammirande. E perchè ormai so che la curiosità di V. S. volentieri sentirebbe quei pensieri che si allontanano dell' opinabile, non aspettero la sua richiesta, ma gli do parola che, spedita che avremo la lettura di questo trattato de i proietti, gli spiegherò tutte quelle fantasie, o vogliàn dire stravaganze, che de i discorsi dell' Accademico mi son rimaste nella memoria."

[1]) Allusion à la promesse de Salviati mentionnée dans la note précédente. Cette promesse ne fut pas remplie pendant la vie de Galilée. Mais on trouve au Tome VIII, p. 319—346, de l'édition nationale citée dans la note précédente une „Giornata sesta del Galileo: Della forza della percossa" qui fut publiée pour la première fois en 1718 dans le T. II (p. 693—710) des „Opere di Galileo Galilei", éditées par Tartini et Franchi.

Or, quoique cette „Giornata sesta" contienne des considérations intéressantes sur la force de la percussion, elle n'amène pas une solution satisfaisante des problèmes posés par Sagredo.

[2]) Ce mot fut biffé par Huygens. D'ailleurs les pages numérotées 7—10 sont pleines de ratures et d'irrégularités, mais Huygens lui même a indiqué par des signes l'ordre dans lequel il veut qu'elles soient lues et nous avons suivi ces indications.

[3]) Dans la Correspondance de Huygens jusqu'à celle de 1654 incluse, on ne trouve mentionnés à ce propos outre les „Principia philosophiæ" de Descartes que des ouvrages de Marci (p. 252,

Neceſſe eſt autem principia quædam deligere quæ motus naturæ conveniant et non ægrè fidem inveniant Quibus conceſſis circa reliquas demonſtrationes nulla ſuperſit dubitatio. Quæ quidem eadem fere cum Carteſio ſtatuemus paucis tamen discrepantes [8]).

Primum itaque cum Carteſio dura omnino corpora eſſe fingemus quæ ſibi mutuo occurrant, tum eo loci librata ubi corpora circumambientia nihil motum ipſorum retardent neque adjuvent [9]). Ubi denique nec gravitas ſurſum nec levitas deor-

---

260, 263, 290, 307 et 308 du T. I) et de de Raei (p. 458—459 du T. III).

[4]) Il s'agit des sept règles du choc des corps formulées par Descartes dans la „Pars secunda" de ses „Principia"; voir les p. 68—70 du T. VIII, 1905, de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes, mais consultez aussi la traduction française de 1647, autorisée par Descartes, où il y a beaucoup d'additions à la version latine (voir les p. 89—93 de la pagination de la dernière partie du T. IX, 1904, de l'édition d'Adam et Tannery).

[5]) Comparez la p. 167 de notre T. I où l'on lit dans une lettre de Huygens à van Gutschoven de janvier 1652: „Quanquam enim Autori suo ipsi [regulæ motus occurentium sibi mutuo corporum] tam manifestæ dicantur ut nulla probatione indigeant." Or, ces assertions de Huygens ne s'expliquent pas entièrement par la manière dont Descartes introduit ses règles dans l'édition originale des „Principia", ni dans la traduction française. Peut-être s'agit-il d'une communication verbale de van Schooten, qui avait eu beaucoup de relations avec Descartes pendant le séjour de celui-ci en Hollande. Voici, en effet, ce qu'on lit (p. 301 de notre T. I) dans une lettre de van Schooten à Huygens du 25 oct. 1654: „Præsertim cum dictæ regulæ ei [Descartes] tam perspectæ fuerint, ut sibi mirum videri haud semel asseruerit, quo pacto aliquis de illarum veritate ambigere possit".

[6]) Entre autres van Gutschoven, van Schooten et de Raei; voir les p. 166 et 301 de notre T. I et la p. 459 du T. III.

[7]) Voici le passage en question: „Sed quia nulla in mundo corpora esse possunt à reliquis omnibus ita divisa, & nulla circa nos esse solent planè dura, ideò multò difficiliùs iniri potest calculus, ad determinandum quantum cujusque corporis motus ab aliorum occursum mutetur. Simul enim habenda est ratio eorum omnium, quæ illud circumquaque contingunt, eaque, quantum ad hoc, valde diversos habent effectus, prout sunt dura vel fluida: quorum ideò diversitas in quo consistat, hîc est quærendum" (p. 70 du T. VIII de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes).

[8]) À côté de cet alinéa on lit encore en marge „quod aer non remoretur motum. pag. 142. Gal. syst." Il s'y agit probablement de l'édition suivante: „Systema Cosmicum, authore Galilæo Galilæi Lynceo, Academiæ Pisanæ Mathematico extraordinario, serenissimi Magni-Ducis Hetruriæ philosopho et mathematico primario, in quo quatuor dialogis, de duobus maximis mundi systematibus, Ptolemaico et Copernicano, utriusque rationibus philosophicis ac naturalibus indefinite propositis, disseritur, ex italica lingua latine conversum. Accessit appendix gemina, qua SS. Scripturæ dicta cum terra mobilitate conciliantur. Augustæ Treboc, impensis Elzeviriorum, typis Davidij Hautti, anno 1635, in 4°".

On y trouve, en effet, à la p. 142 une discussion entre Simplicio et Salviati sur le rôle de l'air ou de la vitesse acquise dans le cas de la chûte d'une pierre du haut du mât d'un navire en mouvement. Comparez les p. 175—176 du T. VII (1897) de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei".

[9]) Comparez le dernier alinéa de la p. 67 du T. VIII de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes.

ſum tendere cogat. ad hæc quod corpus motum, pergit eadem velocitate moveri ſecundum lineam rectam usque donec ab alio impediatur.

Sed hoc quoque cum ipſo ſtatuemus eandem motus quantitatem corporibus poſt impulſum conſervari, non in ſingulis ſemper ſed una ſumptis [1]). Quod quidem principium cum non in omni caſu eodem modo accipi debeat neque poſſit, primum ad eos referemus caſus in quibus nullam habet dubitationem, atque inde ea efficiemus quibus poſtea probetur non ubique eodem modo hoc principium interpretandum eſſe ſed nonnunquam longè aliter quam à Carteſio fieri ſoleat adhibendum [2]).

Primum hoc ſtatuemus. Si corpus aliquod ſecundum rectam lineam moveatur &c. deinde motum corporum non interire mutua ipſorum colliſione nec augeri ſed remanere debere ut ſi alteri quid decedat id accedat alteri, quod tamen quoniam non ſemper evidens eſt, tantum in manifeſtis hisce caſibus ita contingere ponemus.

Primùm ſi corpora duo æqualia pari celeritate ex adverſo ſibi mutuo occurrant omnem ijs motum ſervari, ideoque utrumque eadem ſervata celeritate reverti [3]). Cum enim æqualia ſint et æquali celeritate delata non poteſt diſpar eſſe utriusque reflexio. Jam omnia de æqualibus [4]).

deinde, ſi corpus majus minori occurrat quiescenti, et motum aliquem huic conferre, et motum proinde ſuum aut aliquid certe de ſuo motu amittere [5]).

denique quod duobus corporibus colliſis ſi alterum eorum omnem motum ſuum ſervet, etiam alterum nihil deperdere. in æqualibus patuit. ſed et in inæqualibus fieri eſſe [ſic] [6]).

Corpora dura. Nullum aeris impedimentum nec gravitatis attractionem. tum ſequens. deinde quod ad motus naturam ſpectet. hoc cum ipſo ſtatuemus corpus in linea recta motum in eadem pergere moveri eadem ſemper velocitate donec ab alio impediatur.

[1]) Comparez la note 2 de la p. 49.

[2]) Huygens fait allusion ici à la correction qu'il savait donc déjà en 1654 apporter au principe de Descartes de la conservation de la quantité du mouvement, laquelle correction il formula dans le Journal des Sçavans du 18 mars 1669 comme suit: „La quantité du mouvement qu'ont deux corps, se peut augmenter ou diminuer par leur rencontre, mais il y reste toûjours la mesme quantité vers le mesme costé, en soustrayant la quantité du mouvement contraire". Il est bien étrange que dans le Traité „De Motu" Huygens n'ait pas donné la règle corrigée mais se soit borné à contredire le principe de Descartes; voir la „Propositio VI" de ce Traité (p. 49—51) et dans l'Avertissement l'alinéa qui commence en bas de la p. 12.

[3]) C'est l'„Hypothesis II" du Traité „De Motu" (p. 31). Comparez encore le premier alinéa de la p. 92.

[4]) Comparez les deux premières Propositions (p. 33—39) du Traité cité.

[5]) C'est l'„Hypothesis IV" du Traité (p. 39).

[6]) C'est l'„Hypothesis V", p. 41.

Quod autem movetur aliorum corporum reſpectu moveri intelligitur quibuscum diſtantiam ſitumve commutat. Itemque quod quiescit eorum reſpectu quiescere quibuscum diſtantiam ſitumque ſervat eundem. Nam ſi quis naturam motus in uno corpore absque aliorum reſpectu inveſtigare contendat operam ſe ludere inveniet.

Itaque cum corpora quædam moventur poſſumus motum eorum expendere cujusvis corporis aliùs respectu quod tanquam quiescens ſpectamus. Neque enim corpus aliquod aut punctum in univerſo oſtendi poteſt ad quod omnium reliquorum motus referre neceſſe ſit. Itaque cum corpora duo reſpectu partium terræ moventur ſibi mutuo occurrunt certaque lege reflectuntur, conſtat utique omnia hic ſimiliter contingere debere atque eadem ratione ſeſe habere, ſive quiescere terram aliquis exiſtimet ſive noverit alijs ipſam motibus obnoxiam eſſe.

Item ſi in navigio quod æquabili motu provehatur, reſpectu partium ipſius navigij corpora duo ex adverſo moveantur atque invicem ſibi occurrant, certum eſt poſt impulſum perinde ſeſe habere debere utriusque motum reſpectu ejusdem navigij ac ſi eadem omnia in quiescente peracta fuiſſent. Et hoc experientia quoque comprobat, ſive ſuper menſa in navigio immota globuli concurrant [7]) ſive in aere a navigante projecti invicem fiant obviam. Si enim æquales fuerint et æquali celeritate motum adacti, cum eadem unusquisque reſiliet [3]).

Prius [8]) de navigio in univerſum [9]) tum exemplum ſphærarum æqualium [10]). Tum ſi quis dubitet an hoc ita evenire debeat terræ exemplo probandum. Dubitatio ejus à præjudicio quod terram magis quam navigium quiescere exiſtimet. Sed Carteſius recte dicet non magis terram quiescere quam navim quæ flumine defertur [11]).

quod majus minori non conjunctum manet. ſed eadem celeritas ſit ſeparandi quæ adveniendi [12]).

Inde quod ſemper hoc contingat. Falſus ergo Carteſius [13]) tum quod majus à minori movetur.

---

[7]) Le mot „concurrant" est souligné et on trouve écrit au-dessus la variante: „impellantur".

[8]) Évidemment Huygens fait suivre ici sans l'achever pourtant le sommaire du Traité sur la percussion des corps qu'il se proposait d'écrire.

[9]) Voir l'„Hypothesis III" p. 33 du Traité „De Motu".

[10]) Voir les Prop. I et II (33—39) du Traité „De Motu"; mais consultez surtout les p. 109—111, qui suivent, où cette partie du programme esquissé est exécutée pour la première fois.

[11]) Voici ce qu'on lit à l'article XXVI de la „Pars tertia" des „Principia philosophiæ" (p. 89—90 du T. VIII de l'édition d'Adam et Tannery) „Sed ne putemus hoc obstare [i. e. terram in cœlo suo quiescere], quominùs ab isto cœlo deferatur, & ejus motibus immota obsequatur: ut navis, nullis ventis nec remis impulsa, nullisque anchoris alligata, in medio mari quiescit, etsi fortè aquæ ingens moles, occulto cursu delabens, ipsam secum ferat."

[12]) Comparez la Prop. IV, p. 43.

[13]) Il s'agit de la quatrième règle de la percussion, sur laquelle on peut consulter la note 1 de la p. 38.

Imo quod etiam repellitur occurrens.
Hinc quod eadem motus quantitas non ſemper conſervatur [1]).
Quod augetur quoties minus majori quiescenti occur[rat] [1]).
Quod minuitur quoties poſt impulſum majus quiescat [1]).

[Cinquième Partie.] [2])

[1654.]

Impulſus regulas nemo recte tradidit paucis exceptis quæ experientia. veluti quod æquales ſphæræ e materia dura æquali celeritate ſibi mutuo occurrentes &c. [3]) item hoc admirati ſunt qui fiat ut ſphæra in ſphæram ſibi æqualem quiescentem impacta &c. [4]) demonſtrationem autem quod hoc neceſſario contingat nemo &c. de inæqualibus autem, atque inæquali celeritate motis nihil bene definitum eſt.

Impulſu motum propagari. quodque id certa ratione fiat pro magnitudine et celeritate corporum. de æqualibus. uno quiescente. de magno in minus impellente et celeriorem quam ipſum habeat motum dante [5]). Ea videntes ceperunt [6]) Hic quoniam variæ a diverſis regulæ traditæ ſunt inter ſe diſſidentes quarumque nullæ veritatem rei aſſequerentur, me quoque rei difficultas excitavit ut tentarem an certi quid invenire poſſem. non levis disquiſitio neque exigui momenti cum ictus potentia tantæ ſit utilitatis. Non omnis alia machinarum . . [7]) efficacia tantum prodeſſe invenitur quantum mallei compendi. Non edificia ſine hoc conſtrui poſſent non cuneus non clavus adigi non ullum pæne opificium exerceri. cum igitur ad tam multa opera hanc virium multiplicationem traducant æquum eſt atque utile ut ratione certa expendere noverint qua vi quid commovendum ſit. Atque imprimis operæ pretium eſt intelligere infinitam percuſſionis potentiam,

---

[1]) Comparez la Prop. VI (p. 49) du Traité „De Motu".

[2]) Cette Partie est empruntée aux pages numérotées 11, 12, 19, 20 par Huygens. Comparez la note 1 de la p. 92.

[3]) Voir l'„Hypothesis II" (p. 31) du Traité „De Motu".

[4]) Voir (p. 33) la „Propositio prima".

[5]) On ne retrouve pas expressément cette Proposition dans le Traité „De Motu", mais elle se déduit facilement de la règle générale formulée dans l'alinéa qui commence à la p. 65. En effet, dans les notations de la note 1 de la p. 67 on trouve dans le cas $m_A > m_B$, $v_B = 0$, pour la vitesse de B après le choc : $v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A > v_A$.

[6]) Les phrases à commencer par „de æqualibus" jusqu'à „Ea videntes ceperunt" ont été intercalées après coup. La dernière paraît n'avoir pas été achevée.

[7]) Mot illisible.

adeo ut ſi vel terræ univerſæ æqualis ſphæra detur unus homo mallei percuſſu eam loco pulſurus ſit. Aliquibus hoc abſurdum prima ſpecie exiſtimatum iri credo, et tamen ſatis evidentes fore demonſtrationes noſtras ut perceptis ijs certi reddantur non aliter fieri poſſe [8]). Neque primi nos ita ſenſimus ſed ante hoc idem ſubtiliſſimus Galileus ſciviſſe videtur, licet nulla ejus circa hæc extet demonſtratio [9]). In dialogis qui hucusque Italico tantum idiomate circumferuntur ſequentia prodidit, e quibus præter prædictam ejus ſententiam impenſum quoque in hanc rem ſtudium colligere licebit [10]), atque adeo ipſius contemplationis difficultatem et prætium. Sic igitur Sagredum confabulationem &c [11]).

Hæc Galileus neque alibi quidquam de percuſſ. aut impulſu. Motus autem naturam pluribus locis conſideravit in ſyſtemate [12]). Et hæc omnia perpendiſſe utile fuerit hæc noſtra lecturis, quoniam varijs inveteratis præjudicijs [13]) mentem ſolvant. Sed et præcipue quæ ab Illuſtri Carteſio de motu tradita ſunt in Principijs philoſ. [14]). Quamvis enim contraria ipſi traditurí ſumus in his, attamen &c. et præclare multa explicaſſe et multum eo nomine ipſi nos debere fatemur.

Princip. Carteſij [14]) quod diu nobis veriſimile [15]) viſum [16]). Poſtea falſum inventum eſt.

Principio recte caviſſe [17]) videtur perfectam corporum ſeſe impellentium duritiem animo concipiendam eſſe, eaque moveri in ſpatio quaſi vacuo in quo nulla alia corpora motum eorum juvare poſſint aut imminuere. Ergo hæc etiam nos ſupponemus ſed neque gravitatis proprietate [18]) deorſum trahi ipſa, aut præ levitate ſurſum efferri fingemus.

Statuemus porro unumquodque corpus natura ferri ſecundum lineam rectam, quâque celeritate ſemel motum eſt ea pergere moveri niſi ab alio impediatur; quod præter Carteſium [19]) Galileus [20]) quoque et alij dixere. Porro ad duritiem

---

[8]) Au-dessus des mots „non aliter fieri posse" on trouve écrit, comme leçon alternative „id necessario fieri."

[9]) Comparez la note 8 de la p. 99.

[10]) Au-dessus de la terminaison „bit" on trouve écrit: „at".

[11]) Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 112 et l'alinéa suivant qui commence en bas de cette page-là.

[12]) Il s'agit de l'ouvrage mentionné dans la note 8 de la p. 101.

[13]) Au-dessus de ce mot on lit: „erroribus".

[14]) Voir l'ouvrage mentionné dans la note 1 de la p. 38.

[15]) On lit au-dessus de ce mot les deux autres: „certissimum" et „valissimum" [sic].

[16]) Comparez la p. 4 de l'„Avertissement".

[17]) Voir à propos de cet alinéa la note 7 de la p. 101.

[18]) Au-dessus de ce mot Huygens écrivit „vi".

[19]) Comparez les articles XXXVII et XXXIX de la „Pars Secunda" des „Principia Philosophiæ", p. 62 et 63 du T. VIII de l'édition d'Adam et Tannery.

[20]) Comme Huygens le fait ici, on a généralement attribué à Galilée la connaissance exacte du

corporum et proprietatem motus attendentes, ponemus occurſu mutuo duorum corporum motum tamen eorum non omnino interverti atque ad nihilum redigi ſed ſuperſtitem remanere. Qua verò quantitate nondum definiemus niſi tantum in caſibus his manifeſtis. Nimirum ſi contingat alterum eorum omnem celeritatem ſuam ſervare poſt impulſum, etiam alterius celeritati nihil decedere [1]). Et ſi æqualia duo corpora æquali celeritate invicem occurrunt, utrumque eadem illa celeritate reverti [2]). Ad hæc quoties corpus majus minori quiescenti occurrit aliquem ei motum conferre, ac proinde de ſua celeritate aliquid amittere [3]). Denique concedi poſtulamus cum minori mole corpus majori quiescenti occurret, celeritatem ei minorem dare ſua ipſius celeritate [4]); utique ſi per præcedentia prius aliquam dare demonſtratum fuerit. Hæc digna nobis viſa ſunt quæ concedantur neque ipſius Carteſij Principijs aut regulis adverſantur. Cæterum una etiamnum circa motus naturam præmittenda eſt conſideratio, longe maximi in hiſce momenti quam nemo adhuc quod ſciam adhibuit [5]). Pendet autem ex eo quod circa compoſitum motum à pluribus animadverſum fuit. Conſtat nimirum, quod in navi conſtitutis, quæ æquabili curſu progrediatur, perinde contingunt motus omnes ac in quiescente, aut ſuper terram agentibus [6]), idque cuivis experiri obvium eſt. Videmus enim globulum plumbeum e ſummitate mali dimiſſum ad pedem ejusdem decidere neque retro deferi. Et ſi quis in puppe conſiſtens ſtanti in prora eundem globulum projiciat non majorem ei vim adhibendam, quam alteri eundem rejicere volenti; planè ſicut navi quiescente [7]) contingeret, adeoque nulla ratione [8]) in navi ipſa navis motum aut quietem discerni poſſe, niſi ad terram reſpiciamus.

Et hæc quidem prolixius à Galileo in Syſtemate Mundi [9]) explicata ſunt, et ratione confirmata.

Ut autem ad id quod nobis declarare propoſitum eſt accedamus cogitemus intra

---

Principe d'inertie, en s'appuyant sans doute sur des textes comme on en trouve dans le début de la „Giornata Quarta" (qui traite du mouvement parabolique des corps projetés) des „Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue scienze"; voir p. e. la p. 268 du Vol. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei".

C'est à Wohlwill, que revient le mérite d'avoir montré pour la première fois que cette opinion est erronée et que Galilée n'a jamais énoncé le Principe d'inertie dans la forme qu'il a obtenu plus tard. Voir les p. 96—135 de l'article de Wohlwill „Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes, Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft". XV, 1884. On peut consulter aussi E. J. Dijksterhuis „Val en Worp", Groningen, Noordhoff, 1924, p. 264—271.

[1]) Voir l'„Hypothesis V" (p. 41) du Traité „De Motu".

[2]) Voir l'„Hypothesis II" (p. 31). On trouve en marge: „id primum".

[3]) Voir l'„Hypothesis IV" (p. 39).

[4]) On ne rencontre pas une telle hypothèse (qui, en effet, est superflue) dans le Traité „De Motu". Le fait lui-même résulte de la formule $v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A$ (comparez la note 5 de la p. 104), où $v'_B < v_A$ lorsque $m_A < m_B$.

navem uti dictum eſt æquabili motu incedentem, ludum eum exerceri quo ſuper menſam planam ad libellam æquatam globuli eburnei clavulis ex eadem materia confectis pelluntur [10]). Equidem neminem dubitare arbitror quin æque commode omnia hic ludentibus ſucceſſura ſint, quam ſi aut navis conquiesceret aut domi ſuæ menſam conſtituiſſent. Et ſi ſint duo quorum alter ad eam menſæ partem ſtet quæ proram ſpectat, alter ex adverſo, ſimulque globulos ſuos impellant ita ut hi in media menſa invicem ſibi occurrant, certum quoque pariter ſuum ſibi quemque reverſurum eſſe, et nullam quidem celeritatis partem amiſſuros, ſi perfecte [11]) duri fuiſſent, ac inter ſe æquales, menſæque ſuperficies omni inæqualitate et ſcabritie careret eſſetque ad libellam exquiſitè complanata. Præterea hæc omnia eodem modo eventura ſcimus, ſi ſupra navis tectum menſa collocetur. Quid ſi vero validiore percuſſu ut ſæpe fit ſupra menſæ planum globuli efferantur æqualiter utrinque ut diximus impulſi? Sane ſi vel ſic directe ſibi mutuo obviam fiant æqualiter quoque ut antea repercutientur. Nam licet prius menſæ planitiem ſemper contigerint, certum tamen hanc nihil globulorum motibus conferre aut officere niſi quatenus aspera eſt et inæqualis. Ergo remotâ quoque menſa ſi tantum à prora et puppi ijdem globuli projiciantur æquali vi ita ut ſupra mediam navem in aere concurrant, pari quoque celeritate reflectentur.

Atque hinc porro facile intelligimus quod etiamſi non projecti forent à ſtantibus in prora et puppi, ſed alia quavis ratione contingeret ut pari celeritate ex adverſo ſibi deferrentur reſpectu ſedentis in navi; idem tamen eventurum ſit, nimirum ut ejusdem reſpectu pari quoque celeritate reſiliant.

---

[5]) Huygens écrivit au-dessus „in mentem venit".

[6]) Comparez l'„Hypothesis III" (p. 33) du Traité: „De Motu".

[7]) Ici finit la page numérotée 12 par Huygens et commence celle numérotée 19 par lui. Consultez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 92.

[8]) Au-dessus de ce mot on trouve: „re".

[9]) Voir l'ouvrage cité dans la note 8 de la p. 101. Il s'agit de la „Giornata Seconda", consultez les p. 273—280 du Vol. VII (1897) de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei".

[10]) Évidemment il s'agit du jeu de billard. Remarquons toutefois qu'au dix-septième siècle ce jeu différait en plusieurs points du jeu tel qu'on le joue présentement. Ainsi les queues droites sont d'une invention beaucoup plus récente. Voici la description des instruments qu'elles ont remplacées. Nous l'empruntons à l'„Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une Société de gens de lettres", Paris, Briasson, etc. Tome second. 1751, p. 253: Billard, se dit aussi de la masse ou du bâton recourbé avec lequel on pousse les billes. Il est ordinairement de bois de gayac ou de cormier, garni par le gros bout ou d'ivoire ou d'os simplement. On peut même se passer de ces garnitures. On tient cet instrument par le petit bout, & l'on pousse la bille avec l'autre bout."

Voir d'ailleurs pour la manière dont on se servait de ce bâton recourbé, le „Recueil des planches" appartenant à la même Encyclopédie, Vol. VIII, 1771, sous l'article „Paumier", la Pl. V „Paulmerie, Salle de Billard et Instruments de Billard".

[11]) Au-dessus de ce mot on lit: „planè".

[Sixième Partie.] [1])

[1654.]

Vereor ne qui hæc conſiderare non conſuevere ægre percipiant [2]).

De motus natura hoc percipimus quod ſitus corporum inter ſe per ipſum immutentur, quodque omnis fiat in tempore. Quando autem moveri quid dicimus id reſpectu alterius corporis intelligendum eſt neceſſario. quod quidem corpus vel ut quiescens ſpectari poteſt vel ut motum qu [3])

Motum quidem corporum eſſe liquido percipimus, ſed quietem nusquam certo invenimus. Ubicunque enim duo corpora inter ſe diſtantiam mutant motum intervenire intelligimus ſed corpus aliquod quiescens commonſtrare neque aliquid tale eſſe aſſeverare poſſumus. Sed reſpectu tantum ad alia corpora quies definitur. Poſſumus tamen corpus vel punctum aliquod vel plura ut quiescentia ſpectare ad quæ motum eorum quæ moventur referamus. imo hoc fieri neceſſe eſt ſi quantitatem motus ad calculum revocare propoſitum habeamus.

Rogabo quando reſpectu ſtantis ſuper terram corpora duo [æqualia] [4]) ſibi mutuo occurrunt *unum ad orientem alterum ad occidentem pergens* [5]), an non ſecundum Carteſij regulas poſt mutuum impulſum ejusdem hominis reſpectu receſſura ſint, nimirum ſi perfectè dura ſint nihilque circumfuſus aer reſiſtere ponatur. Concedet opinor, neque quisquam obſtare dicet motus reliquos eorum corporum quos cum terra communes habent, dicunt enim experimentis hoc tantum deeſſe quod non dura perfecte ſunt corpora &c. Rurſus ſi in navigio navigante ſedens ſui et navigij reſpectu bina ut ante corpora alterum à puppi alterum à prora æquali celeritate ad ſeſe mutuo ferri conſpiciat numquid et hæc legem prædictam poſt impul-

[1]) Cette Partie est empruntée aux pages numérotées 13—18 par Huygens. Comparez la note 1 de la p. 92.

[2]) Cette annotation est écrite en haut de la page, séparée du texte qui suit. Elle est peut-être d'une date postérieure.

[3]) La phrase ne fut pas achevée.

[4]) Le mot „æqualia" fut biffé; toutefois nous croyons qu'il s'agit du cas dont traite la première règle de Descartes (voir la note 4 de la p. 93) et que l'on doit donc restituer le mot „æqualia", biffé plus tard par mégarde.

[5]) Huygens a souligné les mots en italiques qui précèdent.

[6]) Les mots entre parenthèses furent biffés, mais ils sont indispensables pour compléter la phrase.

[7]) Ce qui va suivre peut être considéré comme une rédaction antérieure de la démonstration de la „Propositio Prima" (p. 33—37) du Traité „De Motu".

[8]) Consultez pour une figure mieux dessinée mais de la même portée la Fig. 14 de la p. 122.

ſum obſervabunt. Eadem plane eſt ratio quæ in ſuperiori exemplo, neque reliqui corporum horum motus quos cum navigio communes habent, quidquam rationem eam interturbant. Sed et experientia hoc docet ſi [6]) enim binos ex ebore vel duriore materia globulos] e funiculis in navi pendentes [Fig. 5], vel alia ratione collidi facias, haud aliter quam ſi navis conſiſteret impellere invicem animadvertes.

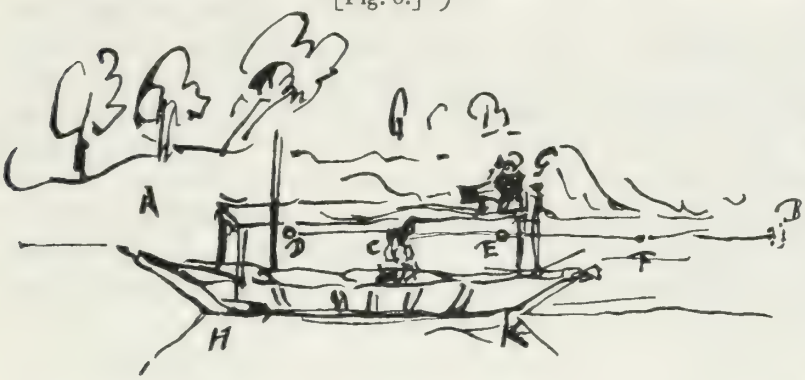
[Fig. 5.]

Hæc etſi levis conſideratio videri queat, omne tamen impulſus fundamentum continet.

Quiescere unumquodque dicitur eorum reſpectu quibuscum eandem diſtantiam ſitumque ſervat. Moveri vero reſpectu eorum quibuscum diſtantiam ſitumve non ſervat. Ita quidem puppis quiescit reſpectu proræ quocunque modo navis moveatur. Hæc vero navigans movetur reſpectu terræ. et rurſus quiescit eorum reſpectu qui in ipſa ſedent. Adeo ut corpus idem moveri et quiescere poſſit, ad diverſa ſcilicet alia corpora attendendo.

Moveatur [7]) ergo navigium HK [Fig. 6] à parte A verſus B. et ſedeat in eo vector e regione puncti C, cujus reſpectu æquali celeritate et motu æquabili ferantur ad ſe mutuo corpora æqualia D et E. Quæ quidem (æqualibus ſpatijs exiſtentibus DC, CE) concurrent in C. et poſt impulſum mutuum æquali rurſus celeritate à C discedent reſpectu vectoris et partium navigii [9]). Quod ſi eodem tempore puta ſcrupuli unius quo corpora D et E venere ad occurſum in C, navigium et cum ipſo unà homo ſedens confecit ſpatium CE. neceſſe eſt corpus E immotum manſiſſe reſpectu ripæ G aut ſpectatoris ibi ſedentis. corpus verò D confeciſſe ſpatium DE. Nam non aliter fieri poteſt ut vectori corpora D et E æquali celeritate mutuo occurriſſe appareant. Poſt concurſum autem, qui contingit in E, ut æquali celeritate rurſus ab ſe invicem corpora recedant reſpectu vectoris qui poſt alterum tem-

[Fig. 6.] [8])



[9]) D'après l'„Hypothesis II" (p. 31).

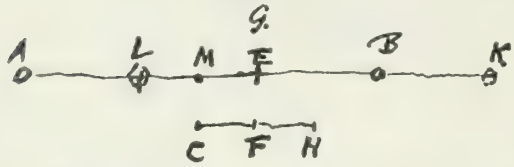
poris ſcrupulum pervenit e regione F puncti tranſijtque ſpatium EF ipſi CE æquale, id aliter fieri nequit quam ut corpus D poſt impulſum in E eodem in loco E ſubſiſtat reſpectu G. atque ut corpus E perveniat usque in B, ità ut ſpatium EB ipſi ED æquale fiat.

Apparet itaque quod ſi reſpectu hom.is G. quiescat corpus E et ab æquali corpore D impellatur, omnem ab eo motum accipiet, ipſumque D corpus relinquet immotum in loco E.

Hinc autem porro quidquid ad occurſum æqualium corporum ſpectat facile determinabitur. Et primum ſi ſcire libeat quid futurum ſit ſi inæquali celeritate mutuo ſibi occurrant facile probabitur permutata invicem celeritate receſſura hoc eſt ut quod celerius fertur omnem motum ſuum lentiori conferat contraque omnem tardioris motum ſibi accipiat [1]).

Ferantur enim ex adverſo corpora æqualia A, B [Fig. 7]. ſed celeritas corporis A ad celeritatem corporis B ſit ut AE ad EB reſpectu ſpectatoris in G manentis.

[Fig. 7.]



Convenient igitur in E. nam ſi ſcrupulo temporis corpus A tranſeat ſpatium AE eodem tempore B tranſibit BE ſpatium. Dico igitur poſt occurſum in E altero temporis ſcrupulo corpus A conſ ęturum ab E ſpatium EL et B ſpatium EK, ut ſit EL æqu. EB et EK ipſi EA. dividatur enim EL bif. in M et ſit C punctum e regione M et ſumatur utraque harum CF, FH æqu. EM. Sedenti itaque in navigio et prætervecto celeritate CF, dum corpus A fertur celeritate AE et B celeritate BE, neceſſe eſt ut videatur utrumque corpus æquali celeritate nimirum AM properare ad occurſum in E [2]) qui fiet cum C pervenerit in F. Quamobrem ejusdem quoque ſpectatoris reſpectu æquali quoque celeritate recedent. Quod

---

[1]) Comparez la Prop. II (p. 37) du Traité „de Motu". Dans ce qui suit Huygens veut donner une démonstration en forme de la Proposition qui, sans doute, lui était connue dès 1652. Il se trompe toutefois. La démonstration est fausse, quoique la Proposition soit vraie.

[2]) Il y a erreur ici. Soit $AE = p$, $EB = q$, de sorte que la vitesse du corps A peut être posée égale à p, celle du corps B à q, et celle CF du bateau égale à $ME = \frac{1}{2} LE = \frac{1}{2} EB = \frac{1}{2}q$. On trouve alors pour la vitesse avant la rencontre du corps A par rapport au bateau: $AM = p - \frac{1}{2}q$; mais pour celle du corps B par rapport au même: $-MB = -\frac{3}{2}q$. Les vitesses ne sont donc égales en grandeur que dans le cas spécial où $p = 2q$. Or, par accident, ce cas spécial est représenté presque parfaitement dans la figure, où $AE = 2EB$. C'est ce qui doit avoir empêché Huygens d'apercevoir son erreur. Évidemment il aurait dû attribuer au bateau, non pas la vitesse $\frac{1}{2}LE$, mais la vitesse $\frac{1}{2}AL = \frac{1}{2}(p - q)$.

[3]) Au dessus des mots „alteri praeterea motui" on lit: „de alio adhuc motu".

quidem non aliter fieri poteſt, quam ut altero temp. ſcrupulo, quo navigans ſpectator pervenit ad H, corpus B conficiat ſpatium EK et A ſpatium EL.

Qui terram quiescere credunt ſolent corpora reſpectu ipſius quiescentia tamquam revera quiescant conſiderare, et reliquorum motum ad ipſa referre.

Sed conveniat hoc inter nos ut corporibus duobus mutuo ſibi occurrentibus etiamſi alteri præterea motui [3]) utrumque ſimul obnoxium ſit [4]), haud aliter invicem repellant reſpectu ejus qui eundem quoque motum ſequitur [5]), quam ſi omnibus alter [6]) iſte motus abeſſet.

Quod movetur ita pergere moveri niſi ab alio impediatur.

Sciendum autem de motibus ijs tantum nos agere qui ſunt ſecundum lineam rectam et æquabiles.

Simpliciter autem nulliusque corporis alterius reſpectu corpus aliquod moveri vel quiescere.

Nam qui motum corporis definiunt loci mutationem locum certum univerſi reſpectu definiri poſſe credunt. Si dicant igitur terram revera quiescere rogabo quid ſit revera quiescere, dicent locum eundem conſtanter obtinere; loci igitur quem terra, tenet definitio ab aliquibus celi [7]) punctis pendet aut ſuperficie quæ revera quiescat. ſed hujus rurſus quietem apparet aliunde aut à terra ipſa definiri debere.

Quidnam in corporibus quies ſit aut motus niſi aliorum corporum reſpectu non videtur intelligi poſſe. Nihil enim de motu nobis imaginari aliud poſſumus quam quod permutet corporum ad ſe invicem diſtantiam et diſpoſitionem. Itaque corpus quod movetur aliorum corporum reſpectu moveri dicatur quibuscum ſitum mutat et quiescere reſpectu eorum quibuscum ſitum ſervat. Neque nobis neceſſe ſit quærere an aliquid in univerſo hoc revera quiescat aut quidnam [8]) illud ſit. An terra conſiſtet an cælum ſtellarum. Sed et hic et ubicunque abiat inter bina

---

[4]) Au-dessus des mots „obnoxium sit" on lit: „participet".

[5]) Au-dessus de „eundem" on lit: „eidem" et au-dessus de „motum sequitur": „motui obnoxius est".

[6]) Au-dessus de „alter" on lit: „adventitius".

[7]) Lisez: „cæli".

[8]) Au-dessus de ce mot Huygens écrivit: „ubinam".

aut plura corpora motus. animadvertitur quodlibet eorum tanquam quiescens reputare liceat. respectu nimirum corporis cujusdam alterius quocum situm servat eundem.

de impulsu corporum scientiam haberi utile. nam et percussionis vires simul innotescunt. Quas maximi ad Mechanica opera momenti esse certum est, neque minus necessarium videtur harum leges intelligere quam rationes ponderum. Æque enim ad omnes fabricas adhibentur et sepe [1]) quod ponderibus exequi non possemus, percussione perficimus.

Difficilem autem contemplationem habet propterea quod motus natura perplexa est, et considerare non assuetis perobscura. Galileus in dialogis de motu locali et difficultatem rei indicat et ea scribit ex quibus aliquid in ea vidisse existimari potest. Verba ipsius interpretari operæ prætium visum est atque hic subjicere. Sic enim Sagredum Confabulatorem inducit loquentem dialogo 4° ante prop. 5 [2]).

Percussionis [3]) *istius atque ictuum mentio meminisse denuo me cogit Problematis cujusdam, imo quæstionis potius Mechanicæ, quam qui explicaverit adhuc inveni neminem, nec qui quidquam memoriæ prodiderit quo aut admirationem mihi eximat, aut ulla saltem ratione satisfaciat Hinc autem dubitatio mihi nascitur et stupor, quod minimè intelligam quæ sit origo aut causa efficaciæ istius et vis immensæ quæ in percussione cernitur* [4]). *Siquidem unico mallei ictu cujus gravitas* 8 *aut* 10 *pondo non excedat, non posse ea resistere videmus quæ nec cedant impositæ gravitati prementi tantum nulloque ictu illisæ etiam si centena aliquot pondo adæquet. Vellem tantum doceri me qua ratione vim istiusmodi plagæ metiri possem, quam sane infinitam esse non arbitror, sed certo termino contineri* [5]) *ut exæquari quoque possit, et cum alijs, prementium ponderum, aut vectis, aut cochleæ viribus comparari quarum potentiæ in quantum multiplicentur optime mihi compertum est. SALVIATUS. Non soli tibi admirationem parit tam stupendi effectus consideratio neque soli causa ejus obscura est. Nam et ipse aliquantum temporis hic contrivi, et frustra quidem, crescente in dies rei perplexitate. Donec convento forte Academico nostro* (Galileum intellige) *geminam cepi consolationem. Primum namque et sese diu mecum in eadem caligine fuisse versatum dicebat*[6]); *tum hoc addebat,*

---

[1]) Lisez: sæpe.

[2]) Il s'agit de la „Giornata quarta" des „Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno à due nuoue scienze", voir les p. 292—293 du T. VIII de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei".

[3]) Nous mettons en italiques la traduction latine, fidèle mais très libre, de Huygens du passage en question des „Discorsi".

[4]) Au-dessus de ce mot Huygens écrivit: „animadvertitur".

[5]) Au-dessus on lit: „definiri".

[6]) On lit au-dessus: „fatebatur".

multis millibus horarum in hanc contemplationem absumptis, tandem aliqua perspexisse [7]) *longe ab ijs quæ prima facie videri soleant diversa atque esse nova omnino, eoque magis mirabilia.* &c.

In fine autem dialogi ubi in aliud tempus differendam hujus rei disquisitionem constituunt ita Sagredus [8]).

Equidem lubens tibi assentio nam sæpe numero quoque à perfamiliaribus Academici nostri id audivisse memini [9]), *obscurissimam esse hanc de Percussione tractationem, nemo nempe adhuc eorum qui explicandam susceperint ad intimos ejus recessus penetrare potuisse densis quippe tenebris obseptos et planè alios quam mens humana sibi figurare soleat. Inter cætera autem effata istud unum recitari mihi memini mirum prorsus, vim scilicet Percussionis interminatam esse ne dicam infinitam.* Hæc Galileus, qui quousque materiam hanc penetraverit non mihi constat [10]). hoc quod refert de immensa percussionis potentia cum nostris demonstrationibus apprime convenit, ostendemus enim maximum quodque corpus minimi corporis impulsu moveri [11]).

Experimenta ad demonstrationem non bene adhiberi scimus, eoque omnia certis ex principijs probanda fore, neque tamen parum id videtur quod Cartesij regulis experimenta omnia contrarium ostendunt, nostris vero adamussim consentiunt.

Nam quod ait [12]) corporum quorumcunque imperfectam duritiem prætereaque circumfusum aerem in causa esse quo minus exhiberi Theorematum suorum veritas possit id nequaquam verisimile est. si enim tantum impedimenti ista adferunt et præterea falsa sunt Theoremata nostra, mirum esset ita semper error alio errore aut defectu materiæ compensari [13]), ut quod prædicimus eventurum in occursu corporum id eveniat. Attamen [14]), et nos perfectam fingemus corporum duritiem ijsque in spatijs librata sumemus quibus neque impediatur eorum motus a circumfusis corporibus neque adjuvetur.

---

[7]) Au-dessus des mots „aliqua perspexisse", on lit: „aliquid percepisse".

[8]) Voir les p. 312—313 de l'édition nationale.

[9]) Au-dessus des mots „id audivjsse memini" on lit: „ita accepisse recordor".

[10]) Comparez la note 1 de la p. 100.

[11]) Consultez la Prop. III (p. 39) du Traité „De Motu".

[12]) Comparez la note 7 de la p. 101.

[13]) Au-dessus de ce mot on lit: „restituetur" et „[restitue]re". Ajoutons que pour adapter la phrase à l'emploi de l'expression „restituetur" le mot „si" fut intercalé entre les mots „esset" et „ita" qui précèdent.

[14]) On lit au-dessus: „Cæterum".

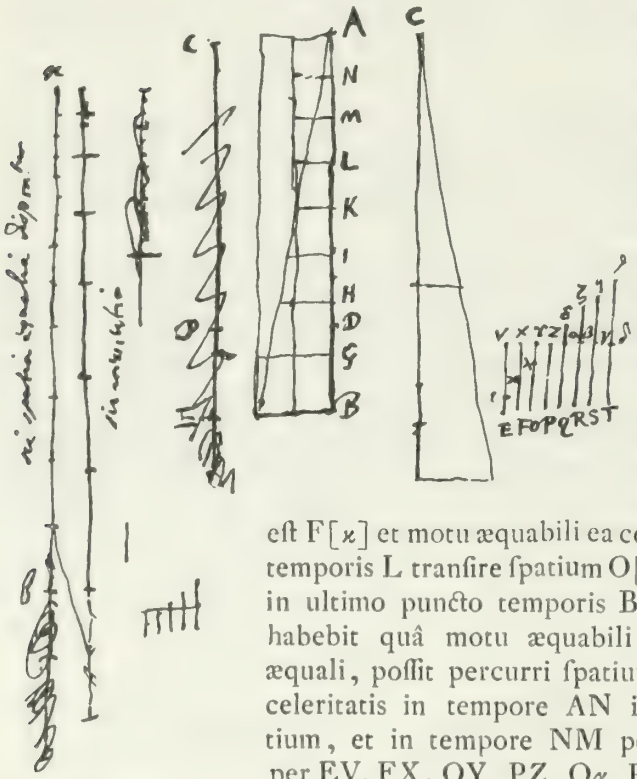
[Septième Partie.] [1]).

[1654.]

nisi principium ponatur nihil demonstrari potest.

si igitur motu æquabili cum dimidia celeritate ejus quam habuit ultimo puncto temp.is AB [Fig. 8] in æquali tempore fecit majus, ergo in minori tempore æquale fecit ut in tempore AD. dividatur AB tempus in tot partes æquales ut una ipsarum sit minor excessu DB. ergo in tempore AG motu æquabili plus fecit quam accelerato AB. et sint lineæ totidem æqualiter sese excedentes ita ut excessus sit minimæ ipsarum æqualis. EFO &c. [3]) item aliæ [4]). Ponaturque mobile in fine partis temporis AN eum celeritatis gradum acquisivisse, quo motu æquabili posset in tempore NM ipsi AN æquali transire spatium E [5]). itaque quum in puncto temporis M, duplam celeritatem acquisiverit ejus quam in N. poterit motu æquabili ea celerita[te] quam habet in M transire spatium duplum E[ι] hoc est F[κ] et motu æquabili ea celeritate quam habet in puncto temporis L transire spatium O[λ], et sic porro. unde tandem in ultimo puncto temporis B eam celeritatem acquisitam habebit quâ motu æquabili in temporis parte ipsi AN æquali, possit percurri spatium TϑΤ. Itaque dimidiâ istius celeritatis in tempore AN ibit per Tϑ hoc est EV spatium, et in tempore NM per FX, et tempore toto AG per EV, FX, OY, PZ, Qα, Rβ, Sγ [6]). hisce autem omnibus æqualia sunt spatia excedentia Eι, Sη cum intermedijs. At tempore NM mobile motu accelerato transijt spatium majus quam Eι, (nam hoc transijsset celeritate æquabiliter continuata quam habebat in puncto temporis N) item tempore ML transijt per spatium majus quam Fκ. et tempore LK majus quam Oλ, et tempore KI majus quam PZ; et IH quam Qε et HG quam Rζ, et GB quam Sη.

[Fig. 8.] [2])



Itaque toto tempore AB motu accelerato majus ſpatium tranſijt quam omnia ſimul crescentia Eι, Sη cum intermedijs, hoc eſt majus quam *xb* [7]). Igitur quod celeritate æquabili ſubdupla maximæ tempore AG peregit ſimul majus eſt et minus quam quod tempore AB fecit motu accelerato. quod eſt abſurdum. Jam ſi fieri poteſt celeritate æquabili dimidiâ maximæ percurrerit ſpatium minus in tempore AB. ergo in majori tempore æquale percurret &c.

Motus diverſos unius mobilis ſeparatim conſiderare licere.

Æquali tempore eandem celeritatem acquiri duobus corporibus, quorum unum à quiete moveri incipiat, alterum quolibet motu.

Si quamlibet in partem mobile prius feratur motu æquabili, deinde vero et naturali accelerationi obnoxium eſſe incipiat, duo motus in eo ſeparatim conſiderari debent, æquabilis qui durat in partem eandem quam prius, et acceleratus cujusmodi ſpectatur in mobili quod e quiete moveri incepit.

Eo demonſtrato vel poſito quod ſpatia peracta ſunt in duplicata ratione temporum alteroque aſſumpto quod demonſtratum eſt nempe quod duobus corporibus duris mutuo ſibi ex adverſo occurrentibus, ſeparationis eorum eadem quæ appropinquandi eſt celeritas [8]), demonſtrari poteſt, quod ſi corpora duo ſibi mutuo occurrant, ſitque velocitas unius ad velocitatem alterius ut magnitudo hujus eſt ad magnitudinem illius, utrumque cum eadem velocitate reſiliet qua venit [9]).

---

[1]) Dans cette Partie nous reproduisons les pages numérotées 21 et 22 (comparez la note 1 de la p. 92). Huygens y démontre d'abord, à l'aide d'une réduction à l'absurde, que le chemin parcouru dans un mouvement uniformément accéléré d'un corps qui se trouvait en repos est égal à celui parcouru dans un mouvement uniforme dont la vitesse est égale à la moitié de la vitesse finale du mouvement uniformément accéléré. Or, on retrouve ce théorème dans la „Giornata terza" des „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze" (1638) de Galilée; voir le „Theorema I, Propositio I" de la p. 208 du Vol. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galilei". Évidemment Huygens se propose de donner de ce Théorème une démonstration plus rigoureuse que celle de Galilée. Remarquons encore que, pour le temps, la vitesse et l'espace parcouru, Huygens adopte les mêmes représentations géometriques que Galilée.

Ensuite Huygens retourne à la considération des règles de la percussion.

[2]) Voici ce qu'on lit sur cette figure, savoir le plus à gauche: „ſic spatia æqualia dispon.tur" et un peu plus à droite „ſic crescentia". Nous n'avons pas voulu supprimer certaines parties de la Figure qui ne servent pas dans la démonstration.

[3]) Voir les lignes Eι, Fκ, Oλ, PZ, Qε, Rζ, Sη, Tϑ.

[4]) Ces deux mots furent intercalés plus tard. Ils expriment probablement l'intention d'indiquer ici plutôt explicitement les lettres PQRST.

[5]) Lisez plutôt Eι, et ainsi de suite.

[6]) On a donc $EV = FX = OY = PZ = Q\alpha = R\beta = S\gamma = T\delta = \frac{1}{2}\, T\vartheta$.

[7]) Voir la ligne la plus à gauche de la Figure.

[8]) Comparez à propos de cette propriété de la percussion des corps durs les notes 7 de la p. 93 et 5 de la p. 94.

[9]) Voir la Prop. VIII (p. 53) du Traité „De Motu".

Ex quo ſolo et hoc demonſtrari poteſt falſum eſſe quod Carteſius putat; ſemper nimirum eandem motus quantitatem in natura remanere [1]), eo ſenſu ut tantundem motus intelligatur in corpore quod duobus gradibus celeritatis movetur, quantum in corpore duplo quod moveatur gradu celeritatis uno. Nam ſi hoc verum, conſequitur inde iſta corporum ſingulorum in recedendo et accedendo æqualis celeritas, nempe cum celeritates corporum occurrentium reciproce ſunt ut eorundem magnitudines. ſed hoc poſito ſi porro adhibeatur conſideratio motus extranei ut navis, rurſus falſum deprehenditur quod ille pro principio poſuit [2]).

Poſſunt et alio quoque modo procedere demonſtrationes noſtræ, poſitis hisce, nempe corpus tantundem aliquò verſus moveri intelligi, quantum ejus centrum gravitatis movetur. tum duo corpora vel plura tanquam unum ex ijs compoſitum conſiderari poſſe. et quod movetur, in eandem partem pergere moveri eadem velocitate donec ab alio impediatur, vel (inita ratione motus ſecundum Carteſij mentem) ſemper tantundem motus manere in partem eandem quantum fuit antea [3]).

Corpus corpori celeritatem tribuens de ſua deperdit.

Demonſtrabuntur autem hæc.

Corpus quantumvis magnum a quamlibet parvo moveri poteſt licet quiescat [4]).

Eadem eſt celeritas appropinquandi in corporibus occurrentibus quæ et ſeparationis. hoc autem jam demonſtratum fuit [5]).

Tum illud de revenientibus ea celeritate qua poſt occurſum reſilierunt [6]).

Et illud de æquali acceſſu et receſſu in ſingulis [7]).

Item quod quantumvis magnum corpus alij minori quiescenti nunquam velocitatem tribuit quæ ſit dupla ſuæ [8]).

Quod æquale æquali omnem ſuum motum transfert et quod eum recipit quem alterum habebat, ſi habuit ullum [9]).

Corpus majus minori occurrens jam ad eandem partem moto, minorem ipſi celeritatem dabit quam ſi quiescenti occurriſſet [10]).

---

[1]) Comparez la note 2 de la p. 49.

[2]) En effet, soient m_A, m_B les masses, v_A et v_B les vitesses par rapport au navire des deux corps qui se rencontrent, et soit $v < v_A < v_B$ la vitesse du navire dans le sens où se meut le corps A. On trouve alors pour la quantité du mouvement avant le choc suivant la conception de Descartes et par rapport à la rive: $m_A(v_A + v) + m_B(v_B - v)$, et après le choc: $m_A(v_A - v) + m_B(v_B + v)$. La différence: $2(m_A - m_B)v$ n'est nulle que lorsque $m_A = m_B$, tandis qu'on a supposé seulement: $m_A v_A = m_B v_B$.

[3]) C'est donc ici la loi de la conservation du mouvement du centre de gravité commun que Huygens a publiée dans le Journal des Sçavans du 18 mars 1669 dans la forme suivante: „Au reste j'ay remarqué une loy admirable de la Nature, laquelle je puis démontrer en ce qui est des corps Spheriques, & qui semble estre generale en tous les autres tant durs que mols, soit que la rencontre soit directe ou oblique: C'est que le centre commun de gravité de deux ou de trois ou de tant qu'on voudra de corps, avance toûjours également vers le mesme costé en ligne droite devant & apres leur rencontre".

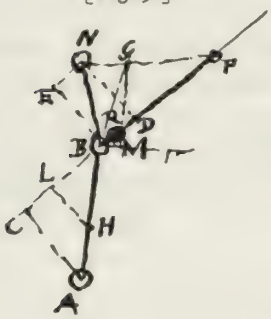
[4]) Comparez la Prop. III (p. 39) du Traité „De Motu".

Varios casus in corporibus inæqualibus [11]).

Item problemata [12]).

Quod quum duo diversa corpora varia celeritate lata idem corpus quiescens æqualiter commovent, aliud corpus non æque commovebunt [13]).

[Fig. 9.]



Quod celeritatis quadrata ducta in quantitatem corporum semper eandem summam producunt ante corporum occursum et post [14]).

De occursu globorum non directo. Esto A [Fig. 9] globus duplus R cui quiescenti occurrat in B. ducatur CBRF per centra utriusque et cadat in eam perpend. AC. et sit BF $\frac{4}{3}$BC, erit F locus globi R post tempus ab occursu æquale tempori quo A venerat ex A in B. Sit BD ∞ $\frac{1}{3}$CB vel $\frac{1}{4}$BF, et sit perpend. DN æqualis AC

---

5) Voir les p. 96—97.

6) Voir la Prop. V (p. 47).

7) Huygens a en vue la Prop. VIII; voir la p. 53.

8) Voir la Prop. VII (p. 51).

9) Voir la Prop. II (p. 37).

10) On ne rencontre pas cette remarque dans le Traité „De Motu", mais on la déduit facilement des propositions qu'on y trouve. En effet l'augmentation de la vitesse du deuxième corps ne dépend, d'après le Principe de la relativité, que de la vitesse relative des deux corps. Elle est égale à $\frac{2m_A}{m_A + m_B}(v_A - v_B)$, et la condition $m_A > m_B$ est même superflue pour assurer la justesse de la remarque. Il est clair d'ailleurs que cette remarque et l'une des suivantes (voir le troisième alinéa de la p. 117) avaient pour but de pénétrer plus avant dans la nature de la force de la percussion.

11) Voir la Prop. IX (p. 65) du Traité „De Motu".

12) En fin de compte Huygens n'a pas ajouté de problèmes au texte de son Traité „De Motu", comme il l'a fait pour le Traité sur le calcul dans les jeux de hasard, publié en 1657; voir les p. 89—91 de notre T. XIV. D'ailleurs on rencontrera plus loin aux pp. 133, 134 et 135 trois des problèmes en question et peut-être les deux mentionnés dans la note 3 de la p. 154 y doivent être comptés aussi.

13) Soient A et B les deux corps différents, possédant les vitesses v_A et v_B; la condition requise pour qu'ils donnent la même vitesse au corps C en repos est alors, d'après la deuxième formule de la note 1 de la p. 67:

$$\frac{2m_A}{m_A + m_C} v_A = \frac{2m_B}{m_B + m_C} v_B, \text{ ou bien, } \frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B(m_A + m_C)}{m_A(m_B + m_C)}.$$

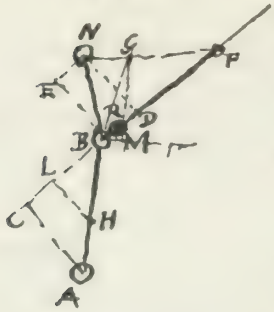
Or, pour un corps D en repos, remplaçant le corps C, la même condition exige:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{m_B(m_A + m_D)}{m_A(m_B + m_D)},$$

et il est facile de montrer que ces deux rapports ne sont égaux que lorsqu'on a $m_C = m_D$, ou $m_A = m_B$.

14) Voir la Prop. XI (p. 73) du Traité „De Motu".

[Fig. 9.]



erit N locus globi A, ſimul atque R eſt in F. et BN tranſitus ex B in N [1]). poteſt ad horum demonſtrationem etiam conſideratio motus extranei adhiberi [2]). apparet etiam NF, AB æquales [3]) eſſe. nam ND æq. AC et DF æq. CB, et triang.a ſunt rect.la [4]) imo HBG linea recta. BGF Δ iſosceles [5]).

De occurſu indirecto quando uterque movetur ſive in partes contrarias, ſive in easdem. et vel directè vel indirectè in partes contrarias vel easdem, hoc eſt in lineis parallelis vel non parallelis [6]).

Cur globus æquali impactus in tabula non quiescat, in cauſa eſt motus circa cent. [Fig. 10.]

[Fig. 10.] [7])

[Huitième Partie.] [8])

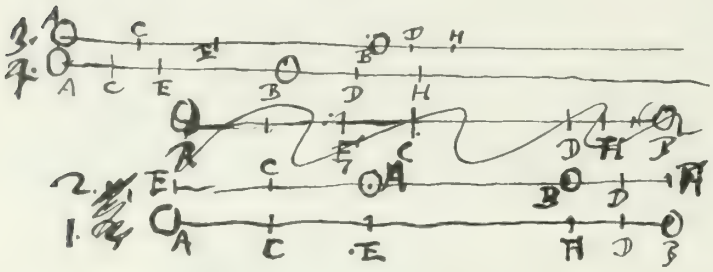
[1654.]

Secundum hoc corrige in ſequentibus, Sed non puto hoc ipſo opus eſſe [9]).

Si duo corpora in eadem linea recta ferantur in partes contrarias, movebitur alterum alterius reſpectu velocitate ex utriusque corporis velocitatibus compoſita, ſi vero in eandem partem ferantur, alterum alterius reſpectu movebitur velocitate qua celerioris velocitas velocitatem tardioris excedit.

Figura quæ in fine eſt pag. hujus [10]). Moveantur in eadem recta corpus A [Fig. 11] velocitate AE et B velocitate BH. et primo quidem in partes contrarias [11]).

[Fig. 11.]



Cum igitur quo tempore peragant corpus A ſpatium AE et B ſpatium BH eodem diſtantia ipſorum AB diminuatur vel augeatur

[1]) Évidemment Huygens part de la supposition que le frottement qui a lieu pendant le choc peut être négligé, puisqu'il prend DN = AC et qu'il ne fait pas sortir le globe R de la ligne CF. De plus il traite le choc comme si elle avait lieu dans cette ligne CF entre le corps A avec la vitesse CB et le corps R en repos, tandis que $m_A = 2m_R$. On trouve alors, en effet, par les formules de la note 1 de la p. 67 : $v'_A = BD = \frac{1}{3} v_A = \frac{1}{3} CB$ et $v'_R = BF = \frac{4}{3} v_A = \frac{4}{3} CB$.

Or, ces résultats sont conformes à la théorie moderne de la percussion sans frottement des

ſpatio ex utrisque AE et BH compoſito manifeſtum lineam utrique ſimul AE et BH æqualem menſuram eſſe celeritatis qua corpora A B mutuo reſpectu feruntur, cum nimirum AE linea celeritatem denotat corporis A et BH corporis B. At ſi eandem partem corpora ferantur [12]) quoniam quo tempore A corpus tranſit ſpatium AE et B ſpat. BH, eodem tempore diminuitur rurſus vel augetur diſtantia corporum A B ſpatio quod æquale ſit differentiæ duarum AE, BH. Evidens eſt hanc eandem differentiam menſuram eſſe velocitatis qua corpora mutuo reſpectu moventur, cum AE et BH menſuram referunt velocitatum in corporibus A et B.

Corporis cujusvis velocitas, alterius corporis reſpectu quod in eadem recta movetur æſtimetur ſecundum augmentum vel diminutionem ejus quæ inter utrumque eſt diſtantiæ.

---

corps durs. Elle amène immédiatement DN = AC et puisque la somme algébrique des quantités de mouvement dans la direction CF doit rester constante et que, de plus, la composante de la vitesse relative dans cette direction doit changer de signe sans changer de grandeur pendant le choc (d'après un théorème très général; voir la p. 26 de l'Avertissement qui précède), il est permis de calculer les composantes des vitesses dans la direction CF comme si celles perpendiculaires à cette direction n'existaient pas.

[2]) En effet de cette manière le cas général du choc oblique peut être réduit à celui où l'un des deux corps est en repos.

[3]) C'est-à-dire que la vitesse d'éloignement après le choc est égale à la vitesse d'approchement avant le choc. Or, c'est là une propriété générale du choc oblique sans frottement des corps durs sphériques dont le centre de la figure coïncide avec le centre de gravité.

Pour le montrer considérons les composantes de la vitesse relative des corps dans la direction AB de leurs centres et dans celle perpendiculaire à celle-ci. La dernière de ces composantes ne change pas par le choc et l'autre change de signe sans changer de grandeur. Par conséquent leur résultante change de direction mais non pas de grandeur.

[4]) Savoir les triangles rectangles ABC et NDF.

[5]) À cause de la congruence des triangles BAC et FND on a $\angle NFD = \angle CBA$ et, par suite, $= \angle GBF$. Donc le triangle BGF est isocèle.

[6]) Huygens ne s'occupe pas du choc oblique dans son Traité „De Motu".

[7]) La figure représente évidemment une bille de billard, mois il semble difficile de deviner ce que signifie la ligne légèrement courbée qui semble partir du centre de la bille. Comparez la note 10 de la p. 107.

[8]) Cette Partie est empruntée aux pages numérotées 23 et 24 par Huygens.

[9]) En effet les considérations qui suivent dans cette Huitième Partie n'ont pas l'importance et l'originalité de tant d'autres qu'on trouve dans l'Appendice présent et Huygens ne les a pas reproduites dans son Traité „De Motu". Toutefois nous n'avons pas voulu les supprimer.

Évidemment Huygens se propose d'y traiter aussi rigoureusement le mouvement uniforme relatif que Galilée avait traité le mouvement uniforme général dans le Chapitre, intitulé „De motu æquabili" de la „Giornata terza" de l'ouvrage mentionné dans la note 1 de la p. 115; voir les p. 191—196 du Vol. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galilei".

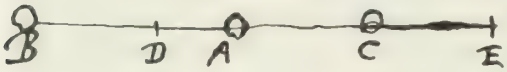
[10]) Nous avons préféré la reproduire ici.

[11]) Voir dans la Fig. 11 les parties marquées 1 et 2 par Huygens.

[12]) Voir les parties marquées 3 et 4.

Atque adeo æque velociter aliorum reſpectu moveri dicantur quæ eodem vel æquali tempore pari quoque ſpatio ab alijs recedant vel accedant.

[Fig. 12.]



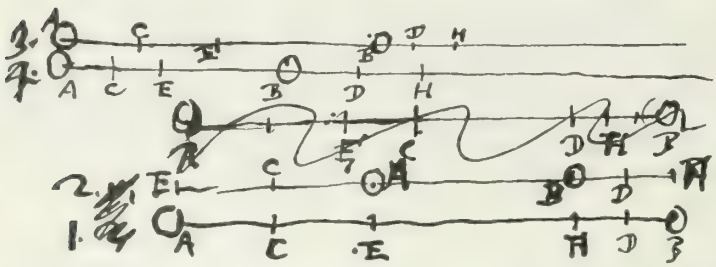
Etiam cum alterum ei corpori ad quod refertur appropinquat, alterum recedit. Veluti poſitis in eadem recta corporibus A, B, C [Fig. 12]. Si æquali temporis intervallo peragat corpus B ſpatium BD accedendo ad A, corpus vero C ſpatium ipſi æquale CE, ſed ab A recedens; dicentur tamen reſpectu corporis A pari velocitate moveri corpora B et C.

Theorema.

Si corpora duo in eadem recta inæquali celeritate ferantur, dummodo utrumque motu æquabili, etiam alterum alterius reſpectu æquabili motu procedet.

Ponantur corpora A et C [1]) [Fig. 11] quæ in eadem recta ferantur motu æquabili. A verſus E et B verſus H.

[Fig. 11.]



Quatuor autem ſunt caſus [2]); nam vel in contrarias partes motus contingit, idque vel accedendo vel recedendo. Vel in partem eandem, ubi rurſus differentia eſt, quod vel præcedens corpus tardius ſubſequente moveatur vel celerius.

Dicimus itaque quibuscunque æqualibus temporis intervallis etiam ſpatijs æqualibus diminui vel augeri diſtantiam inter corpora A, B. Sumatur quæcunque temporis pars quâ corpus A tranſiverit ſpatium AC, corpus B verò ſpatium BD. Sequente igitur parte temporis quæ priori æqualis ſit, peraget A ſpatium CE ipſi AC æquale quoniam motu fertur æquabili, atque item corpus B ſpatium DH æqu. BD. Unde apparet æqualibus temporibus in primo quidem caſu deceſſiſſe diſtantiæ corporum AB partes æquales quantum nimirum efficiant duæ ſimul AC et BD. Sequenti vero caſu tantundem ſingulis temporibus acceſſiſſe diſtantiæ AB.

Rurſus tertio caſu ſingulis temporibus tantum illam diminui quanta eſt differentia duarum AC, BD. Eandem denique differentiam poſtremo caſu ſingulis temporibus accreviſſe.

[Neuvième Partie.] [3])

[1654.]

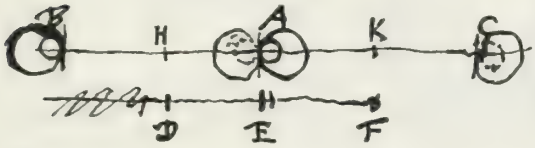
Impiger et ſtudio tenear licet usque ſevero,

Theorema I.

Si corpori quiescenti occurrat aliud ipſi æquale poſt occurſum quiescet hoc, omnisque motus alteri acquiretur[4])

Quiescenti corpori A [Fig. 13] occurrat æquale corpus B, dico poſt occurſum quiescere hoc debere, celeritatemque qua advenerat omnem transferre in corpus A. Ideoque ſi unam temporis partem inſumpſit B dum pergit B ad A, alteram illi æqualem inſumet A dum percurrat ſpatium AC ipſi AB æqu. Dividantur enim diſtantiæ BA, AC utraque bifariam in H et K ductaque DF parall. BA, ſint puncta D, E, F e regione punctorum H, A, K. Igitur motu æquabili et celeritate dimidia corporis B navi deferatur ſecundum lineam DF, is quidem dum B pervenit ad A conficiet ſpatium DE diſtantiæ BA dimidium. Atque ipſius reſpectu æquali velocitate corpora B et A ſibi mutuo occurrent. Ergo quoniam mole etiam æqualia ſunt debebunt ejusdem ſpectatoris reſpectu, ea qua venerunt velocitate utraque reverti [5]). Ideoque ſi unam temporis partem impenderunt priusquam ſeſe mutuo attingerent, poſt alteram tantam unumquodque in locum priſtinum revertiſſe debebit, dicti ſcilicet ſpectatoris reſpectu qui interea tranſijt ſpatium EF ipſi DE æquale. Quod quidem non aliter fieri poteſt quam ſi corpus A confecerit ſpatium AC ipſi BA æquale et B reſtiterit ad occurſum corporis A. ſicut enim ſpectator in D conſtitutus erat e regione puncti H medij inter corpora BA, ita rurſus in F e regione puncti K quod medium eſt inter corpus B reſtantis [6]) ad occurſum A et corpus A delatum in C. Itaque ſic fieri neceſſe eſt quemadmodum fuit propoſitum.

[Fig. 13.]



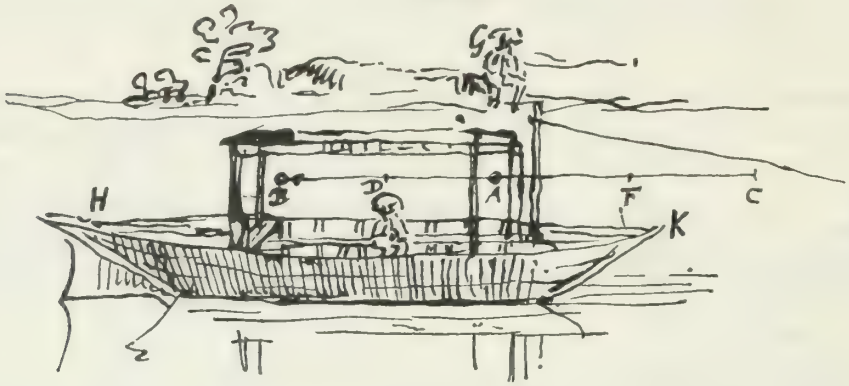
Cæterum quia ſequentium quoque demonſtrationum vis omnis in huiusmodi

---

[1]) Lisez: B.
[2]) Voir les parties marquées 1, 2, 3, 4 de la Fig. 11.
[3]) Cette Partie est empruntée aux pages du Manuscrit numérotées 25—28.
[4]) Comparez la Prop. I (p. 33) du Traité „De Motu".
[5]) Voir l'„Hypothesis II" (p. 31) du Traité „De Motu".
[6]) Lisez: restans.

relatione motus ad diverſa corpora conſiſtit idcirco paulo manifeſtius ob oculos ponenda videtur demonſtratio primi hujus theor.[is]. Eſto igitur navigium HK [Fig. 14] quod æquabili motu pergat dextram verſus. Inque eo ſedeat vector e regione punctu D. Cujus reſpectu æquali celeritate ferantur ad ſe mutuo corpora æqualia B, A. Quæ quidem æqualibus ſpatijs exſiſtentibus DB, DA, concurrent in D, vectoris reſpectu et poſt mutuum impulſum, ejusdem reſpectu, æquali rurſus celeritate digredientur. Quod ſi vero eodem tempore (puta ſecundi unius)

[Fig. 14.]



quo corpora B et A venere ad occurſum in D, navigium et cum ipſo unâ vector confecit ſpatium DA, neceſſe eſt corpus A immotum permanſiſſe reſpectu ripæ G aut ſpectatoris ibi conſiſtentis; corpus verò B confeciſſe omne ſpatium BA. Nam non aliter fieri poteſt, iſtis poſitis, ut vectori corpora B et A æquali celeritate ſibi invicem occurriſſe appareant. Poſt concurſum autem qui contingit in A reſpectu ripæ, ut æquali rurſus celeritate à ſe invicem corpora recedant reſpectu vectoris, qui altero temporis ſecundo tranſijt ſpatium AF ipſi DA æquale, id aliter fieri nequit quam ſi corpus B quiescat poſt impulſum in A reſpectu ſpectatoris G, atque ut corpus A percurrat dicto temporis ſecundo ſpatium AC ipſi BA æquale.

Itaque reſpectu ſpectatoris G, primo temporis ſcrupulo pervenit corpus B ad A quiescens altero autem ſcrupulo confecit corpus A ſpatium AC ipſi AB æquale, et B reſtitit omnis motus expers ad occurſum in A.

---

[1]) Comparez la Prop. II (p. 37) du Traité „De Motu".

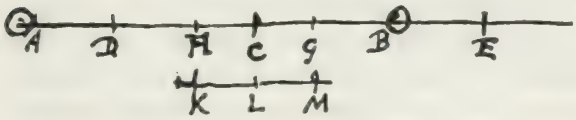
[2]) Posant $AC = v_A$, $BC = v_B$, on a (en ayant égard à la direction contraire de v_A et v_B): $AH = \frac{1}{2}(v_A - v_B)$ et, par suite, $KL = HC = AC - AH = v_A - \frac{1}{2}(v_A - v_B) = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$.

[3]) Ce qui va suivre jusqu'aux mots: „Sed mole" est difficile à déchiffrer à cause des nombreuses ratures et altérations.

Theorema 2.

Si corpora duo æqualia inæquali celeritate moveantur et vel à contrarijs partibus venientia inter ſe collidantur, vel in eandem partem tendente utroque tardiùs præcedens à ſubſequente propellatur; permutata invicem celeritate exinde ferentur [1]).

[Fig. 15.]



Tendant primo in partes contrarias corpora æqualia A et B. Et A quidem celeritate AC: B verò celeritate minore BC. Occurrent igitur ſibi mutuo in C. Dico reverſurum inde corpus A celeritate CD ipſi BC æquali corpus verò B celeritate CE æquali AC. Hoc eſt ſi prima temporis parte corpora A et B venere in C, poſt alteram temporis partem priori æqualem invenietur corpus A in D, et B in E. Dividatur enim diſtantia AB bifariam in H, ſitque CG æqualis CH, et ducta KM parallela AB ſint puncta K L M e regione punctorum H, C, G. Qui igitur prætervehitur celeritate KL [2]), dum A fertur celeritate AC et B celeritate BC [3]), is perveniet in L cum utrumque corpus ad C convenerit, et reſpectu ipſius æquali celeritate procedent corpora A et B. cum enim æquali prius ſpatio corpus utrumque ab ipſo fuerit remotum, eodem tempore utrumque ex adverſo ipſi factum eſt in C [4]). Sed mole quoque æqualia ſunt corpora, ergo pari rurſus celeritate a ſe invicem recedere ea neceſſe eſt, ejus quem diximus reſpectu [5]) Quare ſi unam temporis partem inſumpſere ante mutuum contactum, debebunt ab occurſu poſt alteram temporis partem ad priſtinum locum quodque revertiſſe, dicti ſpectatoris reſpectu, qui interea confecit ſpatium LM. Id vero fieri non poteſt niſi, quod corpus A tranſierit ſpatium CD, et B ſpatium CE. Eſt enim diſtantia DE æqualis ipſi AB, quoniam utraque ſeorſim CD, CE æquales utrique CB, CA. Verum et CG æqualis eſt CH; ergo tota quoque GD æqualis HB. Sed HB dimidia eſt ipſius AB, ergo et GD dimidia DE; ideoque diſtantia DE bifariam dividitur in G. Unde manifeſtum eſt ſitum corporum in D et E, reſpectu ſpectatoris in M quod eſt e regione puncti G eundem eſſe qui fuerat corporum in A et B conſtituto ipſo in K.

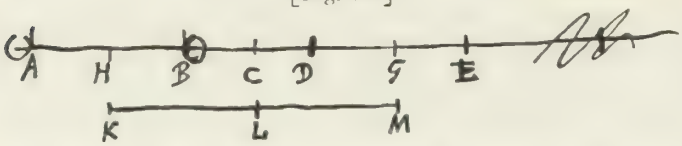
---

[4]) On lit encore en marge: AC ∞ CE, GE ∞ HA v[idelicet] HB, DC ∞ CB, AH ∞ GD ∞ HB v. HA.

[5]) Voir toujours l'„Hypothesis II" p. 31.

Sed nunc corpus utrumque in eandem partem moveri intelligatur, B [Fig. 16] quidem celeritate BC, et A celeritate AC. hoc igitur attinget corpus BC [1]) in puncto C. Dico autem utrumque in eandem partem uti prius delatum iri ſed permutata invicem celeritate, ut A feratur celeritate CD ipſi BC æquali; B vero celeritate CE æquali AC quantam ſcilicet prius habuit corpus A. Poſitis enim ſicut in caſu præc. punctis H, G et K, L, M [2]). Evidens eſt ei qui præterveheretur celeritate KL dum A fertur celeritate AC, et B celeritate BC, ei inquam pari celeritate utrumque corpus moveri [3]), et conjungi utrumque in C cum ipſe eſt in L. Æquali igitur celeritate utrumque recedere neceſſe eſt ejusdem ſpectatoris reſpectu [4]), qui ſecundo tempore conficit ſpatium LM. ideoque ipſo in M perveniente debet punctum e regione G eodem modo ſeſe habere ad corpora in D et E, uti punctum H ad eadem in A et B. Quod ſane fieri non poteſt niſi quo tempore ſpectator venit ab L ad M, corpus B peragat CE ipſi CA æquale et A corpus ſpatium CD æquale CB. Ergo ſic fieri neceſſe eſt ut fuit prop.

[Fig. 16.]



Ex [5]) quovis impulſu corpora non niſi æquabilem motum nancisci. hoc eſt quo æqualibus temporibus æqualia ſpatia percurrant.

[Etſi in alijs quoque corporibus locum habeant quæ demonſtraturi ſumus, ſphæras tamen adhiberi [6]).]

Sphæras quidem quarum centra in eadem recta moventur propter mutuum impulſum lineâ non excedere, quoniam abſurdum dictu eſſet magis ad unam quam ad aliam partem deflectere.

Reliquis vero corporibus idem evenire quando contactus punctum in eam rectam incidit, ſecundum quam utriusque gravitatis centra moventur [7]).

Quoniam ſpatia à diverſis corporibus æquali tempore peracta motu æquabili,

---

[1]) Lisez: B.

[2]) Savoir de sorte que AH = HB, CG = CH, tandis que les points K, L, M correspondent aux points H, C, G.

[3]) Puisque AC — KL = AC — HC = AH et KL — BC = HC — BC = HB, où par construction AH = HB.

[4]) Voir l'„Hypothesis II", p. 31.

[5]) Ce qui suit encore dans cette Neuvième Partie constitue évidemment des considérations préalables dont Huygens, à une époque donnée, a voulu faire précéder ses Théorèmes sur la percussion des corps.

in eadem qua velocitates ſunt ratione. Ideo velocitatum rationem ratione ſpatiorum metiemur quæ ijſdem vel æqualibus temporibus percurſa ſunt. Veluti cum ſimul corpus A [Fig. 17] moveri dicetur celeritate AC, et corpus B celeritate BC, intelligendum eſt eodem temporis intervallo percurriſſe corpus A ſpatium AC et corpus B ſpatium BC. Velocitatibus eam inter ſe rationem tenentibus quæ eſt linearum AC ad BC.

[Fig. 17.]

Præterea ex ordine quo terminos linearum appellabimus, intelligatur in quam partem motus contingat. Veluti cum corpus A dicetur moveri celeritate AC id ſignificabit certo temporis intervallo perveniſſe æquabili motu ab A ad C, non à C ad A. Similiter cum dicetur poſtea ferri celeritate CD, ſignificatur alia temporis parte quæ ſit priori æqualis perveniſſe ex C in D. Ut enim poſſit ratio lineæ AC ad CD proportionem deſignare velocitatum, oportet ſpatia AC, CD equalibus temporibus decurſa fuiſſe.

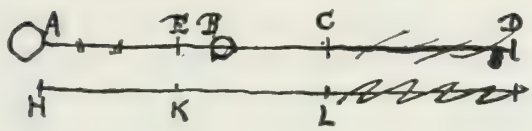
[Dixième Partie.] [8])

[1654.]

Generaliter [9])

Si majus corpus minori quiescenti allidatur eadem celeritate à ſe invicem corpora discedunt, qua movebatur majus [10]).

[Fig. 18.]



Feratur corpus A [Fig. 18] celeritate AB ad corpus B quod quiescat ſitque ipſo A minus. Dico poſt impulſum receſſura à ſe invicem corpora eadem celeritate AB. Hoc eſt, ſi temporis parte una tranſiverit A ſpatium AB; poſt alteram ſimilem

---

6) La phrase entre parenthèses fut biffée depuis; mais elle nous semble propre à expliquer ce qui va suivre.

7) Huygens oublie que de plus au point de contact le plan tangent commun doit être perpendiculaire à la droite en question.

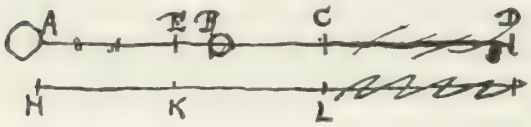
8) Cette Partie est empruntée aux pages numérotées 29—32 et, vers la fin, à ce qu'on lit à la page numérotée 20 invertie; voir la note 11 de la p. 131.

9) Ce mot fut écrit par Huygens en haut de la page à une époque inconnue.

10) Comparez (p. 43) la Prop. IV du Traité „De Motu". Il est vrai que la Proposition présente est moins générale, mais il est clair qu'à l'aide du Principe de la relativité on en peut déduire facilement la Prop. IV elle-même. C'est ce que Huygens va bientôt accomplir; voir la p. 127 qui suit.

temporis partem rurſus intervallo ipſi AB æquali ſejuncta fore corpora. Quod ut fiat manifeſtum ſciendum eſt imprimis, corpus quidem B ab A majore propelli [1]. ipſi vero A de tribus unum contingere debere, ut poſt impulſum vel omnino conquiescat, vel retro feratur, vel denique ut prorſum ire pergat. E quibus hoc poſterius ſemper verum eſſe in ſequentibus oſtendetur [2], ſed in preſens quodcunque è tribus ſtatuatur propoſitum comprobabimus.

[Fig. 18.]



Primo igitur ponamus pulſo corpore B corpus A tamen pergere moveri in partem eandem. Quia autem motum dedit corpori B aliquid de ſua celeritate remiſit [1]. Itaque cum primo tempore confecerit ſpatium AB, ſequenti tempore ponatur confeciſſe BC ſpatium ipſo AB minus. dico corpus B eodem ſecundo percurriſſe ſpatium BD ita ut diſtantia corporum CD æqualis ſit ipſi AB. Dividatur enim AC bifariam in E, ſintque puncta H, K, L ex adverſo punctorum A E C in linea ipſi AB æquidiſtante. Si quis igitur prætervehatur celeritate HK, dum corpus A fertur celeritate AB eum primo tempore prætervertet corpus A ſpatio EB ſequenti verò exacto tempore cum ipſe pervenerit in L rurſus ex adverſo ipſi continget corpus A, pervenit enim in C. Itaque reſpectu ejus qui ſic prætervehitur eandem celeritatem habet corpus A ante et poſt impulſum. Quare neque corpus B quidquam de motu aut celeritate ſua amiſiſſe oportet [3]. dicti autem ſpectatoris reſpectu qui vehebatur celeritate HK, habuit corpus B tempore primo cum quiesceret eam ipſam celeritatem HK. Ergo tantam quoque altero tempore conſervaſſe ipſum neceſſe eſt. Ergo vel in eandem partem ſervavit celeritatem omnem vel in contrariam, ſpectatoris ſcilicet reſpectu. Sed non in partem eandem, quia debuiſſet ſemper quietum remanſiſſe in B, *quod non fieri jam ab initio dictum fuit* [4]. Ergo in contrariam. quum igitur primo tempore appropinquarit ad ſpectatorem celeritate HK, ſequenti tempore pari celeritate ab ipſo recedere neceſſe eſt. Quamobrem cum primi temporis initio præceſſerit corpus B ſpectatorem in H

---

[1]) Voir (p. 39) l'„Hypothesis IV" du Traité „de Motu".

[2]) Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 129. La Proposition en question ne fut pas formulée expressément dans le Traité „De Motu". Consultez d'ailleurs la première formule de la note 1 de la p. 67 pour le cas $v_B = 0$.

[3]) Voir l'„Hypothesis V" (p. 41).

[4]) Huygens souligna la phrase que nous avons mise en italiques et annota en marge, évidemment comme préférable, la phrase: „quod est absurdum cum ita penetrare debuerit corpus A".

[5]) Consultez la note 10 de la p. 125.

[6]) Voir le „Theorema 2" de la p. 123.

[7]) Ces quatre cas sont indiqués dans la Fig. 21.

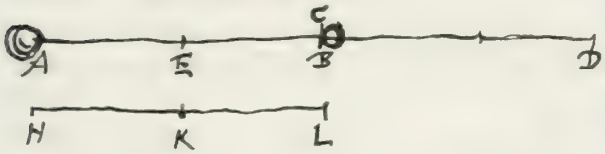
conſtitutum ſpatio AB, eundem exacto ſecundo tempore cum in L conſtitutus eſt, æquali ſpatio CD præcedere debet. ergo conſtat propoſitum.

Dicatur nunc corpus A poſtquam pepulit B quiescens, retrorſum agi, celeritate BC, [Fig. 19] quæ quidem minor erit celeritate AB qua venerat [1]), quia aliquam contulit corpori B.

[Fig. 19.]

Cum igitur ſecundo tempore exacto pervenerit corp. A in C, dico corpus B fore in D, ita ut diſtantia CD ipſi AB æqualis ſit. Eſtque demonſtratio eadem quæ in caſu præcedente.

[Fig. 20.]

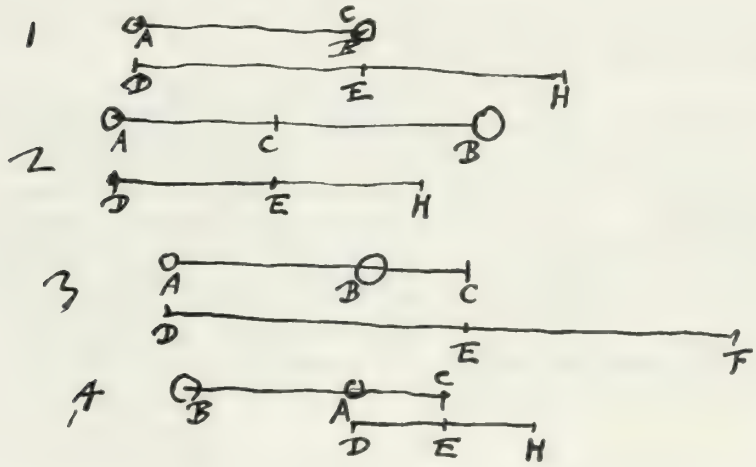


Denique fingamus corpus A pulſo B quiescere. Dico neceſſe eſſe ut corpus B currat celeritate BD ipſi AB æquali. Neque hic diverſa eſt demonſtrationis ratio, coeuntibus in unum punctis B et C.

Quoties duo corpora inter ſe colliduntur, eadem eſt, mutuo reſpectu, discedentibus celeritas, quæ fuit appropinquantibus [5]).

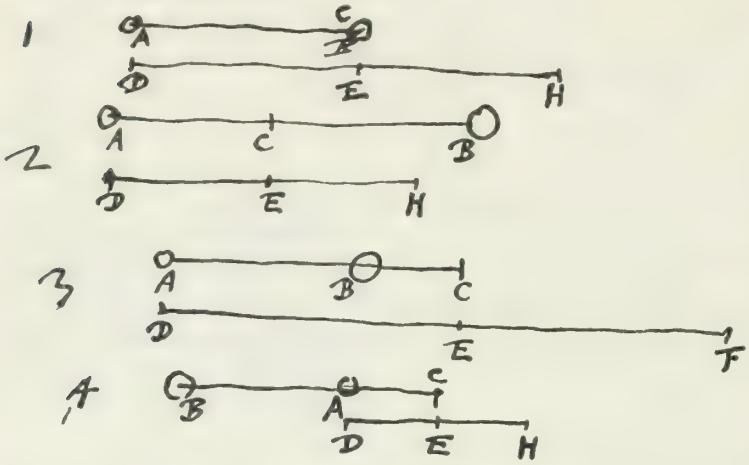
Æqualibus corporibus jam antea accidere demonſtratum fuit [6]). Sed et inæqualibus eo casu quo minus quiescit. Unde quatuor adhuc caſus ſuperſunt [7]). Nam vel majus e duobus quiescit, vel ex adverſo ad ſe invicem feruntur, vel celeriori motu minus inſequitur majus, vel contra. Quos ſimul omnes proponemus demonſtrabimusque. Sit ergo corpus A [Fig. 21] minùs quam B. Et feratur A celeritate AC, B verò vel omnino quiescat vel habeat celeritatem BC. Cum igitur ante occurſum mutuo reſpectu corpora habuerint celeritatem AB dico et poſt occurſum mutuo reſpectu parem ipſi AB celeritatem habitura. hoc eſt, ſi una pars temporis interceſſerit priusquam

[Fig. 21.]



corpora A et B in C convenirent dico ſequente altera æquali temporis parte exactâ, rurſus intervallo quod ipſi AB æquale ſit ſejuncta fore. Si quis enim pretervehatur celeritate DE ipſi AC æquali quâ fertur corpus A, ejus reſpectu ipſum A quiescit, et ſolum B movetur celeritate BA. Eſt autem A minus quam B. Ergo per anteced. [1]) ejusdem prætervecti reſpectu etiam eadem celeritate AB corpora poſt occurſum a ſe invicem recedent, adeo ut finito æquali poſt impulſum tempore cum ipſe confecerit ſpatium EH æquale DE diſtent rurſus intervallo ipſi AB æquali. Hoc autem fieri nequit niſi revera et cujusvis alterius reſpectu eo ſpatio diſtent. Ergo ſicut propoſitum eſt continget.

[Fig. 21.]

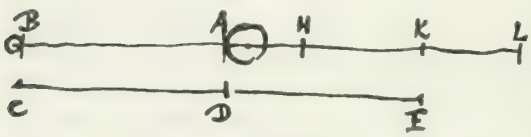


Theorema.

Corpus omne quiescens à quamlibet exiguo corpore et celeritate qualibet impacto movetur [2]).

Quiescat corpus A [Fig. 22], et occurrat ei qualibet celeritate corpus B ipſo A minus. Dico hoc ab illo moveri.

[Fig. 22.]



Sumatur AK æqu. AB ſintque puncta C, D, E ex adverſo punctorum B, A, K in linea ipſi BA parallela. Si ergo prætervehatur quis celeritate ea qua fertur corpus B, ut quo tempore B conficit ſpatium BA, ipſe percurrat æquale ſpatium CD,

[1]) Voir, p. 125, le début de la présente Dixième Partie.

ejus reſpectu quiescit corpus B, totaque hujus celeritas attribuitur [3]) corpori A. Quare poſt impulſum, debet ejusdem ſpectatoris reſpectu qui ſecunda temporis parte priori æquali confecit ſp. DE, moveri corpus B, A vero remiſiſſe aliquid de ſua celeritate aut omnem amiſiſſe [4]). Horum vero utrumvis non aliter fieri poteſt quam ſi aliquid ſpatij percurrat ab A verſus K, puta ſpatium AH. Nam ſi in A quietum maneret, tum dicti ſpect.is reſpectu nihil de celeritate ſua amiſiſſet quod eſſe nequit. Itaque motum accepit corpus A occurſu corporis minoris B. Cæterum ſpatium AH minus eſſe debere quam AB vel AK manifeſtum eſt quia minorem celeritatem à corpore B accepit A quam ipſum B habuerit.

Carteſij vero falſas eſſe regulas præter primam omnes ex hac et præcedentibus propoſitionibus [5]) manifeſtum eſt. Nam huic quidem contrarium plane ſtatuit, corpus ſcilicet majus quiescens nullo ictu vel tantillo minoris moveri poſſe [6]).

Axioma ſit. quod minus corpus majori quiescenti occurrens dabit ei minorem quam habet ipſum celeritatem [7]), nam quod aliquam conferet ex ijs quæ hic antea poſita ſunt probabitur [8]).

Corpus quiescens à diverſæ magnitudinis corporibus ſingulis ſeorſim impulſum, majorem celeritatem à majori accipere quam à minori ſi eadem celeritate utrumque occurrat [9]).

Inde quod majus minori quiescenti occurrens continuat motum ſuum in eandem partem [10]).

Tum theorema in principio phyliræ [11]): Si majus &c. [12])

---

[2]) Comparez (p. 39) la Prop. III du Traité „De Motu".

[3]) Au-dessus de ce mot on lit: „cedit".

[4]) Voir (p. 39) l'„Hypothesis IV" du Traité „De Motu".

[5]) Nous ne savons pas quelles Propositions Huygens a en vue ici.

[6]) Voir la note 1 de la p. 38. Ajoutons que cet alinéa avait été biffé par Huygens, mais que plus tard il écrivit en marge: „non delendum".

[7]) On ne rencontre pas cet „Axioma" parmi les Hypothèses du Traité „De Motu".

[8]) Voir p. e. la démonstration du „Theorema" de la p. 128.

[9]) Cet „Axioma" ou „Propositio" manque dans le Traité „de Motu". Ajoutons que cet alinéa et l'alinéa précédent furent biffés mais qu'on lit en marge: „hoc retinend.".

[10]) Pour déduire cette Proposition de ce qui précède il suffit d'ajouter aux mouvements considérés dans le premier „Axioma" un mouvement commun qui, avant le choc, réduit le corps plus petit au repos.

[11]) Lisez: „philyræ".

[12]) Voir, p. 125, le début de la Dixième Partie, laquelle Partie est écrite en entier sur une même feuille („philyra") de quatre pages à l'exception des quatre derniers alinéas.

tum ſequens [1]). Tum quod minus à majori reſilit [2]), ſi non poteſt aliter. Quod majus minori quiescenti minorem quam duplum ſui dat [3]).

Hactenus demonſtratum eſt quod non tantum minus à majore corpore moveri poteſt, ſed et à minore majus [4]). item quæcunque ad corporum æqualium impulſum pertinent explicata fuerunt [5]). Data autem corporum inæqualium magnitudine et celeritate, ut definiri poſſit quatenus hæc ab impulſu mutuo immutetur atque ab alio in aliud tranſeat præter ea quæ in præcedentibus adhibuimus aliud adhuc circa motus naturam inveniendum eſt quod principij loco habeatur. Solebat mihi unicum hic videri minimeque dubium [6]) id quod à Carteſio primò omnium conſideratum fuit, Eandem ſcilicet motus quantitatem in corporibus ſimul ſumptis poſt impulſum conſervari quæ prius inerat [7]). Quantitatis ratione ſic inita ut æqualis celeritas majorem motus quantitatem in majore corpore quam in minore conſtitueret, idque pro ratione molis [8]). Veluti ſi corpus A [Fig. 23] duplum eſſet corporis B, eique quiescenti occurreret cum tribus celeritatis partibus, dicebat utrumque in eandem partem deinceps moveri cum partibus celeritatis duabus; eaque ratione motus quantitati nihil decedere, quoniam et corpori A duæ celeritatis partes relictæ eſſent, et corpori B totidem acquiſitæ, quæ tamen non majorem motus quantitatem hic efficerent, quam una pars celeritatis in corpore duplo A, [Id quidem non veriſimile exiſtimabam conjuncta invicem poſt impulſum manere corpora, uti fieri hic neceſſe eſt cum utrumque pari celeritate motum continuet in eandem partem: videbam tamen eodem retento axiomate veriores erui poſſe, quæque nihil noſtris legibus obeſſent: veluti in caſu propoſito ſi corpus B quatuor partes celeritatis accipere dicatur A vero retinere unam quacum ſubſequatur corpus B præcedens. Ita enim

[Fig. 23.]

[1]) Voir le cinquième alinéa de la p. 127.
[2]) Cette Proposition n'est pas formulée expressément dans le Traité „De Motu".
[3]) Comparez (p. 51) la Prop. VII du Traité „De Motu".
[4]) Voir le „Theorema" de la p. 128.
[5]) Voir les p. 123—124.
[6]) Au-dessus des mots „unicum hic videri minimeque dubium" qu'il souligna, Huygens écrivit comme leçon alternative „apprime rationi consentaneum".
[7]) Voir la note 1 de la p. 49.
[8]) Huygens ajouta encore en marge „Etsi vero neque hanc neque cæteras ipsius regulas probare poteram quippe quæ præcedentibus nostris refutatæ essent, arbitrabar."
[9]) Comparez (p. 65—69) la Prop. IX et son explication et surtout la note 1 de la p. 67.
[10]) Les phrases entre crochets furent biffés par Huygens; toutefois il nous semble utile de les reproduire afin de mieux faire comprendre ce qui suit.

et cum tribus celeritatis partibus à ſe invicem ſeparantur ſicut appropinquarunt ſecundum Theor. . . . . [1]) et motus quantitate omni integra ſervata ſalvum eſt axioma prædictum. Et ſane in hoc caſu rectè ſic definiri poſtea oſtendemus[9])] [10]). Neque tamen eo magis dictum axioma admitti poteſt. Quod ut manifeſtum fiat. Ponamus corpus A quiescere eſſeque duplum ut ante corporis B, quod ipſi occurrat. B igitur movebit A atque aliquam ipſi celeritatem imprimet[4]); Eſto ea pars quantumvis exigua, decima ex. gr. celeritatis ipſius B. ut ſi hoc habeat celeritatis partes decem, unam accipiat A. Ut igitur eadem celeritate ſeparentur corpora qua et appropinquarunt, neceſſe eſt corpus B retrorſum agi cum partibus celer. novem; pars autem celeritatis una in corpore duplo A tantam motus quantitatem conſtituit quantam duæ partes in corpore B. Ergo poſt impulſum ea jam motus quantitas exiſtit quantam conſtituunt partes undecim celeritatis in corpore B. cum prius decem tantummodo fuerint. Aucta eſt hic igitur contra princip. Carteſij motus quantitas idque ſemper fieri neceſſe eſt cum corpus majus quiescens à minore impellitur [11]).

Contra verò alijs caſibus minui motus quantitatem oſtendere poſſem [12]), ſed ſuperfluum id eſſet quum ex hoc ſolo quod jam dictum fuit ſatis manifeſta ſit Principij iſtius infirmitas atque impoſſibilitas. Veruntamen mirabile hoc videri poteſt quantitatem motus ea ratione multiplicari rurſusque diminui, et me quidem diu ſuspenſum tenuit, ita ut quid certi ſtatuerem non invenirem.

Tandem verò [13]) et principium quidem illud non omnino rejiciendum eſſe ſed convenienti interpretatione emendandum. Eandem nimirum motus quantitatem ſervari vult natura, ſed in eandem quoque partem, idque hoc modo eſt intelligendum [14]).

Sint corpora. Hoc fieri naturæ conſentaneum quæ determinationem quidem ſingulorum corporum diverſam concedere debuit ne pereat [15]). ſed determinationem quantitatis motus hoc eſt quæ in corporum ſumma reſideret cum nihil impediat nequaquam immutari convenit [16]). unumquodque enim uti eſt ita manet donec &c. ut recte differit Carteſius [17]), huic autem determi.i corporum ſimul ſumptorum

---

[11]) Comparez cette démonstration à celle (p. 49—51) de la Prop. VI du Traité „De Motu", C'est ici la fin de la page numérotée 32 et le commencement de la page numérotée 20 tournée en sens inverse; consultez la note 8 de la p. 125.

[12]) Voir (p. 49) la Prop. VI.

[13]) Huygens a laissé ici en blanc l'espace de six ou sept mots.

[14]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 102.

[15]) Il nous a été impossible de lire autrement cette phrase singulière.

[16]) Il s'agit toujours du Principe Cartésien de la conservation de la quantité de mouvement; comparez la note 1 de la p. 49.

[17]) Voir la note 18 de la p. 105.

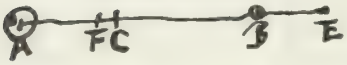
nihil contrarii eſt, utique poſtquam æque majus a minori quam hoc ab illo moveri demonſtratum eſt [1]).

Notandum autem quod ſecundum hæc quæ diximus, centrum grav. corporum ſimul ſumptorum æquabili ſemper motu eodem verſus pergit neque impulſu corporum ullo deſiſtit [2]).

Onzième Partie [3]).

[1654.]

[Fig. 24.] [4])



a corpus maj.
b minus. [5])
AC ∞ c denotat veloc. A.
CB ∞ d veloc. B.
Sit CE ∞ x acquiſita veloc. B poſt occurſum in C.

$$\begin{cases} c + d - x \\ c + d - x \end{cases}$$ CF veloc. in A corpore [6])

$$cc + 2cd + dd - 2cx - 2dx + xx$$
$$a$$

$$acc + bdd \infty acc + 2cda + add - 2acx - 2adx + axx + bxx$$ [7])

$$\frac{2acx + 2adx - add + bdd - 2acd}{a + b} \infty xx$$

---

[1]) Savoir contraire à la quatrième règle de Descartes sur le choc des corps; comparez la note 1 de la p. 38.

[2]) Comparez la note 3 de la p. 116.

[3]) Cette Partie est empruntée aux pages numérotées 33 et 34 par Huygens; voir la note 1 de la p. 92.

[4]) Les calculs qui se rapportent à cette figure contiennent la solution du problème le plus général de la percussion directe des corps durs au moyen des Principes de la conservation de la force vive et de l'égalité de la vitesse d'éloignement et d'approchement. Ils peuvent donc servir à illustrer la phrase: „Ex hoc et primo ax. regula conficitur", qu'on trouve à la p. 95. Remarquons d'ailleurs que la combinaison de ces deux Principes introduit à côté de la véritable solution (celle de la note 1 de la p. 67) la solution fausse $v'_A = -v_A$, $v'_B = -v_B$.

[5]) a et b désignent les masses des corps A et B.

[6]) D'après le Principe de l'égalité de la vitesse d'éloignement et d'approchement.

[7]) Application du Principe de la conservation de la force vive.

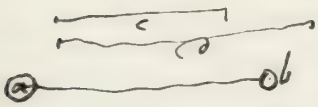
$$\frac{2ac - bd + ad}{a + b} \infty x$$ [8])

$$ac - bd \infty bx + ax - ac - ad$$ [9])

$$\frac{2ac - bd + ad}{a + b} \infty x$$

Datum corpus quiescens dato alio corpore movere ut celeritatem acquirat æqualem datæ [10]).

[Fig. 25.]



Datum ſit corpus quiesc. a [Fig. 25] et alterum b, et celeritas c.

Sicut duplum corporis b ad b et a ſimul, ita ſit c ad d. erit d velocitas requiſita in corpore b quâ impactum corpori a, dabit ei velocitatem c [11]).

$$b + a \text{ [ad] } b \text{ [ut] } 2x \text{ [ad] } \frac{2bx}{a + b} \infty c$$ [12])

$$2bx \infty ac + bc$$

$$x \infty \frac{ac + bc}{2b}$$

Mirandum eſt quod magnum corpus quiescens à parvo celerius movetur per interpoſita corpora proportionalia, quam ſi immediatè à parvo impulſum fuiſſet [13]).

---

[8]) Des calculs confus et peu propres à être reproduits montrent que Huygens a en effet résolu l'équation quadratique qui précède par la méthode usuelle et qu'il a obtenu ainsi le résultat indiqué. En effet, on rencontre dans le manuscrit la multiplication de $-add + bdd - 2acd$ par $a + b$ et l'équation : $\sqrt{\frac{aacc + bbdd - 2abcd}{aa + 2ab + bb}} \infty \frac{ac - bd}{a + b}$.

La solution fausse, dont il est question dans la note 4, a été ecartée par le choix du signe de la racine carrée. Elle aurait donnée CE [Fig. 24] $= x = d$, et, par suite, CF $= c$.

[9]) Huygens applique ici le principe Cartésien de la conservation de la quantité du mouvement, tel qu'il l'avait modifié (comparez la note 2 de la p. 102) et arrive au résultat qu'il avait déjà obtenu par le Principe des forces vives, lequel, évidemment, lui semblait plus certain que l'autre.

[10]) C'est là, sans doute, un des problèmes que Huygens se proposait de joindre à son Traité „De Motu"; comparez la note 12 de la p. 117.

[11]) Résultat obtenu à l'aide du petit calcul qui suit.

[12]) La vitesse cherchée est représentée par x. La proportion est celle qu'on trouve exposée avec une légère modification dans l'avant-dernier alinéa de la p. 69.

[13]) Voir (pp. 81 et 87) les Prop. XII et XIII du Traité „De Motu".

Videndum quousque illud extendatur, nam pluribus ſumptis medijs, plus motus dat magno corpori quam ſi pauciora ſumantur. et tamen nunquam tantum motus dabit corpori majori quantum ipſum habet [1]).

[Fig. 26.] [2])

$$aaa + bbb \infty bxx + a^3 + 2aab + bba - 2aax + \\ + axx - 2abx$$

$$\frac{2abx + 2aax + b^3 - 2aab - bba}{a + b} \infty xx$$

$$2ax + bb - 2ab \infty xx \text{ [3])}$$
$$bb - 2ab \infty xx - 2ax$$
$$bb - 2ab + aa \infty xx - 2ax + aa$$
$$b - a \infty x - a$$
$$b \infty x \text{ bon [4])}$$

---

[1]) La remarque est juste si on l'applique à la vitesse, et non pas à la quantité de mouvement. En effet, à chaque choc la vitesse acquise par le corps plus grand est plus petite, mais la quantité de mouvement plus grande, que celle possédée par le corps plus petit; cela résulte facilement de la première formule de la note 2 de la p. 70.

Quant au cas limite (où le nombre des corps intermédiaires augmente indéfiniment) les vitesses du plus grand corps après le dernier choc et du plus petit avant le premier choc sont dans la raison inverse et les quantités de mouvement dans la raison directe des racines carrées de leurs masses; comparez la note 1 de la p. 89.

[2]) Le calcul qui accompagne cette figure se rapporte au problème suivant: Lorsque deux corps durs de masses a et b se rencontrent au point C avec des vitesses aC et bC, proportionnelles à leurs masses, quelles seront leurs vitesses après le choc? Comparez encore la note 10 de la p. 133.

Afin de résoudre ce problème Huygens représente par x la vitesse du corps b après le choc dans la direction ab. Il en résulte, puisque la vitesse de l'éloignement doit être égale à celle de l'approchement, qu'alors la vitesse du corps a dans la direction ba est représentée par $a + b - x$. L'égalité de la somme des forces vives avant et après le choc exige donc:

$$a^3 + b^3 = a(a + b - x)^2 + bx^2$$

et c'est ce qu'exprime la première équation qui suit.

[3]) La division par $a + b$ est ici accomplie.

[4]) C'est le mot français „bon"; toutefois le résultat n'est pas juste. Il est, en effet, identique à la solution fausse dont nous avons parlé dans la note 4 de la p. 132. Afin d'obtenir la véritable solution du problème, Huygens aurait dû écrire au lieu de l'avant-dernière équation: $a - b \infty x - a$ et il aurait trouvé: $2a - b \infty x$, d'où l'on déduit $2b - a$ pour la vitesse du corps a après le choc dans la direction ba.

Remarquons que la figure fait plutôt penser au cas où les vitesses des corps sont inversement proportionnelles à leurs masses; voir (p. 53) la Prop. VIII du Traité „De Motu". Peut-être cette circonstance n'a-t'-elle pas été étrangère à l'erreur commise.

[Fig. 27.] [5])

c

$$a + \frac{xx}{a} \text{ [ad] } a \text{ [ut] } 2c \text{ [ad] } \frac{2caa}{aa + xx} \text{ [6])}$$

a × xx

o o o

$$a + x \text{ [ad] } a \text{ [ut] } 2c \text{ [ad] } \frac{2ca}{a + x} \text{ [7])}$$

$$\frac{ax + xx}{a} \text{ [ad] } x \text{ [ut] } \frac{4ac}{a + x} \text{ [ad] } \frac{4a^2cx}{aax + 2axx + x^3} \text{ [8]) } \infty \frac{3aac}{aa + xx}$$

$$4aax + 4x^3 \infty 3aax + 6axx + 3x^3$$
$$aax + x^3 \infty 6axx$$
$$aa + xx \infty 6ax$$
$$xx \infty 6ax - aa$$
$$x \infty 3a = \text{[9])} \sqrt{8aa}$$

[Fig. 28.]

E F G

o o o

1 ∽ 64

dup. gr. ve.

$$65 \text{ [ad] } 1 \text{ ut] } 2 \text{ [ad] } \frac{2}{65} \text{ [}\infty\text{] } \frac{4}{130} \text{ [10])}$$

$$9 \text{ [ad] } 1 \text{ [ut] } 2 \text{ [ad] } \frac{2}{9} \text{ [11])}$$

$$72 \text{ [ad] } 8 \text{ [ut] } \frac{4}{9} \text{ [ad] } \frac{32}{648} \text{ [}\infty\text{] } \frac{4}{81} \text{ [12]) interp.}^{\text{to}} \text{ F } \infty 8$$

---

[5]) Les calculs qui accompagnent cette figure contiennent la solution du problème suivant: Les masses de trois corps soient en proportion continue. Soit donnée la masse a du premier, quelle doit être la masse du deuxième en repos pour que, étant donnée la vitesse du premier, les vitesses acquises par le troisième, également en repos, respectivement avec ou sans l'interposition du deuxième, soient dans le rapport de 3 à 2? Comparez la note 10 de la p. 133.

Ajoutons que la vitesse du premier est représentée par c.

[6]) Vitesse acquise par le troisième corps sans l'intermédiaire du deuxième. Ce calcul et les suivants s'accomplissent à l'aide de la proportion $m_A + m_B : m_A = 2v_A : v'_B$, où m_A et v_A représentent la masse du corps A et la vitesse de ce corps avant le choc, m_B et v'_B la masse du corps B, d'abord en repos, et sa vitesse après le choc. Voir sur cette proportion la note 12 de la p. 133.

[7]) Vitesse acquise par le corps intermédiaire.

[8]) Vitesse du troisième corps acquise lorsque le deuxième corps est interposé.

[9]) En notation moderne: $\pm$

[10]) Vitesse acquise par le corps G, primitivement en repos, lorsqu'il est choqué par le corps E, qui possède l'unité de vitesse, sans l'intermédiaire du corps F. Ce calcul et les suivants sont faits à l'aide de la proportion mentionnée dans la note 6.

[11]) Vitesse acquise par le corps F interposé.

[12]) Vitesse du corps G.

13 [ad] 1 [ut] 2 [ad] $\frac{2}{13}$ [1])

76 [ad] 12 [ut] $\frac{4}{13}$ [ad] $\frac{48}{988}$ [∞] $\frac{4}{82\frac{1}{3}}$ [2]) interpofito F ∞ 12

7 [ad] 1 [ut] 2 [ad] $\frac{2}{7}$ [3])

70 [ad] 6 [ut] $\frac{4}{7}$ [ad] $\frac{24}{490}$ [∞] $\frac{4}{81\frac{2}{3}}$ [2]) interpofito F ∞ 6

interpofitis omnibus 2 4 8 &c. [4]) dabit corpori G $\frac{4}{45\frac{9}{16}}$ [5]).

Hinc [6]) videtur quod fi uno corpore intermedio velimus maximum motum magno corpori conciliare, opus erit illud medium proportionale fumere inter minimum et maximum [7]). Unum intermedium non poteft duplum dare immediati, quantumvis exigua fit proportio minimi ad maximum [8]). plura vero intermedia non duplum tantum fed octuplum, et decuplum et infinities multiplex immediati [9]). duo intermedia non poffunt dare quadruplum immediati. 1 dabit τω 1000 per interpofitum 100 paulo plus quam triplum immediati [10]).

---

[1]) Vitesse acquise par un corps interposé de masse 12.

[2]) Vitesse du corps G.

[3]) Vitesse acquise par un corps interposé de masse 6.

[4]) Ajoutez 16 et 32.

[5]) Comparez la formule de la note 1 de la p. 89. On a ici $\varepsilon = 64$, $n = 5$. Les calculs ne se trouvent pas dans le Manuscrit mais le résultat est exact.

[6]) Voir les résultats qui précèdent à l'exception du dernier.

[7]) Comparez (p. 81) la deuxième et dernière phrase de la Prop. XII du Traité „De Motu".

[8]) La remarque ne se retrouve pas dans le Traité. Il est facile de montrer qu'elle est exacte. En effet en posant successivement $n = 0$ et $n = 1$ dans la formule de la note 1 de la p. 89 on trouve pour le rapport en question: $\frac{2(1+\varepsilon)}{(1+\sqrt{\varepsilon})^2} = \frac{2(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon}} < 2$. Consultez encore les quatre dernières lignes de la p. 153 et surtout la note 8 de cette page.

[9]) Pour n corps intermédiaires le rapport est: $\frac{2^n(1+\varepsilon)}{(1+\sqrt{\varepsilon})^{n+1}}$; ce qu'on peut écrire aussi $\frac{2^n(1+\varepsilon^{-1})}{(1+\sqrt{\varepsilon^{-1}})^{n+1}}$ et l'on voit facilement que ce rapport est toujours plus petit que 2^n mais qu'il peut s'en approcher indéfiniment pour ε très grand ou très petit. Il obtient sa valeur minimum lorsque tous les corps sont égaux, auquel cas il est égal à l'unité.

[10]) Nous trouvons pour le rapport en question $\frac{1001.2^{100}}{(1+\sqrt{1000})^{101}}$ $(= 14{,}9..) : 1$. Le calcul de Huygens nous manque.

APPENDICE II [1])

À L'OUVRAGE: „DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE".

[1656.]

[Première Partie.] [2])

Quid ſit. quod experientiæ occaſione aliquibus tentatum. de æqualibus. de majore in minorem quieſcentem. Tum et hoc mirabile viſum &c. de infinita

---

[1]) Nous avons vu (consultez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 30) qu'en 1656 Huygens écrivit à de Roberval qu'il venait d'achever son petit ouvrage sur la Percussion. Or nous croyons que le Manuscrit, écrit sur des feuilles détachées dont les pages sont numérotées par Huygens de 1—36, auquel nous allons emprunter l'Appendice présent, n'est autre que celui de l'ouvrage mentionné dans la lettre à de Roberval.

Il est vrai que le Manuscrit qui nous a été conservé est plein de ratures et de leçons alternatives mais la confusion qui y semble régner à première vue est plutôt apparente que réelle. En effet, à part la Première Partie, dont nous parlerons dans la note 2, on s'aperçoit, lorsqu'on l'examine plus à fond, qu'il ne manque rien à l'enchaînement logique des Propositions, appelées Théorèmes ici, et que leur contenu correspond, et souvent presque textuellement, avec celui du Traité définitif „De Motu" que nous avons publié aux p. 31—91 qui précèdent.

D'ailleurs on ne pouvait pas s'attendre à quelque chose de plus achevé puisqu'en 1670, Huygens, frappé d'une grave maladie qu'il croyait mortelle, décrivit comme suit dans son entrevue avec Francis Vernon, le Manuscrit qui contenait sa Théorie de la Percussion: „These Papers containe some propositions about motion rough cast in their first draught & on the Paper which wraps them up is written on the outside de Motu per impulsum"; voir la p. 11 du T. VII.

[2]) Cette Première Partie contient l'esquisse d'une Préface dans le genre de l'„Ad Lectorem" qui précède les „Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli" de 1651 (voir les p. 283—287 de notre T. XI) et de la „Præfatio" de l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa" de 1654 (voir les p. 115—119 du T. XII).

Cette Préface ne semble jamais avoir été écrite. Pour la composer, en utilisant l'esquisse présente, Huygens avait à sa disposition les annotations préalables que nous avons reproduites dans l'Appendice I qui précède. Il s'y réfère quelquefois d'une manière implicite et une fois explicitement, voir la note 10 de la p. 140.

potentia [1]). Galileus Galilei cum de motu nova multa inveniſſet [2]), huic quoque contemplationi ſæpe acumen [3]) intendit neque tamen quidquam circa eam prodidit, niſi quod rem ſummæ difficultatis et quaſi inacceſſam humano ingenio dixit. Etenim in dialogis &c. ita Sagredum introducit loquentem &c. [4]). Hæc Galileus qui quousque &c. hoc certè quod de infinito &c. [5]).

Porro quod de obſcuritate materiæ ſcribit, tanquam quæ minime obvijs cogitationibus penetranda ſit [6]) id fortaſſe non ita ex ijs quæ tradituri ſumus percipietur, at ex eo certe conſtare poteſt quod egregij viri non pauci hæc aggredientes [7]) in errorem acti comperiantur. Quidam enim non usque adeo difficilem rem, opinati, non dubitarunt impulſus accidentia Theorematis complecti principijs parum evidentibus ſuperſtruentes [8]) atque argumentationes qualescunque demonſtrationum geometricarum loco venditantes. quos plerumque eatenus vera tradere comperio [9]), quatenus ab facilibus experimentis edoceri potuere [10]); ſed ubi ab his recedunt continuo propria ratiocinatione in errores incidunt [11]). In his autem Carteſius [12]) alia via incedit, neque ut ille experimenta captat, ſed hæc materiæ imperfectioni [13]) alijsque impedimentis obnoxia ſtatuens, parum referre exiſtimat an inventa ſua comprobent [14]). quo fit ut neque experimentis convinci poſſit [15]).

Regulæ autem ipſius in libro de Princip. Philoſ. Parte 2da continentur ſuntque

---

[1]) Ce début ne donne, sans doute, qu'une ébauche bien imparfaite de ce que Huygens avait l'intention de dire au commencement de sa Préface. Il est précédé sur la même feuille par une autre rédaction que voici:

„Quid sit. quod experientiæ occasione ab aliquibus tentatum. quod falsas regulas dede[r]int. nimirum multi qualescunque argumentationes demonstrationum loco venditant. quæ videns exiſtimavi non frustra operam collocaturum si certiora invenire conarer. Nam et usibus humanis utilem scientiam et ad naturæ contemplationem plurimum conducere posse visum est. De principio itaque inveniendo cogitare cepi diuque laboravi, cumque tandem reperissem licet certissimum ejusmodi tamen fuit ut verissima agnoscerem quæ circa materiam hanc à subtilissimo Galileo olim prædicta fuere, in Dialogis de Motu quos Italico sermone conscripsit. Ibi enim ut intricatissimam sibi et desperatam penè horum cognitionem testaretur, ita Sagr. &c. Hæc Galileus, qui quousque &c. hoc certe quod de infinito &c. Cæterum ad ipsas hypotheses progrediamur."

Ajoutons que beaucoup de ce qu'il y a d'obscur dans les deux versions s'explique en consultant la Quatrième et la Cinquième Partie de l'Appendice I aux p. 99—107.

[2]) Voir l'ouvrage mentionné dans la note 8 de la p. 99.

[3]) Leçon alternative: „ingenium".

[4]) Voir les p. 112—113.

[5]) Comparez les l. 13—15 de la p. 113.

[6]) Voir le troisième alinéa de la p. 113.

[7]) L. a.: „attentantes".

[8]) Au-dessus de ce mot on lit: „nixi" et „usi".

hujusmodi [16]). Recenſe. Hisce Carteſij regulis multi aſſenſum præbuere haud ſcio veriſimilitudine magis an autoritate ſubtiliſſimi Viri Philoſophi permoti. Sed me primum dubitare coegit nimia illarum cum experimentis [17]) discrepantia nam quiescente ſphæra ab æquali pulſam hanc ab ictu quiescere motumque omnem in illam transferri ſæpiſſimè obſervaveram [18]), atque alia præterea notaveram percuſſionis accidentia quæ ſuperius recenſui [19]) longe diverſa regulisque iſtis adverſantia [20]). Deinde verò et ipſas inter ſe diſſidere leges ipſius animadverti. quod hic obiter commonſtrare expediet. Quinta nimirum docet quod ſi corpus majus B occurrat minori C quiescenti, aliquid de celeritate ſua amittet. At ex lege ſecunda [21]) ſi occurrat B eidem minori corpori C, venienti ex adverſo cum pari celeritate, nihil amittet B de celeritate ſua quæ quidem inter ſe pugnant, niſi dicamus corpori moto magis reſiſtere corpus quiescens quam ſi ipſi ex adverſo veniens impingatur. quod profecto abſonum eſt.

Hisce itaque regulis minimè fidens de alijs cogitare cœpi, omnibusque [22]) tentatis. Itaque diligentius hæc inſpicere cepi tandemque [23]) veriora, uti exiſtimo

---

[9]) L. a.: „contingit".

[10]) Il s'agit probablement du choc des corps égaux traité e. a. par Marci; comparez la p. 307 de notre T. I.

[11]) Au-dessus des mots „in errores incidunt" on lit: „devij feruntur" et „abducuntur".

[12]) Au-dessus de ces quatre mots on lit la version alternative: „Cartesius autem qui et ipse leges quasdam percussioni seu collisioni corporum constituit".

[13]) L. a.: „vitijs".

[14]) Leçons alternatives: „suis adstipulentur" et „consentiant".

[15]) Consultez à propos de tout ce passage la note 7 de la p. 101.

[16]) Voir la note 4 de la p. 101.

[17]) Au-dessus de ce mot on lit: „eo quod reapse contingere videbam".

[18]) En effet cette expérience contredit la sixième règle que voici: „Sextò, si corpus C [voir la Figure de la note 4 de la p. 93] quiescens esset accuratissimè æquale corpori B versus illud moto, partim ab ipso impelleretur, & partim ipsum in contrariam partem repelleret: nempe si B veniret versus C cum quatuor gradibus celeritatis, communicaret ipsi C unum gradum, & cum tribus residuis reflecteretur versus partem adversam" (p. 69 du T. VIII (1905) de l'édition d'Adam et Tannery). Consultez encore le dernier alinéa (p. 118) de la Septième Partie, où Huygens explique pourquoi dans le jeu de billard la bille en question conserve sonvent encore une petite vitesse.

[19]) L. a.: „commemoravi".

[20]) L. a.: „adversari videbam".

[21]) Voici la deuxième règle: „Secundò, si B esset tantillò majus quam C, cæteris positis ut priùs [savoir qu'ils se rencontrent aves des vitesses égales], tunc solum C reflecteretur, & utrumque versus sinistram eàdem celeritate moveretur" (p. 68 du T. VIII de l'édition d'Adam et Tannery).

[22]) L. a.: „variisque".

[23]) Au-dessus de „tandemque" on lit: „rationibus tandem".

atque omnino certa inveni, quæque experientia non minus accurate comprobat quam mechanicorum theorematum quodlibet [1]). notiſſimum quodque. Neque hoc [2]) parum faceret ad adſtruendum theorematum noſtrorum veritatem ſi hujusmodi confirmatione opus haberent [3]) nec manifeſtiſſimis quod faciunt [4]) demonſtrationibus niterentur ut nunc id tantum poſtulo, ut ij qui Carteſij regulas tueri conantur, non propterea falſas eſſe noſtras arbitrentur, quod cum obſervatis conſentiunt quia ſcilicet ob non [5]) exquiſitam duritiem materiæ aliaque impedimenta [6]) fieri poſſit ut diverſum experimenta exhibeant quam quod illis remotis eventurum ſit. Nam ſi hoc foret et falſæ [7]) eſſent demonſtrationes noſtræ, mirum eſſet [8]) ſi ita ſemper error alio errore aut defectu materiæ compenſaretur, ut quod prædicimus eventurum in occurſu corporum id eveniat [9]). Cæterum et nos omninò dura corpora fingemus atque inſuper omnia impedimenta quæ circumambiens aer adferre poſſet cogitatione ſeponemus. Quin et principia reliqua ſive hypotheſes quod attinet, aut ijsdem utemur quæ à Carteſio adhibitæ ſunt aut certe non contrarijs.

Et [10]) primum quidem ſtatuimus corpus unumquodque, *non conſiderata gravitatis proprietate* [11]), tendere ut moveatur ſecundum lineam rectam, quaque celeritate ſemel motum eſt, eâ pergere moveri niſi ab alio impediatur: [12]) Quod præter Carteſium, Galileus quoque et alij multi dixerunt [13]).

Porro ad duritiem corporum et motus proprietatem attendentes, ponimus occurſu mutuo duorum corporum, motum omnem utriusque non interverti ad nihilumque redigi. Qua vero quantitate in ſingulis conſervetur nondum definimus

---

[1]) L. a.: „quævis".

[2]) L. a. „Atque hoc non".

[3]) Au-dessus de „opus haberent" on lit: „indigerent".

[4]) Les mots „quod faciunt" furent intercalés après coup.

[5]) L. a.: minus".

[6]) L. a.: „causasque alias".

[7]) L. a.: „vitiosæ præterea".

[8]) Au dessus de ce mot on lit: „utique".

[9]) L. a.: „minime fallat".

[10]) On trouve encore en marge: „Pag. 7. 12. 15. 28. 23". Or, ces pages sont celles du Manuscrit de l'Appendice I, telles qu'elles furent numérotées par Huygens; voir la note 1 de la p. 92. La p. 7 correspond à la Quatrième Partie de cet Appendice jusqu'au deuxième alinéa inclus de la p. 103 du Tome présent; la p. 12 commence par le troisième alinéa de la p. 105 pour finir vers la fin du premier alinéa de la p. 106; la p. 15 comprend le texte des p. 110—111 depuis le deuxième alinéa de la p. 110 jusqu'au cinquième alinéa de la p. 111 inclus; la p. 28 s'étend du deuxième alinéa de la p. 124 jusqu'à la fin de la Neuvième Partie; la p. 23 enfin comprend toute la Huitième Partie (p. 118—120) à l'exception du dernier alinéa et de la phrase qui le précède.

niſi tantum in caſibus hisce manifeſtis. Nimirum cum æqualia duo corpora æquali celeritate ſibi invicem occurrunt utrumque eadem illa celeritate reſilire [14]).

Item duobus corporibus ſibi mutuo occurrentibus, ſi poſt impulſum contingat alteri eorum omnem quem prius habuit motum conſervari, etiam alterius motui nihil decedere neque adjici [15]).

Ad hæc, quoties corpus majus minori quiescenti occurrit aliquem ei motum conferre, ac proinde de ſua celeritate aliquid amittere [16]).

Agemus autem de occurſu directo tantum hoc eſt quando motus et contactus punctum contingit in linea recta quæ corporum gravitatis centra connectit [17]).

Denique, quod omnium maximi in ſequentibus momenti erit, concedi petimus, ut corporibus duobus mutuo ſibi occurrentibus etiamſi alteri adhuc motui utrumque ſimul obnoxium fuerit haud aliter illa ſe mutuo repellant reſpectu ejus qui eodem quoque motu defertur, quam ſi omnibus adventitius iſte motus abeſſet [18]).

Veluti ſi quis navigio vehatur atque ibi ſphæras duas æquales æquali celeritate in ſe invicem impingere faciat ſuo nimirum et partium navis reſpectù; plane ſicut contingeret ſi motu navigij neque ſphærulæ nec qui eas movet deferrentur. dicimus æquali quoque celeritate utramque reſilire oportere, neque id quisquam negabit qui ſciat in navi quæ æquabili curſu provehatur cætera quæ ad motum ſpectant omnia eodem plane modo evenire, atque in navi quiescente aut in terra conſtitutis. Uti pridem et ratione et multiplici [19]) experientia comprobatum eſt, namque ut recte Gal. refert [20]) et diſtillantis aquæ guttæ in vas ſubjectum recta decidunt et projicienti quidpiam a puppi ad proram non majori niſu opus eſt licet effugere navis videri poſſit, quam ſi contra à prora ad puppim projiciatur, et in [21]) quamcunque partem ſaltando [22]) æqualia ſpatia conficimus. Sed et quod ad impulſum

---

[11]) Les mots en italiques furent soulignés par Huygens.

[12]) C'est l'„Hypothesis I" (p. 31) du Traité: „De Motu".

[13]) Comparez le dernier alinéa de la p. 105.

[14]) Leçon alternative: „repelli". Il s'agit de l'„Hypothesis II" (p. 31) du Traité „De Motu" laquelle est identique avec la première règle de Descartes (voir la note 4 de la p. 93).

[15]) C'est l'„Hypothesis V" (p. 41).

[16]) C'est l'„Hypothesis IV" (p. 39).

[17]) Comparez le premier alinéa de la p. 33.

[18]) Comparez l'„Hypothesis III", p. 33.

[19]) Leçon alternative: „quotidiana".

[20]) On trouve le passage en question dans la „Giornata seconda" du „Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo". Voir les p. 212—214 du T. VII (1897) de l'édition nationale, où l'on lit en marge: „Esperienza con la qual sola si mostra la nullità di tutte le prodotte contro al moto della Terra".

[21]) L. a.: „versus".

[22]) L. a.: „subsiliendo".

attinet experiri licet, Etenim et pueri globulis lapideis plane ita ut in terræ planitie ludent. Et ſi ludum eum intra navim exercere velimus [1]) quo in menſæ ſuperficie globuli eburnei clavulis ex eadem materia [2]) confectis impelluntur, qualibet eorum colliſione atque occurſu idem omnino fieri inveniemus quod ſolet domi ludentibus. Qui verò terram moveri intelligunt [3]) etiamſi nunquam periculum faciant, hæc tamen fieri debere minimè ambigent; Neque enim dubitant quin ſi ſtantibus ſuper terram æquali celeritate globuli bini occurrere conſpiciantur, æqualiter quoque ijdem reſiliant ſublatis videlicet aeris impedimentis [4]). Verum hic quoque globuli una cum ſpectatore motui telluris obnoxij ſunt [5]), tantumque ſpectatoris reſpectu partiumque terræ æquali celeritate feruntur; neque magis hi reverâ ſic moventur quam illi qui intra navim æque celeriter ad occurſum properare cernuntur [6]) ei qui una vehitur. Sed ſicut horum par eſt velocitas reſpectu partium navis ejusque qui in ipſa conſiſtit non autem reſpectu ſtantis in ripa, ſic illorum quoque motus æquales ſunt reſpectu partium terræ eorumque quæ ſuper ea quiescunt, non autem reſpectu ſtellarum quæ fixæ dicuntur aut quorumlibet cæli punctorum quorum ad illas ſitus determinatur.

Ergo et progredientis navigij reſpectu quæ ſe mutuo celeritate quavis impellunt corpora, non aliter reflecti fatendum eſt ipſius navigij reſpectu quam terræ reſpectu [7]) ſimiliter mota, terræ ejusdem reſpectu reflecterentur. Et profecto etiamſi maximè velimus non aliter motum aut quietem corporum conſiderare [8]) poſſumus quam ad alia corpora ipſa referendo et ſi quis diverſam rationem motus inveſtiget, qua nimirum revera ac per ſe nullaque aliorum conſideratione corpora moveantur, fruſtra ſe fatigabit incidetque in quæſtionem quæ exitum non habet, dum quidem motum per mutationem loci comprehendere nitetur [9]), locum verò non aliter in infinita hujus univerſi extenſione determinari [10]) inveniet quam à ſitu conſtante [11]) inter corpora aut puncta quædam quæ quiescant, unde denuo horum

---

[1]) Leçons alternatives: „lubeat" et „placuerit".

[2]) L. a.: „item ex ebore".

[3]) L. a.: „concedunt".

[4]) On lit en encore en marge: „Exemplum si a funiculis pendeant ad malum; aut projiciantur. et hæc ita se habitura etiam si aer nullus esset".

[5]) L. a.: „motu telluris abripiuntur".

[6]) L. a.: „conspiciuntur".

[7]) L. a.: „super terram".

[8]) Au-dessus des sept derniers mots (à commencer avec „non") on lit: „nihil quicquam de motu aut quiete corporum statuere".

[9]) L. a.: „imaginari conabitur".

[10]) L. a.: „definiri".

[11]) L. a. „permanente".

locus definiendus erit. Nos autem tam perplexæ diſputationi immiſceri [12]) nihil opus ſed ſi de navigio tantum hoc quod dictum eſt teneamus [13]), eodem ſcilicet modo ijs qui ipſo vehuntur ſphærulas repercuti atque in terra ſtantibus [14]). hoc enim exemplum in demonſtrationibus noſtris [15]) ut eo magis ſint perſpicuæ [16]) frequentur uſurpabimus.

Ad quas priusquam pergamus ſciendum eſt quoniam ſpatia à diverſis corporibus æquali tempore peracta motu æquabili, in eadem qua velocitates ſunt ratione, quod per ſe quidem ſatis evidens videtur, et à Galileo accurate demonſtratum eſt [17]). Ideo velocitatum rationem ratione ſpatiorum nos metiri quæ ijsdem vel æqualibus temporibus percurſa [18]) ſunt. Veluti cum ſimul corpus A moveri dicetur celeritate AC, et B celeritate BC, intelligendum eſt eodem temporis intervallo percurriſſe A ſpatium AC et B ſpatium BC; velocitatibus eam inter ſe rationem tenentibus quæ eſt linearum AC ad BC.

[Deuxième Partie.] [19])

Theorema I [20]).

Si corpori quiescenti æquale corpus occurrat, poſt contactum hoc quidem quiescet, quiescenti verò acquiretur eadem quæ fuit in impellente celeritas [21]).

---

[12]) Leçons alternatives: „ingredi" et „involvi".

[13]) L. a.: „tenendum".

[14]) L. a.: „experientibus".

[15]) Au-dessous des mots: „in demonstrationibus nostris" on lit encore „quo clarior evadat". En choissisant cette leçon on doit faire suivre: „demonstratio nostra" et biffer „ut eo magis sunt perspicuæ".

[16]) Au-dessus des mots „eo magis sint perspicuæ" on lit: „captu facillimum".

[17]) Voir le commencement de la „Giornata terza" des „Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuoue scienze", p. 191—193 du T. VIII de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei". On y trouve (p. 193) le Théorème suivant: „Si mobile temporibus æqualibus duo pertranseat spatia, erunt ipsa spatia inter se ut velocitates. Et si spatia sint ut velocitates, tempora erunt æqualia".

[18]) L. a.: „decursa".

[19]) Tandis que la Première Partie constitue l'esquisse d'une préface pour le Traité „De Motu", cette Deuxième Partie correspond au Traité lui même. Souvent les deux textes sont presque identiques ou ne diffèrent que sur des points secondaires, auquel cas il nous semble suffisant de renvoyer le lecteur au Texte du Traité qui précède; sauf à indiquer les différences de quelque importance.

[20]) Voir (p. 33) la „Propositio Prima" du Traité „De Motu".

[21]) On lit encore en marge: „exemplum van de schuyftafel"; ce que nous croyons

Quiescenti [1]) A corpori occurrat equale corpus B celeritate BA, dico hanc omnem tranſlatum iri in corpus A, ipſum vero B à contactu motus expers manſurum.

[Fig. 1.]

Dividatur recta BA bifariam in D, et Ponamus reſpectu navigantis eum quem diximus motum contingere ut nimirum ipſius reſpectu corpus A immotum conſiſtat, corpus vero B dextra verſus tendat celeritate BA; ipſe vero interim cum navi eodem tempore ſiniſtram verſus pergat celeritate AD quæ eſt dimidia celeritatis BA. Igitur ejus qui in ripa conſiſtit reſpectu, corpus A ſiniſtram verſus movebitur celeritate AD, quoniam reſpectu navigij quiescit; corpus vero B ejusdem ſpectatoris reſpectu feretur dextram verſus celeritate BD, quia reſpectu navigij ferebatur celeritate BA, dum ſimul navigium in contrariam partem tendit celeritate AD. Itaque dicto ſpectatori utrumque corpus pari celeritate collidi conſpicitur unde et eadem utrumque qua venit celeritate reſilire ipſius quidem reſpectu oportet. Itaque poſt impulſum, corpus A moveri videbit dextram verſus celeritate DA, navigium autem eadem celeritate AD ſicut prius ferri in partem contrariam. Unde neceſſe eſt corpus A reſpectu navigij et vectoris moveri celeritate dupla DA, hoc est celeritate BA, nempe eadem qua prius corpus B ferebatur. Ipſum vero B, quoniam, ſtantis in ripa reſpectu, poſt impulſum ſiniſtram verſus movetur celeritate DB, atque ipſum quoque navigium eadem celeritate in eandem partem fertur, apparet reſpectu navigij et vectoris quiescere debere.

Igitur oſtenſum eſt ſi reſpectu ejus qui vehitur navi æquabiliter progrediente corpori A quiescenti occurrat corpus B, à contactu hoc ejusdem vectoris reſpectu quiescere, illi vero omnem acquiri motum. Quare etiam in quiescente navigio, aut ſuper terram experienti idem accidere debere conſtat.

Aliter [2]).

---

devoir traduire: „exemple de la table où l'on fait glisser [des disques]". Il s'agit probablement d'un jeu semblable à celui des „grandes dames" à propos duquel nous citons le passage suivant d'une lettre du 1 avril 1647 du Frère Gabriel Thibaut, Minime, à Mersenne: „Dans la p. 61 [des „Principia Philosophiæ" de Descartes, ouvrage de 1644, mentionné dans la note 4 de la p. 546 de notre T. II], il dict: *si corpus quiescens* c *esset accuratissimè æquale corpori* b *uersus illud moto, partim ab ipso impelleretur et partim ipsam in contrariam partem repelleret.* Ce qui est faux, comme on peut experimenter au ieu de billard. Car, lors qu'on jette une boule contre une autre, e. g. *b* contre *c*, la boule *b* poussera la boule *c* et demeurera immobile. Nous experimentons le mesme, quand nous ioüons aus grandes dames sur les tables du refectoir; car bien souuent une dame, poussée contre une autre, demeure immobile au mesme lieu ou elle la touche" (voir la p. 70 du T. V de l'édition des Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery).

[1]) La démonstration qui suit diffère de celle du Traité (et aussi de celles qu'on trouve aux

THEOR. 2 [3]).

Si corpora duo æqualia inæquali velocitate lata ſe mutuo impellant, permutata invicem celeritate poſt contactum ferentur [4]).

THEOR. 3 [5]).

Corpus quamlibet magnum quiescens à quamlibet exiguo corpore et celeritate qualicunque impacto movetur.

Quiescat A et occurrat ipſi corpus minus B, celeritate quavis BA. Oſtendendum eſt percuſſu hujus moveri corpus A. Ponantur rurſus hæc in navigio contingere nempe ut in ipſo quiescat A, et B moveatur celeritate BA dextram verſus; ipſum vero navigium prætervehatur celeritate eadem BA ſed in contrariam partem. Itaque ripæ reſpectu B quidem immotum ſtabit, A vero movebitur verſus ipſum celeritate AB. B autem minus eſt. Ergo pelletur

[Fig. 2.]

pp. 93—94, 109 et 121—122) en ce que les mouvements décrits dans le Théorème sont supposés avoir lieu par rapport au bateau et non pas par rapport à la rive; c'est pourquoi nous l'avons reproduite.

[2]) Dans cette deuxième démonstration Huygens commence par faire mouvoir les deux corps avec des vitesses égales mais contraires par rapport au *bateau* pour examiner ensuite ce que les mouvements avant et après le choc seront pour un spectateur placé sur la *rive*. Sur ce point elle diffère donc de la première et s'accorde avec les démonstrations citées dans la note 1. Puisque d'ailleurs l'artifice, employé dans le Traité, des mains qui se joignent, n'est pas appliqué, ni celui des points correspondants sur des lignes parallèles (voir la p. 121), elle ressemble parla forme à celle des p. 93—94 et à celle de la p. 109—110. Il n'a donc pas semblé nécessaire de la reproduire.

[3]) Comparez (p. 37)la „Propositio II" du Traité.

[4]) La démonstration fut biffée au crayon. Elle diffère de celle du Traité en plusieurs points: 1° les mouvements considérés dans le Théorème sont supposés avoir lieu par rapport au bateau et non pas par rapport à la rive comme dans le Traité, 2° le bateau se meut (dans le cas où les deux vitesses sont de direction contraire) avec une vitesse égale à la moitié de la différence des deux vitesses dans le sens *opposé* à la plus grande, de sorte que c'est par rapport à la *rive* que les deux corps se meuvent avec des vitesses égales mais contraires, 3° l'artifice des mains qui se joignent n'est pas employé, 4° le deuxième cas où les vitesses sont dirigées vers le même côté (voir le deuxième alinéa de la p. 39) est traité avec le même détail que le premier. Nonobstant ces différences nous croyons pouvoir supprimer cette démonstration puisque les trois premières différences correspondent exactement à celles qui existent entre la démonstration, que nous venons de reproduire (p. 143—144), du „Theorema 1" et celle de la „Propositio I" du Traité.

[5]) Comparez (p. 39) la „Propositio III" du Traité.

ab A ejusdem ripæ reſpectu aliquid propterea de motu ſuo amittet [1]) ideoque non continuabit celeritatem eandem AB qua prius ſiniſtrorſum movebatur. Atqui navigium ſemper ſiniſtram verſus pergit celeritate AB. Ergo navigij reſpectu feretur A poſt impulſum dextram verſus, quum prius in ipſo quieverit. Sicuti autem in navigio progrediente ita ubivis contingere neceſſe eſt [2]).

THEOR. [4] [3]).

Quoties duo corpora inter ſe colliduntur eadem eſt mutuo reſpectu discedentibus celeritas quæ fuit appropinquantibus [4]).

THEOREMA 5 [5]).

Corpus majus minori quiescenti occurrens minorem ei velocitatem dat quam ſuæ duplam [4]).

THEOR. 6 [6]).

Si duo corpora eadem celeritate ſingula ad ſe mutuo revertantur qua ab impulſu reſilierunt [7]), ſingula poſt alterum impulſum eandem acquirent celeritatem qua ferebantur ad occurſum primum [4]).

---

[1]) Comparez (p. 39) l'„Hypothesis IV" du Traité. Dans l'Appendice présent on la trouve parmi les suppositions formulées dans le deuxième alinéa de la p. 141.

[2]) On voit que les mouvements considérés dans le Théorème sont supposés avoir lieu ici par rapport au navire et dans le Traité (comme aussi aux p. 128—129) par rapport à la rive.

[3]) Comparez (p. 43) la „Propositio IV" du Traité.

[4]) À part la ponctuation et quelques autres particularités sans importance réelle la démonstration correspond textuellement à celle qu'on trouve dans le Traité.

[5]) Comparez (p. 51) la „Propositio VII" du Traité; voir pour les Propositions V et VI les Théorèmes 6 et 7 qui suivent.

[6]) Comparez (p. 47) la „Propositio V".

[7]) Au-dessus des mots: „se mutuo revertantur qua ab impulsu resilierunt" on lit: „occursum revertantur qua ab occursu discessere". Remarquons que cette leçon alternative est à peu près celle qui fut adoptée dans le Traité.

[8]) Comparez (p. 49) la „Propositio VI".

[9]) Comme dans les cas des trois théorèmes précédents la démonstration de ce théorème ne diffère pas sensiblement de celle de la Proposition correspondante du Traité; mais ici elle est suivie par les considérations que voici, qui ont été supprimées dans le Traité: „Contrarium huic theoremati à Cartesio assumptum est principij loco, statuit enim eandem

THEOREMA 7 [8]).

Corporibus duobus ſibi mutuo occurrentibus non ſemper poſt impulſum eadem motus quantitas in utroque ſimul ſumpto conſervatur, quæ fuit ante. Sed vel augeri poteſt vel minui [9]).

Sicuti de corporibus æqualibus [10]).

THEOR. I [11]).

Si corpora duo ſibi ex adverso occurrant quorum magnitudinibus eorum celeritates contraria ratione respondeant, utrumque eadem qua acceſſit celeritate reſiliet [4]).

---

semper motus quantitatem conservari [voir la note 1 de la p. 49] quod sane admodum verisimile videri queat. Attamen admittendum non esse si simpliciter sic proponatur manifestum fecimus. Si verò eandem semper motus quantit. ſervari dicamus inque eandem partem, omnino verum erit potestque ex sequentibus demonstrari. motus tamen quantitate in hanc vel illam partem sic computata ut addantur in unum quantitates motus quas singula corpora constituunt si in eandem partem utrumque moveatur; si vero in contrarias, ut auferatur quantitas minor à majori. Nempe si magnitudinis A ad B sit ratio ea quæ 7. ad 2. ratio autem celeritatis qua A versus dextrum pergit ad celeritatem quâ B fertur in partem contrariam ea quæ 5 ad 4. Erit 35 motus quantitas quam constituet A in partem dextram quam vero constituit B in partem sinistram erit 8. qua ablata de 35 quoniam in contrarias partes corpora [sic] supererit 27 motus quantitas in partem dextram.

Post occursum vero perget corpus utrumque sicut in sequentibus demonstrabitur dextram versus, A quidem celeritate 1, B vero celeritate 10. Unde A cujus magnit. erat 7 constituet motus quantitatem 7; B vero cujus magnitudo 2 constituet motus quantitatem 20. Atque ita in partem dextram sicut ante occursum efficietur motus quantitas 27".

Ajoutons que les premières lignes de ce passage furent biffées au crayon dans le Manuscrit.

[10]) Voir pour ce qui suit les pp. 51 et 53 qui précèdent, savoir à commencer avec les deux dernières lignes de la p. 51 jusqu' aux mots „jam demonstrari poterit" y compris. Ajoutons qu'on lit en tête de tout ce passage la suscription, biffée depuis,: „Liber II".

C'est dans ce passage qu'on rencontre le renvoi à l'„Horologium oscillatorium" que nous avons discuté dans la note 3 de la p. 52. On y rencontre de même, en marge, la petite figure que nous avons reproduite dans la note 1 de la p. 54.

[11]) Savoir „Theor. I" du „Liber II", voir la note précédente. Comparez (p. 53) à propos de ce Théorème la „Propositio VIII" du Traité.

THEOR. [1]).

Celeritas quam majus corpus dat minori quiescenti, ad eam quam ſimili velocitate minus imprimit quiescenti majori eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem [2]).

PROBLEMA [3]).

Duobus corporibus inæqualibus, quorum utrumque movetur, ſibi mutuo occurrentibus, datâ utriusque magnitudine et motu invenire celeritatem qua ſingula poſt occurſum ferentur [4]).

---

[1]) Comparez (p. 71) la „Propositio X" du Traité; voir pour la Prop. IX le „Problema" qui suit.

Ajoutons que le présent Théorème est précédé dans le Manuscrit par deux autres qui furent biffés ainsi que leurs démonstrations, le premier au crayon après qu'il avait été modifié de manière à s'adopter aux deux cas, et le deuxième à la plume. Voici ces théorèmes:

1°. Si majori corpori quiescenti minus corpus occurrat; sicut utriusque simul magnitudo se habet ad duplam occurrentis magnitudinem, ita erit hujus celeritas ad celeritatem quiescenti acquisitam ex impulsu. Sicut autem idem magnitudinum aggregatum ad earundem differentiam ita erit celeritas occurrentis ad eam qua hoc ipsum ab occursu movibetur resiliendo in partem contrariam.

2°. Si minori corpori quiescenti majus occurrat; sicut se habet majus cum minori ad majus ita erit dupla celeritas qua ferebatur majus ad celeritatem minori quæsitam ex impulsu. Sicut autem idem aggregatum corporum ad eorundem differentiam ita erit celeritas quâ ferebatur majus ad eam quâ post occurſum continuabit motum in partem eadem.

Quant aux démonstrations il suffira de dire qu'elles s'accordent en principe avec celle qu'on trouve aux p. 65—69. Elles sont seulement simplifiées par la circonstance que dans le premier théorème le point D coïncide avec B et dans le deuxième avec A. Remarquons, pour éviter tout malentendu, que l'artifice des mains qui se joignent n'est pas employé.

[2]) À part la ponctuation et quelques autres particularités sans importance réelle la démonstration correspond textuellement à celle qu'on trouve dans le Traité.

[3]) Comparez (p. 65) la „Propositio IX".

[4]) La démonstration diffère de celle qu'on trouve dans le Traité (voir les p. 65—71) en ce que l'artifice des mains qui se joignent n'y est pas employé et que, comme nous l'avons constaté déjà dans la note 4 de la p. 69, la dernière partie, où Huygens indique une manière simple de calculer les vitesses après le choc, y manque. En outre il y a encore quelques autres différences d'importance tout-à-fait secondaire.

THEOREMA [5]).

Duobus corporibus ſibi mutuo occurrentibus, id quod efficitur ducendo ſingulorum magnitudines in velocitatum ſuarum quadrata, ſimul additum, ante et poſt corporum occurſum, æquale invenitur. Si videlicet et magnitudinum et velocitatum rationes in numeris lineisve conſtituantur [2]).

LEMMA [6]).

LEMMA 2 [7]).

[THEOREMA] [8]).

Si quod corpus corpori majori vel minori quiescenti obviam pergat, majorem ei celeritatem dabit per interpoſitum corpus mediæ magnitudinis itidem quiescens, quam ſi nullo intermedio ipſi impingatur. Maximam vero celeritatem tum conferet cum corpus interpoſitum fuerit medium proportione inter extrema [2]).

THEOREMA [9]).

Quo plura corpora interponentur inter duo inæqualia quorum alterum moveatur alterum quiescat eo major motus quiescenti conciliari poterit. Maximus autem per unamquamque interpoſitorum multitudinem ita conferetur ſi interpoſita cum extremis continuam proportionalium ſeriem conſtituant [10]).

---

[5]) Comparez (p. 73) la „Propositio XI".
[6]) Voir pour ce lemme et sa démonstration le „Lemma I" (p. 77—79).
[7]) Voir le „Lemma II" et sa démonstration (p. 79—81).
[8]) Voir(p. 81) la „Propositio XII".
[9]) Comparez (p. 87) la „Propositio XIII" du Traité.
[10]) Cette fois encore la démonstration qui suit correspond presque textuellement avec celle du Traité (p. 87—89). Seulement, comme nous l'avons déjà indiqué dans la note 1 de la p. 90, le dernier alinéa (p. 91) du texte du Traité manque dans le présent Manuscrit.

APPENDICE III [1])

À L'OUVRAGE: „DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE".

[1656—1667?]

I [2]).

[1656.]

Quæ pag. 11 ad ſignum... [3]). ubi de utilitate in Phyſicis addendum, Nam ſi natura univerſa corpusculis quibusdam conſtat à quorum motu omnis rerum diverſitas oriatur, quorumque celerrimo impulſu lux momento temporis propagetur et per immenſa cæli ſpatia defluat, ut probabile eſſe multi philoſophi exiſtimarunt; non parum adjuvari hæc contemplatio videbitur ſi veræ motus leges innotuerint quaque ratione de corporibus in corpora transferatur [4]). Quam vero ſublimis ſit atque ardua in hisce comtemplatio quam difficilis ad hæc naturæ penetratio [5]). Quantaque animi contentione veritas occulta eruatur, ex aliorum potius qui ante nos eidem disquiſitioni incubuere quam noſtra opinione intelligi cupimus [6]). Itaque omnino locum eum ex dialogis viri perſpicaciſſimi Galilei de Galil. quos de motu Italica lingua conſcripſit adducendum exiſtimavi, atque interprætandum, ubi difficultatem rei et inpenſum in ea ſtudium ſuum aperte teſtatur [7]).

---

[1]) Dans cet Appendice nous avons réuni plusieurs Pièces et Annotations qui se rattachent au Traité „De Motu". Nous les avons arrangées, autant qu'il nous était possible, dans l'ordre chronologique, mais leur date est souvent plus ou moins incertaine.

[2]) Cette annotation se rencontre à la première page du Manuscrit de 1656, auquel nous avons emprunté l'Appendice II (p. 137—149).

[3]) Il y a ici dans le Manuscrit présent un signe de renvoi qu'on retrouve à la page indiquée du Manuscrit qui a servi pour l'Appendice I, savoir en marge du texte reproduit (p. 104) dans le deuxième alinéa de la Cinquième Partie.

16.17. [8]) Cæterum et in libris de Mundi Systemate [9]) idem Galileus pluribus in locis motus naturam persequitur quæ &c. p. 11 in fin. [10])

II [11]).

[1656.]

Sint corpora a et b. Celeritas corporis $a \infty p$. Celeritas corporis $b \infty q$. Celeritas quam habent respectu mutuo (hoc est, summa celeritatum utrarumque, si in contrarias partes moveantur, differentia vero, si in easdem) sit n. Eritque celeritas corporis a post impulsum, æqualis differentiæ inter p et $\frac{2bn}{a+b}$ [12]), vel uno casu eorum summæ cum nempe a in motu præcedit, quo casu etiam manifestum est

---

[4]) Comparez les allusions aux règles du choc, qu'on trouve aux pp. 11, 12, 14, 16 et 20 du Chap. I de l'édition originale du „Traité de la lumiere" (1690). On connaît d'ailleurs le rôle important que ces règles ont joué plus tard dans la théorie cinétique des fluides.

[5]) Leçon alternative: „aditus".

[6]) L. a.: „æstimari optamus".

[7]) Comparez le premier alinéa de la p. 105.

[8]) Il s'agit encore du Manuscrit d'où nous avons emprunté l'Appendice I. Voir pour le contenu des p. 16—17 de ce Manuscrit la Sixième Partie de cet Appendice depuis le sixième alinéa de la p. 111 jusqu'au début du quatrième alinéa de la p. 113 y inclus.

[9]) Voir l'ouvrage cité dans la note 8 de la p. 101.

[10]) Comparez l'avant-dernier alinéa de la p. 106 qui en effet se trouve dans le Manuscrit en question vers la fin de la page numérotée 11.

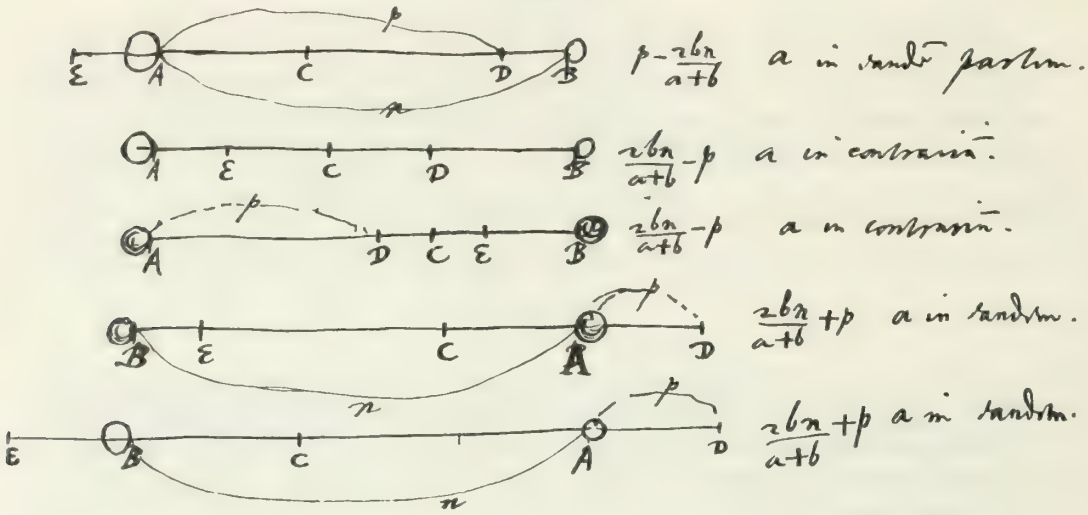
[11]) Cette Pièce empruntée à une feuille détachée nous fait connaître comment la belle solution par construction du problème le plus général du choc direct des corps durs (voir l'alinéa qui commence en bas de la p. 65) a été trouvée par Huygens, savoir en combinant dans une formule unique les résultats de cinq cas différents que sa méthode géométrique le forçait de distinguer.

En même temps elle explique l'indication du calcul numérique qu'il ajouta plus tard au texte de son Traité (voir la note 4 de la p. 69). En effet la vitesse C dont il est question dans cette indication n'est autre que celle indiquée dans la Pièce présente par $\frac{2bn}{a+b}$.

[12]) Évidemment ce résultat a été obtenu en appliquant l'un ou l'autre des Théorèmes cités dans la note 1 de la p. 148. En effet, lorsqu'on ajoute aux vitesses p et q de a et b une vitesse commune qui réduit le corps a en repos, il est clair que le corps b se mouvra avec la vitesse n. Appliquant ensuite l'un de ces Théorèmes on trouve $\frac{2bn}{a+b}$ pour la vitesse de a après le choc, laquelle vitesse doit encore être composée avec la vitesse ajoutée p.

ſemper moveri a in eandem partem quam prius. alijs vero omnibus, ſi p major ſit quam $\frac{2bn}{a+b}$ feretur a in eandem quoque partem. at ſi p minor ſit quam $\frac{2bn}{a+b}$, referetur a in partem contrariam. ſi denique æqualia, reſtabit a immotum.

[Fig. 3.] [1])



Sit AD celeritas corporis A. BD celeritas corporis B. quæ itaque convenient in puncto D. dividatur AB in C, ut ſit ſicut A ad B ita CB ad CA. Et ſumatur CE æqualis CD. Erit celeritas corporis A poſt impulſum, EA. corporis B vero EB, idque in partem eam quam demonſtrat ordo punctorum EA; EB. quod ſi E cadat in A aut B reſtabit tunc A aut B immotum [2]).

---

[1]) Dans tous les cas indiqués dans la Fig. 3, AC et AD représentent respectivement $\frac{bn}{a+b}$ et p en grandeur. Or, considérons p. e. le premier cas. D'après le raisonnement que nous avons exposé dans la note précédente la vitesse du corps a après le choc sera représentée par AD — 2AC = CD — AC = EC (égal à CD) — AC = EA. Dans tous les autres cas on arrive au même résultat final, savoir que la vitesse du corps a après le choc est représentée par EA en grandeur et en direction. Quant à la vitesse du corps b après le choc elle est représentée par EB puisque la vitesse d'éloignement doit être égale à celle d'approchement.

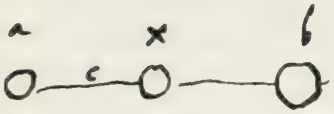
[2]) Comparez, p. 65—66, les deux premiers alinéas de la discussion de la Prop. IX du Traité.

[3]) La Pièce, empruntée à une feuille détachée, nous montre comment Huygens a calculé quelle doit être la masse du corps intermédiaire en repos, afin que le corps a [Fig. 4.] qui se meut

III [3]).

[1656.]

[Fig. 4.]



$$a + x \text{ [ad] } a \text{ [ut] } 2c \text{ [ad] } \frac{2ac}{a+x} \text{ [4])}$$

$$x + b \text{ [ad] } x \text{ [ut] } \frac{4ac}{a+x} \text{ [ad] } \frac{4acx}{ax + bx + ab + xx} \text{ [5])} \infty$$

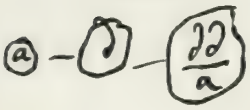
$$\infty \frac{4acx + 4acy}{ax + ay + bx + by + ab + xx + 2xy}$$

$$4aacxy + 4abcxy + 8acxxy \infty 4aacxy + 4abcxy + 4aabcy + 4acxxy$$

$$4acxxy \infty 4aabcy$$

$$xx \infty ab \text{ [6])}$$

[Fig. 5.]



$$a + d \text{ [ad] } a \text{ [ut] } 2c \text{ [ad] } \frac{2ac}{a+d} \text{ [4])}$$

$$\frac{aa + dd}{a} \text{ [ad] } d \text{ [ut] } \frac{4ac}{a+d} \text{ [ad] } \frac{4aac}{aa + 2ad + dd} \text{ [7])}$$

semper major quam dimid. $\frac{4aac}{2aa + 2dd}$ [8]).

Ergo per unum intermedium nunquam dat duplum immediati motus.

---

avec la vitesse c, donne le maximum de vitesse au corps b en repos. Comparez, p. 81, la Prop. XII du Traité. De même on y trouve la déduction du résultat mentionné dans la note 8 de la p. 136 et quelques considérations sur le cas de deux intermédiaires.

[4]) Vitesse du corps intermédiaire après le premier choc, calculée d'après les théorèmes biffés, mentionnés dans la note 1 de la p. 148.

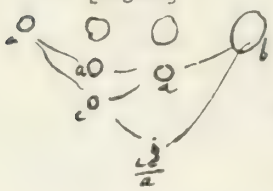
[5]) Vitesse du corps b après les chocs, de laquelle vitesse il s'agit de déterminer la valeur maximum. À cet effet Huygens emploie la méthode de Fermat, telle qu'il l'avait simplifiée. Cette méthode consiste à poser $\varphi(x) = \varphi(x + y)$, sauf à omettre dans le calcul les termes sans y et ceux qui contiennent les puissances de y au-dessus de la première; voir la note 30 de la p. 19 de notre T. XI.

[6]) C'est le résultat cherché.

[7]) Vitesse du corps de masse $\frac{dd}{a}$ après les chocs.

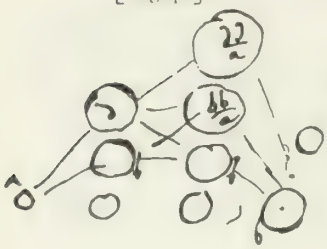
[8]) Vitesse de ce même corps frappé par le corps de masse a sans l'intervention du corps intermédiaire. Huygens veut dire que $\frac{4aac}{2aa + 2dd}$ est toujours plus grand que la moitié de $\frac{4aac}{aa + 2ad + dd}$, ce qu'on vérifie aisément.

[Fig. 6.]



a, c, a, b minor quam a, a, a, b [1]) quia c minor quam a. Sed $a, c, \frac{cc}{a}, b$ minor quam a, c, a, b, quia $\frac{cc}{a}$ magis recedit à medio prop. inter c et b quam a [2]). Etenim $\frac{cc}{a}$ minor quam c. Ergo $a, c, \frac{cc}{a}, b$ minor quam a, a, a, b.

[Fig. 7.]



Ostend. [3]) quod $a, d, \frac{dd}{a}, b$ minorem dat quam $a, b, \frac{bb}{a}, b$.

$a, d, \frac{bb}{a}, b$ minor quam $a, b, \frac{bb}{a}, b$ [4]). sed $a, d, \frac{dd}{a}, b$ minor quam $a, d, \frac{bb}{a}, b$ quia $\frac{dd}{a}$ magis

[1]) Huygens compare les vitesses obtenues par le dernier corps après les chocs dans les deux cas mentionnés où les vitesses initiales du premier corps a sont supposées égales.

[2]) Suivant la première formule à la p. 81 de la note 2 de la p. 80 on doit démontrer pour conclure à l'inégalité en question, qui peut s'écrire $\left(c, \frac{cc}{a}, b\right) < \left(c, a, b\right)$

$$(1)\quad \left(\sqrt{m_B} - \frac{\sqrt{m_A m_C}}{\sqrt{m_B}}\right)^2 > \left(\sqrt{m'_B} - \frac{\sqrt{m_A m_C}}{\sqrt{m'_B}}\right)^2$$

où $m_A = c$, $m_C = b$, $m_B = \frac{cc}{a}$, $m'_B = a$.

Or, cette inégalité se réduit successivement à

$$m_B + \frac{m_A m_C}{m_B} > m'_B + \frac{m_A m_C}{m'_B}$$

$$m_A m_C \left(\frac{1}{m_B} - \frac{1}{m'_B}\right) > m'_B - m_B$$

et enfin, divisant par la différence, ici positive, $m'_B - m_B$, à $m_A m_C > m_B m'_B$, savoir $bc > cc$. Or, cette condition est remplie lorsque, comme dans la figure, $b > c$.

En écrivant: „$\frac{cc}{a}$ magis recedit à medio prop. inter c et b quam a", Huygens semble vouloir dire qu'on a soit (2) $\sqrt{cb} > a > \frac{c^2}{a}$, donc $\sqrt{cb} : \frac{c^2}{a} > \sqrt{cb} : a$,

soit (3) $a > \sqrt{cb} > \frac{c^2}{a}$ avec la condition: $\sqrt{cb} : \frac{c^2}{a} > a : \sqrt{cb}$

qui conduit également à la relation $b > c$, apparemment admise par lui. Dans le cas (2) on a: $cb \geqq a^2$, ou $\frac{b}{c} \geqq \frac{a^2}{c^2}$, donc également (puisque $a > c$): $b > c$. Comparez la note 5 de la page suivante.

recedit à medio prop. inter d, b quam $\frac{bb}{a}$ [5]): Etenim d major quam b.

[3]) Il s'agit peut-être encore cette fois d'un problème que Huygens se proposait de joindre à son Traité „De Motu"; comparez la note 10 de la p. 133. De même l'alinéa qui précède pouvait donner lieu à un tel problème.

[4]) Puisque b est moyen proportionnel entre a et $\frac{bb}{a}$, mais $d \neq b$.

[5]) Pour saisir plus ou moins la pensée de Huygens (comparez sa démonstration de la Prop. XII du Traité „De Motu" où il considère d'abord, p. 83, fig. 20, trois corps tels que la masse du corps intermédiaire est moyenne proportionnelle entre les masses des corps extrêmes, et remplace ensuite, p. 85 fig. 21 et p. 83 dernière ligne, ce corps intermédiaire par un corps de masse X, dont il considère le rapport à la masse d'un des trois corps) concevons trois globes tels qu'il les suppose, de masses A, $\lambda\sqrt{AC}$ et C respectivement. Le corps A pousse le corps $\lambda\sqrt{AC}$, celui-ci pousse ensuite le corps C. Nous savons déjà que pour une vitesse donnée v du corps A la vitesse du corps C sera la plus grande possible pour $\lambda = 1$. La vitesse du corps C sera généralement, d'après la formule de la page 153,

$$\frac{4\lambda v A\sqrt{AC}}{(A+\lambda\sqrt{AC})(C+\lambda\sqrt{AC})};$$

cette expression se réduit à

$$\frac{4\lambda v A}{(\sqrt{A}+\lambda\sqrt{C})(\sqrt{C}+\lambda\sqrt{A})}$$

et ensuite à

$$(1) \qquad \frac{4vA}{(A+C)+\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\sqrt{AC}}.$$

Comme l'expression $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ ne change pas quand on remplace λ par $\frac{1}{\lambda}$, il est évident que la vitesse du corps C sera la même lorsque la masse du corps intermédiaire est p. e. trois fois plus grande que $\sqrt{AC}$, que lorsqu'elle est au contraire trois fois plus petite que $\sqrt{AC}$. L'on peut dire que dans les deux cas la masse du corps intermédiaire „recedit" d'une même quantité de la moyenne proportionnelle $\sqrt{AC}$. Comme l'expression $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ croît uniformément lorsque λ croît de 1 à ∞ (et aussi lorsque λ diminue de 1 à 0), il s'ensuit que la vitesse du corps C diminue de plus en plus à mesure que la masse du corps intermédiaire „magis recedit à medio prop. $\sqrt{AC}$".

Dans le cas considéré ($d > b$), on aura „$\frac{dd}{a}$ magis recedit a medio prop. inter d, b quam $\frac{bb}{a}$" lorsque (2) $\frac{d^2}{a} > \frac{b^2}{a} \geqq \sqrt{bd}$, puisqu'alors $\frac{d^2}{a} : \sqrt{bd} > \frac{b^2}{a} : \sqrt{bd}$,

ou bien lorsque (3) $\frac{d^2}{a} > \sqrt{bd} > \frac{b^2}{a}$ et que de plus $\frac{d^2}{a} : \sqrt{bd} > \sqrt{bd} : \frac{b^2}{a}$.

La formule (1) fait voir que, si la masse du corps intermédiaire est d'abord $\lambda\sqrt{AC}$ et ensuite $\lambda'\sqrt{AC}$, la vitesse du corps C sera la plus petite dans le premier de ces deux cas, lorsque

$$(4) \quad \lambda + \frac{1}{\lambda} > \lambda' + \frac{1}{\lambda'};$$

IV [1]).

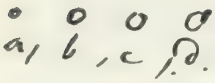
[1659] [2]).

pag. 194 Epiſt. Carteſij 2 vol. [3]) Alias leges motus tradit quam in Principijs Philos. [4]).

V [5]).

[1667?] [6]).

[Fig. 8.]



Poſitis corporibus duris a, b, c, d &c. [Fig. 8] continue proportionalibus, motoque ſolo a minimo et per ipſum ſucceſſive b, c, d &c. Invenitur motus ſingulorum primus, item alter poſtquam percuſſerint corpus ſequens, hoc modo. Sit $a \infty 1$. et corpus ſecundum ſit b ut poſitum eſt. Ergo $c \infty bb$. $d \infty b^3$ &c. Sit etiam celeritas corporis primi $a \infty 1$.

---

c'est donc là, sous une forme moderne, la condition de Huygens qui peut également s'écrire

$$(5) \quad \left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}\right)^2 > \left(\sqrt{\lambda'} - \sqrt{\frac{1}{\lambda'}}\right)^2,$$

formule équivalente à la formule (1) de la note (2) de la p. 154.

En substituant dans la formule (4) les valeurs de λ et de λ' qui correspondent aux cas où la masse du corps intermédiaire est $\frac{d^2}{a}$ ou $\frac{b^2}{a}$ $\left(\text{savoir } \lambda = \frac{d^2}{a\sqrt{bd}}, \lambda' = \frac{b^2}{a\sqrt{bd}}\right)$, on trouve que, pour $d > b$, la formule (4) se réduit à $bd > a^2$, conformément aux formules (2) et (3) $\left(\text{De la formule (2) on tire } \frac{bd}{a^2} \geqq \frac{d^2}{b^2}, \text{ où } d > b, \text{ donc } bd > a^2\right)$.

Huygens aurait donc dû observer que, pour pouvoir affirmer que „$\frac{dd}{a}$ magis recedit à medio prop. inter d, b quam $\frac{bb}{a}$", il faut admettre la relation $bd > a^2$.

[1]) La Pièce est empruntée à la p. 140 du Manuscrit A.

[2]) D'après le lieu que la Pièce occupe au Manuscrit A.

[3]) Il s'agit des deux premiers volumes de l'édition de Clerselier des „Lettres de Mr. Descartes"; voir la note 1 de la p. 515 de notre T. I et la note 11 de la p. 334 du T. II.

[4]) Voici le passage en question qu'on trouve au deuxième volume, publié en 1659, dans une lettre à Mersenne du 25 décembre 1639 (p. 627 du T. II de l'édition d'Adam et Tannery des

Fiunt celeritates	primæ	ſecundæ	quantitates motus ex celeritate ſecunda.
1.[m] corporis	$a.$ 1	$\frac{b-1}{b+1}$ [7])	$\frac{b-1}{b+1}$ [8])
2.	$b.$ $\frac{2}{b+1}$ [9])	$\frac{2b-2}{\overline{b+1}^2}$ [10])	$\frac{2bb-2b}{\overline{b+1}^2}$ [11])
3.	$c.$ $\frac{4}{\overline{b+1}^2}$	$\frac{4b-4}{\overline{b+1}^3}$	$\frac{4b^3-4b^2}{\overline{b+1}^3}$
4.	$d.$ $\frac{8}{\overline{b+1}^3}$	$\frac{8b-8}{\overline{b+1}^4}$	$\frac{8b^4-8b^3}{\overline{b+1}^4}$
	&c.	&c.	

Œuvres de Descartes): „Pour *l'inertie*, ie pense auoir desia escrit qu'en vn espace qui n'est point du tout empeschant, si vn corps de certaine grandeur, qui se meut de certaine vitesse, en rencontre vn autre qui luy soit esgal en grandeur, & qui n'ayt point de mouuement, il luy communiquera la moitié du sien, en sorte qu'ilz iront tous deux ensemble de la moitié aussy viste que faisoit le 1er; mais, s'il en rencontre vn qui luy soit double en grandeur, il luy communiquera les deux tiers de son mouuement, & ainsy ils ne feront tous deux ensemble pas plus de chemin en trois momentz, que le 1er faisoit en vn moment. Et generalement, plus les corps sont grands, plus ilz doibuent aller lentement, lors qu'ilz sont poussez par vne mesme force."

Or, ces deux exemples, qui seraient à leur place dans la Théorie de la percussion des corps mous, sont en contradiction flagrante avec deux des règles énoncées par Descartes dans les „Principia", savoir le premier avec la sixième règle, sur laquelle on peut consulter la note 18 de la p. 139 de ce Tome, et le second avec la quatrième règle que nous avons reproduite dans la note 1 de la p. 38.

5) La Pièce, empruntée à une feuille détachée, se rapporte au dernier alinéa (p. 91 ci-dessus) du Traité „De Motu".

6) L'alinéa mentionné dans la note précédente, manque dans le Manuscrit de 1656. La Pièce doit donc être postérieure à cette année. Or dans les notices de Huygens qui lui ont servi pour ses discours à l'Académie des Sciences du 4, 11 et 18 janvier 1668 (que nous publierons plus loin dans le Tome présent; voir les p. 182—186) on rencontre aux numéros 14 et 13 (p. 184) une allusion aux résultats et calculs de la présente Pièce. Puisque entre ces deux époques Huygens, comme du moins sa Correspondance le fait présumer, ne semble pas s'être occupé de nouvelles recherches sur la percussion des corps, nous avons cru pouvoir choisir 1667 pour la date probable de cette Pièce V.

7) Vitesse du premier corps dans la direction *ba* (voir la Fig. 8) après le premier choc, calculée à l'aide du premier théorème de la note 1 de la p. 148, lequel calcul Huygens désigne sur une autre feuille, traitant du même sujet d'une manière moins complète, comme „per regulam nostram".

8) Quantité de mouvement du premier corps dans la direction *ba* après le premier choc.

9) Vitesse du deuxième corps dans la direction *ab* après avoir reçu son premier choc, calculée à l'aide du théorème mentionné dans la note 7.

10) Vitesse définitive du deuxième corps dans la direction *ba*.

11) Quantité de mouvement définitive du deuxième corps dans la direction *ba*.

Si a ſit maximus proportion.lium primæ celeritates exprimuntur eodem modo [1]), ſecundæ mutatis ſignis + — [2]).

Quantitas motus in corporibus poſtquam ultimum fuerit impulſum.

2bus $\frac{2^2.b}{b+1} - 1$ [3]). 3bus $\frac{2^3.bb}{\overline{b+1}^2} - 1$ [4]). 4or $\frac{2^4.b^3}{\overline{b+1}^3} - 1$ [5]). 5e $\frac{2^5.b^4}{\overline{b+1}^4} - 1$

100. $\frac{2^{100}.b^{99}}{\overline{b+1}^{99}} - 1$.

Si proportio corporum ſit dupla, quantitas motus in corporibus 100 augetur ſecundum rationem 1 ad 4677000,000,000 proximè [6]).

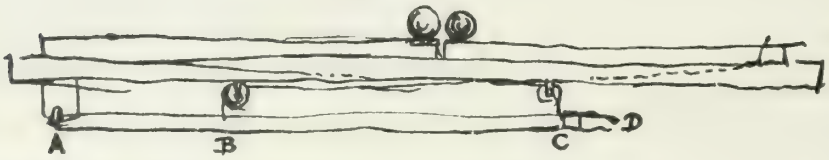
Si tripla, 1 ad 542100,000,000,000,000, prox. [7])

Cum autem a maximo corpore incipit motus non augetur unquam nec minuitur motus quantitas [8]). Celeritas vero minimi ad maximi celer.m in proportione dupla et corporibus 100 fit proxime quæ 14760000000 [9]) ad 1 [10]).

VI [11]).

[1667?]

[Fig. 9.] [12])



[1]) Voir le deuxième théorème de la note 1 de la p. 148.

[2]) C'est-à-dire dans les numérateurs, qu'on doit alors écrire $1 - b$, $2 - 2b$, etc. Ces vitesses et les quantités de mouvement qui en résultent dans la dernière colonne sont alors dans la direction ab.

[3]) En sommant à la manière de Descartes, savoir sans avoir égard à leur direction, les quantités de mouvement définitives des deux premiers corps supposés seuls présents, on trouve:

$$\frac{b-1}{b+1} + \frac{2b}{b+1} = \frac{3b-1}{b+1} = \frac{4b}{b+1} - 1.$$

[4]) $\frac{b-1}{b+1} + \frac{2b^2-2b}{(b+1)^2} + \frac{4b^2}{(b+1)^2} = \frac{7b^2-2b-1}{(b+1)^2} = \frac{8b^2}{(b+1)^2} - 1.$

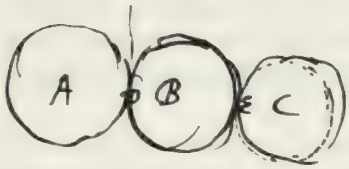
[5]) Cette fois il sera plus facile de soustraire du résultat obtenu dans la note précédente le terme $\frac{4b^2}{(b+1)^2}$ et d'y ajouter les termes $\frac{4b^3-4b^2}{(b+1)^3}$ et $\frac{8b^3}{(b+1)^3}$ après quoi on obtient le résultat annoncé par Huygens.

[6]) Comparez la note 6 de la p. 91. Sur une autre feuille détachée on retrouve le calcul de Huygens par les logarithmes d'après la formule: $\log \frac{2^{100}.2^{99}}{3^{99}} = 100 \log 2 + 99 \log 2 - 99 \log 3$.

VII[13]).

[1667?][14])

[Fig. 10.]



A, B, C egales. Posons que ces corps soient durs parfaitement, et que A et B se touchent et reposent. C vient a les frapper. A partira seul, et B et C demeureront joints et en repos. Cela arrive aux corps les plus durs que nous ayons, et d'autant plus precisement qu'ils sont plus durs. Or si B ne s'est point meu, il ne peut pas avoir meu A. car de l'avoir meu sans mouvement,

7) On trouve sur la feuille mentionnée dans la note précédente le calcul par la formule: $\log. \frac{2^{100} \cdot 3^{99}}{4^{99}} = 100 \log 2 + 99 \log 3 - 99 \log 4$.

8) Puisqu'alors toutes les vitesses sont dirigées dans le même sens.

9) En continuant la première colonne du petit tableau de la p. 157 l'on voit que pour le centième et dernier corps la vitesse après les chocs est égale à $\frac{2^{99}}{(b+1)^{99}}$, ou dans le cas présent à $\frac{2^{99}}{(\frac{1}{2}+1)^{99}} = 2338500000000$, et non pas 14760000000; comparez la note 4 de la p. 90.

Or, nous avons retrouvé sur une autre feuille détachée le calcul qui a amené le résultat erroné de Huygens. Il y suppute le logarithme du nombre cherché en soustrayant 99 (log 3 — log 2) de 99 log 2; mais il commet une simple erreur de calcul dans la multiplication de log 3 — log 2 = 0,1760912 par 99, trouvant 19,6330288 au lieu de 17,4330288.

10) On trouve encore sur la même feuille une „Regula universalis" qui correspond presque textuellement avec le premier alinéa de la Pièce II, p. 151—152. Cela semble prouver que les deux principales additions au Traité „De Motu" après 1656 (date du Manuscrit dont nous avons tiré l'Appendice II (p. 137—149)), savoir celle des p. 69—71 (voir la note 4 de la p. 69) et celle du dernier alinéa du Traité (voir la note 1 de la p. 90), ont été conçues à la même époque. En effet, la première addition correspond bien à la Pièce II et à la „Regula Universalis", tandis que la deuxième se retrouve à la fin de la Pièce V (p. 158).

11) La Pièce a été empruntée à la même feuille détachée qui contient les calculs dont il est question dans les notes 6 et 7 qui précèdent.

12) La Figure, où nous avons ajouté les lettres A, B, C, D semble représenter une machine pour faire des expériences sur le choc des corps. Il est clair que lorsqu'on pousse en bas le bout D du levier AD les vitesses communiquées aux plateaux qui portent les billes seront dans le rapport de AB à AC et il en sera peut-être de même pour celles reçues en conséquence par les billes. On pourrait constater alors quels sont les sens dans lesquels se meuvent les billes après le choc ou si l'une d'elle est alors en repos, oui ou non. Comparez encore la note 13 de la p. 185 où l'une des Figures représente une machine analogue ou identique.

13) La Pièce est écrite sur une feuille détachée.

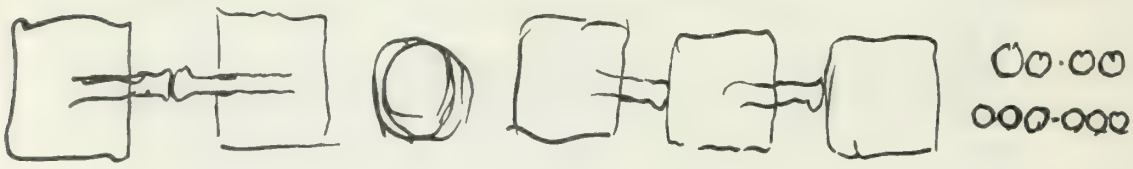
14) La Pièce date probablement de l'année 1667 puisqu'on trouve dans les notices pour les

il n'eſt pas poſſible, car ſi B eſtoit inesbranlable comment eſt ce que le coſtè D ſe reſentiroit du coup. B s'eſt donc meu et A neceſſairement en mesme temps, et pour le moins auſſi viſte que B, de ſorte qu'ou ils ſont allè joints enſemble ou A a devancè B, d'ou s'enſuit que A n'a pu empeſcher B de continuer ſon chemin vers le coſtè A. Toutefois B ſe trouve en repos le coup eſtant fait. il eſt donc retournè ſans que rien l'y ait obligè. ce qui eſt abſurde. Et la mesme choſe ſe conclurait quand B ſeulement iroit plus lentement que A. donc il faut conclure que ces corps ſe touchant immediatement, ils ne peuvent pas eſtre parfaitement durs et faire l'effect qu'ils font, et que par conſequent ils font reſſort [1]). Ou bien il faut dire que ſi ces corps ſont parfaitement durs ils ne ſe touchent pas immediatement. Et il y a des experiences avec les verres convexes qui ſemblent le prouuer [2]).

Quand un corps dur en rencontre un autre egal qui eſt en repos, on peut dire que l'un acquiert en un inſtant le mouvement, et que l'autre en un inſtant le perd. Mais de dire que le corps B en mesme inſtant acquiert et perd le mouuement, c'eſt dire qu'il demeure en repos, car le mouuement ne ſe fait que dans le temps, et il n'y en a point dans un inſtant.

S'ils ne ſe touchent pas immediatem.t il faut qu'ou bien les corps qui ſont entre deux ſe retirent promptement et s'echappent, ou qu'ils faſſent reſſort eux mesmes, comme l'air.

[Fig. 11.] [Fig. 12.] [Fig. 13.] [Fig. 14.]



VIII [3]).

[1667?] [4]).

Sunt corpora quædam quæ in ſe mutuo impingentia non recedunt a contactu, qualia ſunt quæ præ mollitie figuram aliquatenus mutant cum percutiuntur, nec omnino in eandem ſe reſtituere conantur, ut argilla humida plumbum et alia.

---

discours mentionnées dans la note 6 de la p. 157 au numéro 6.1 (p. 184) l'annotation suivante: „Experience belle des boules ou dames rangees et frappees par 2 ou 3 autres [voir la Fig. 14, p. 160]. Et que la communic.n de mouvement s'y fait de mesme que si les boules avoient quelque petite distance."

Alia vero quæ in ſe mutuo impingentia à contactu reſiliunt: quod quidem non iliis ſolum quæ dura nobis vocantur, ut ebori vitro lapidibus plerisque chalibi et alijs accidit ſed et ijs quæ dum colliduntur figuram nonnihil mutare conſtat ſed continuo vi quadam eandem ſibi reſtituere, veluti ſuber ſpongia, veſica aere inflata, et alia multa. Nec immerito dubitari poteſt annon etiam illa quæ apud nos ex materia duriſſima conſtant, hac reſtitutionis vi a ſe invicem reſiliant.

Cum vero appareat in occurſu mutuo hujusmodi corporum non extingui ſed conſervari quodammodo motum, idque tanto melius quanto perfectior fuerit eorum ſive durities ſive restitutionis vis, proinde eas in ſumma perfectione conſiderari volumus in corporibus de quibus in ſequentibus agetur. de quorum motu ex percuſſione ſequentia ſupponimus [5]).

IX [6]).

[1667 ?] [7])

A et B corpora mollia, A movetur celeritate AC [Fig. 15] B celeritate BC. quæ ſunt reciproce ut ipſa corpora. dico poſt concurſum in C, manere utrumque immotum [8]).

---

[1]) Les Fig. 11—13, p. 160, se rapportent sans doute à cette pensée: que les corps ne sont jamais parfaitement durs, mais qu'ils font ressort.

[2]) De même on lit dans les notices publiées dans ce Tome à la p. 183, au numéro 6: „Experience de deux verres convexes, ou l'on voit qu'il y reste de l'air entre deux".

[3]) La Pièce fut écrite sur une feuille détachée.

[4]) Puisqu'au revers de la feuille on trouve des calculs qui se rapportent au même sujet que ceux qu'on trouve dans la Pièce V (p. 156—158) il est à présumer que cette Pièce et la présente furent conçues dans la même année.

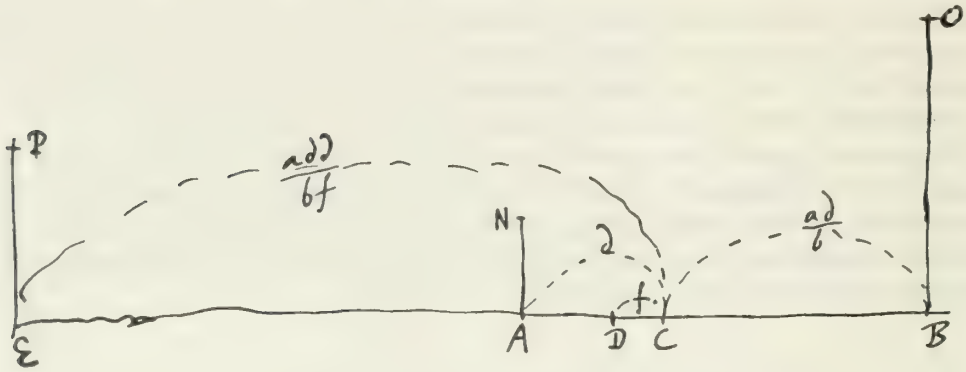
[5]) Comme les suppositions dont il s'agit ici Huygens désigne successivement (dans une rédaction parfois un peu différente): les Hypothèses II (p. 31 ci-dessus) et IV (p. 39) du Traité „De Motu", l'Hypothèse: „Si vero corpus minus occurrat majori quiescenti non posse ei dare celeritatem majorem sua", sur laquelle on peut consulter le troisième alinéa de la p. 129, et enfin les Hypothèses V (p. 41) et III (p. 33) du même Traité.

[6]) La Pièce est empruntée à une feuille détachée.

[7]) Parmi les notices mentionnées dans la note 6 de la p. 157 on trouve au numéro 15 (p. 184) la suivante: „de la rencontre des corps moux et la commun.n de mouvement qui s'y fait". Il est donc bien probable que la présente Pièce concernant la théorie du choc des corps mous fut écrite avant les premiers jours de janvier 1668.

[8]) Il semble utile de faire précéder ici un aperçu de la démonstration par l'absurde que Huygens

[Fig. 15.]



Sit ut DC (f) [1]) ad CB $\left(\frac{ad}{b}\right)$ ita CA (d) ad CE $\left(\frac{add}{fb}\right)$, ſitque hæc celeritas navis, quæ talis ponitur ad formandam demonſtrationem.

hic navis ponitur ſiniſtrorſum ferri celeritate CE.

$\frac{ad}{b}+\frac{add}{bf}$ celer. B corporis ante occ. nempe BE

$\left.\begin{array}{r}\frac{aadd}{bb}+\frac{2aad^3}{bbf}+\frac{aad^4}{bbff}\\ b\end{array}\right\}$ qu. cel.s B [2]) m[ult.]

$\frac{aadd}{b}+\frac{2aad^3}{bf}+\frac{aad^4}{bff}$

$\frac{ada}{bf}-d$ cel. corp. A ante occ. nempe AE

$\left.\begin{array}{r}\frac{aad^4}{bbff}-\frac{2ad^3}{bf}+dd\\ a\end{array}\right\}$ qu. cel. A [3]) m[ul.]

$\frac{a^3d^4}{bbff}-\frac{2aad^3}{bf}+add$

$$\frac{aadd}{b}+\frac{2aad^3}{bf}+\frac{aad^4}{bff}+\frac{a^3d^4}{bbff}-\frac{2aad^3}{bf}+add^4)\infty^{5)}\frac{a^3d^4}{bbff}+\frac{2aadd}{b}+aff+\frac{aad^4}{bff}+2add+bff^{6)}$$

$$0\infty^{5)}\frac{aadd}{b}+add+\&c.^{7)}$$ quod

eſſe nequit.

Si enim fieri poteſt moveantur poſt conjunctionem celeritate CD verſus partem

---

va donner de ce théorème. Supposons donc avec lui que les corps mous A et B de masses a et b se meuvent à leur rencontre avec les vitesses AC [Fig. 15] $= d$ et BC $= \frac{ad}{b}$ et soit $f =$

A. Ponantur hæc in navi fieri quæ feratur celeritate CE, fient hæc ergo eodem modo reſpectu navigantis ac reſpectu ſtantis in ripa. movebitur corpus A ante occurſum celeritate AE, et corpus B celer. BE. Et poſt conjunctionem utrumque ſimul movebitur celeritate ex CE et CD compoſita. Quare etiam, ſi ſtans in terra hos motus corporum efficiat, idem quoque evenire neceſſe eſt. hoc autem fieri non poſſe oſtendetur.

Sit NA altitudo ex qua corpus A cadens acquiſiverit celeritatem AE. Ergo faciendo ſicut qu.AE ad qu.EB ita AN ad BO, erit BO altitudo ex qua decidens B acquiſivit cel. BE. Et rurſus ſi fiat ut qu.AE ad qu. utriusque ſimul EC, CD, ita AN ad EP, erit EP altitudo ad quam corpora A, B, juncta ascendere poterunt celeritate ex EC, DC compoſita. Atqui oſtendetur PE altitudinem ductam in magnitudinem utramque A et B majus facere productum quam

---

$=$ CD la vitesse avec laquelle ils se meuvent ensemble après le choc; ajoutons la vitesse commune CE que nous représentons provisoirement par x, et convertissons les nouvelles vitesses, qui sont supposées horizontales, en des vitesses verticales; alors les hauteurs auxquelles les corps a et b pourront monter avant le choc seront respectivement $\lambda(x-d)^2$ et $\lambda\left(\frac{ad}{b}+x\right)^2$ (où $\lambda=\frac{1}{2g}$), après quoi leur centre de gravité composé se trouvera à la hauteur $\frac{a\lambda(x-d)^2+b\lambda\left(\frac{ad}{b}+x\right)^2}{a+b}$, tandis qu'après le choc ce centre pourra monter jusqu'à la hauteur $\lambda(f+x)^2$. Or, d'après le Principe adopté par Huygens (consultez la p. 57): que le centre de gravité ne peut pas monter par l'effet seul de la gravité, il faut donc que la première de ces hauteurs soit supérieure ou égale à la seconde; ce qui mène à la condition $ad^2+\frac{a^2d^2}{b}\geqq(a+b)(2xf+f^2)$ ou bien, en divisant par $a+b$, à $\frac{ad^2}{b}\geqq 2xf+f^2$, condition qui ne peut pas être remplie pour chaque valeur de x (et e. a. pas pour celle $x=\frac{ad^2}{bf}$ choisie par Huygens) sans qu'on ait $f=0$; ce qu'il fallait prouver.

[1]) f est la vitesse commune des deux corps mous après le choc, vitesse dont Huygens va prouver qu'elle doit être égale à zéro.

[2]) Grandeur proportionnelle à la hauteur BO à laquelle le corps pourrait monter après la conversion de sa vitesse horizontale en une vitesse verticale.

[3]) Grandeur proportionnelle à AN.

[4]) Cette grandeur est proportionnelle à la hauteur à laquelle peut monter le centre de gravité commun des deux corps avant le choc, multipliée par $a+b$.

[5]) Lisez plutôt $\geqq$; consultez la note 8 de la p. 161.

[6]) Cette grandeur, égale à $(a+b)\left(\frac{add}{bf}+f\right)^2$, est proportionnelle à la hauteur à laquelle peut monter le centre de gravité commun des deux corps après le choc, multipliée par $a+b$. Nous avons supprimé le calcul.

[7]) Savoir $(a+b)f^2$.

ſint duo quæ fiunt ducendo NA in A, et OB in B, quod fieri nequit [1]). Ergo [2])

Hæc fortaſſe optima erit demonſtr.° et melior ea quæ in fin. pag. præc. [3])

ita eſt: ſed ſufficit ponere CE $\infty \frac{add}{2bf}$ [4]).

Des Chales [5]). Sunt qui ſatis demonſtraſſe ſe putant veritatem hujus Theorematis ex eo quod quantitas motus in utroque corpore eſt æqualis [6]). Eſt probabilis ratio ſed non ſufficit. Sic [7]) demonſtraretur corpus quiescens a diverſis corporibus impulſum quorum eadem quantitas motus æqualem celeritatem acquirere quod tamen falſum [8]).

X [9]).

[1667?] [10])

De ſemireſilientibus.

[Fig. 16.] [11])

A et B concurrunt in C, celeritatibus BC, AC, quæ ſunt reciprocè ut corpora. Sint disceſſura ſpatio ST, ſed quo diviſo in N, in proportione reci-

[1]) De par le principe que le centre de gravité ne peut pas monter par l'effet seul de la gravité. En effet d'après ce principe $PE \leqq \frac{a\,NA + b\,OB}{a+b}$, ou bien $(a+b)\,PE \leqq a\,NA + b\,OB$. Or les calculs qui précèdent montrent que cette condition n'est pas remplie.

Ajoutons encore que Huygens se rendait parfaitement compte de ce que, le théorème dont il s'agit dans cette Pièce étant prouvé, toute la théorie du choc direct des corps mous en peut être facilement déduite. Voici, en effet, ce qu'on lit sur une autre feuille détachée, qu'il n'a pas semblé nécessaire de reproduire: „Primo ostendi potest quod si hoc ita fiat, tunc alijs casibus omnibus, velut si A [voir la Fig. 15] moveatur celeritate aliqua AE et B celeritate BE, post occursum in E, centrum grav. commune quod motum est à C in E perrecturum eadem celeritate versus V [où V se trouve dans le prolongement de AE]".

En effet pour obtenir cette belle solution géométrique du cas général du choc direct des corps mous, il suffit d'ajouter aux vitesses AC du corps A, BC du corps B (où $AC : BC = b : a$) et à celle égale à zéro des deux corps réunis par le choc la vitesse commune CE.

[2]) Nous empruntons encore à une autre feuille détachée, concernant le choc des corps mous, l'annotation suivante: „mirabilis est hæc demonstratio, qua evincitur si corpora

proca ponderum, non cadat N in C ſi poteſt, et intervallum NC dicatur ε.

---

mollia sibi occurrunt mutuo celeritatibus quæ sint reciproce ut corpora, nec post occursum maneant immota sed vel tantillum in alterutram partem progrediantur jam motum perpetuum daturum iri. augeri enim poſſe constabit vim ascensivam; idque quantum libet, aucta scilicet CE. quæ saltem major debet esse quam $\frac{add}{2bf} - \frac{1}{2}f$".

3) On trouve la démonstration indiquée au revers de la feuille à laquelle nous avons emprunté cette Pièce et qui visiblement a fait partie d'un des livres des „Adversaria". D'ailleurs cette démonstration fut biffée et ne se distingue de celle de notre texte que par le choix de la vitesse attribuée au navire, cette vitesse étant choisie successivement égale à $\frac{2d^2}{f} + d$ et à $\frac{a^2d^2}{b^2f} + d$. Or, la première réduction à l'absurde, fondée sur la première valeur, réussit lorsqu'on a $b > a$ et la deuxième lorsque $b < a$ (consultez la note 8 de la p. 161) tandis qu'il est clair qu'on peut faire à volonté l'une ou l'autre de ces suppositions.

4) Comparez les dernières lignes à la p. 163 de la note 8 de la p. 161. Il est clair que pour $x = \frac{ad^2}{2bf}$ la condition mentionnée n'est pas remplie non plus sans prendre $f = 0$. On trouve d'ailleurs la déduction de cette valeur de x sur la feuille mentionnée dans la note 2 de la p. 164.

5) Il s'agit du „Cursus seu Mundus mathematicus" de Claude François Dechales, ouvrage de 1674, cité dans la note 4 de la p. 347 de notre T. V. En effet l'état du Manuscrit semble indiquer que l'annotation présente fut faite après coup.

6) Voici, en effet, la démonstration de Dechales de sa Prop. VII: „Si duo mobilia sibi invicem occurrant cum velocitatibus, quæ sint ipsis corporibus reciprocæ, cessabit utriusque motus" du „Lib. VII" du „Tractatus octavus. Mechanica" (voir la p. 199 du T. II de la deuxième édition, de 1690, de son „Cursus"): „Demonstr. Eadem supponitur esse ratio A ad B, quæ lineæ BC ad lineam AC [voir p. e. la Fig. 16]; ergo productum ex multiplicatione primi termini A per quartum AC, seu quantitas motus corporis A, æquale erit producto multiplicatione secundi termini B, per tertium BC, seu quantitati motus corporis B; ergo sicut prius sunt hinc inde motus contrarii æquales, ergo pariter erit æquilibrium, & neutrum prævalebit, nam mobile B compensat suâ velocitate, id quod deerat in mole."

7) C. à. d. si l'on voulait admettre que généralement l'influence exercée par un corps qui en rencontre un autre sur ce dernier ne dépend que de la quantité de mouvement du premier corps.

8) Dans le cas de deux corps mous A et B de masses m_A et m_B, dont A possède la vitesse v_A et B est en repos, on trouve pour la vitesse commune après le choc $v' = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B}$, de sorte que cette vitesse ne dépend pas seulement de $m_A v_A$ mais aussi du rapport entre les masses. Il en est de même dans le cas des corps durs de Huygens où les formules de la note 1 de la p. 67 sont applicables; on a alors $v'_B = \frac{2m_A v_A}{m_A + m_B}$.

9) La Pièce est empruntée à une feuille détachée.

10) Il y a tant d'analogie entre cette Pièce et la précédente qu'il semble permis de supposer qu'elles datent de la même époque.

11) A et B sont les corps semi-durs de masses a et b qui se rencontrent en C de sorte que leurs vitesses peuvent être supposées égales à AC et BC. Après leur rencontre ces corps sont supposés rejaillir avec les vitesses CS et CT et Huygens va prouver que si l'on a AC : CB =

Fiant hæc in navi quæ feratur celeritate CE [1]) à C verſus N. quæ celeritas CE ita inventa ſit ut ſit ſicut ε ſive NC ad $\frac{1}{2}$CA ita CB ad CE.

$$\frac{add - a\delta\delta - b\varepsilon\varepsilon}{2\varepsilon b} \infty \text{ [2])} x \text{ ſufficiet ponere CE ſive } x \infty \frac{add}{2\varepsilon b} \text{ [3])}$$

$$\text{NC } (\varepsilon) \text{ [ad] } \tfrac{1}{2}\text{CA } (\tfrac{1}{2}d) \text{ [ut] CB } \left[\frac{ad}{b}\right] \text{ ad CE } \left[\frac{ad\delta}{2\varepsilon b}\right] \text{ [4])}$$

qualiscunque ſit disceſſus reſilientium ST, neceſſe eſt reflexiones ſingulorum A et B, eſſe inter ſe in proportione reciproca corporum, uti fuere celeritates occurrentium, aut alioqui devenietur hac demonſtratione ad abſurdum, nempe ut altius fiat centr. commune gravitatis poſt occurſum quam ubi fuerat cum deciderent corpora A et B ex ijs altitudinibus unde celeritates concurſus nacta ſunt. Etenim ad inveniendam celeritatem adventitiam CE, non opus eſt conſiderare δ nec $\frac{a\delta}{b}$, nec proinde disceſſus quantitatem ST, ſed tantum diſtantiam CN ſive ε, qua centrum grav.[is] receſſit poſt occurſum, nempe in fine temporis ſecundi [5]).

Centrum gravitatis igitur ſi ad occurſum tendentibus quiescebat, quiescet etiam poſt occurſum, in hujusmodi ſemiduris æque ac in perfecte duris et mollibus.

$= b : a$, savoir si primitivement les vitesses des corps A et B étaient en raison réciproque de leurs masses, il en sera de même après le choc. Il en va donner une démonstration par l'absurde. À cet effet il suppose que le point N (à peine lisible dans la figure) qui divise ST dans la raison de b à a diffère du point C. Posant ensuite SN $= \delta$, de sorte que TN $= \frac{a\delta}{b}$, il suppose NC $= \varepsilon$ et va démontrer que nécessairement $\varepsilon = 0$.

Afin de réussir dans cette démonstration il emploie de nouveau la méthode que nous avons expliquée dans la note 8 de la p. 161, c'est-à-dire: convertissant toutes les vitesses horizontales en vitesses verticales il montre que, par un choix approprié de la vitesse CE $= x$ à ajouter à toutes les autres vitesses, la hauteur du centre de gravité commun pourrait devenir plus grande après le choc qu'elle ne l'était avant cet événement, excepté lorsque l'on prend $\varepsilon = 0$.

Par des calculs tout-à-fait analogues à ceux que nous avons exposés dans la note citée on arrive à la relation: $ad^2 + \frac{a^2d^2}{b} > (a+b)(2x\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{a\delta^2}{b})$ ou bien $\frac{ad^2}{b} \geq 2x\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{a\delta^2}{b}$. Or, cette condition, qui indique que la hauteur du centre de gravité commun avant le choc est supérieure ou égale à celle après le choc, et qui est exigée par le Principe que ce centre ne peut pas monter, n'est évidemment pas remplie lorsque $x > \frac{add}{2\varepsilon b}$, à moins qu'on n'ait $\varepsilon = 0$; ce qu'il fallait prouver.

Remarquons encore que lorsqu'ainsi la coïncidence de N avec C a été prouvée, de sorte que $\frac{\text{SC}}{\text{AC}} = \frac{\text{CT}}{\text{CB}}$, la solution par construction du problème général du choc direct des corps semidurs s'ensuit facilement. En effet, il suffit d'ajouter aux vitesses avant et après le choc une vitesse commune CE de grandeur arbitraire. On voit alors que si AE et BE représentent les vitesses avant le choc, celles après le choc seront données par SE et TE, où SC: AC dépend de la nature des corps A et B.

[1]) Cette vitesse est représentée par x dans les calculs qui suivent dans le Manuscrit mais que

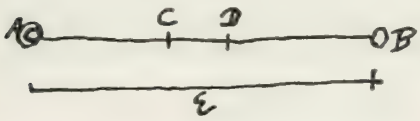
unde oſtenditur, quod ſi ante occurſum movebatur, etiam poſt eodem motu perget.

que la mesme reflexion ſe fait quand l'un des corps ſeroit tout a fait dur ou d'un reſſort parfait, pourvu que le mouvement respectif ſoit le meſme [6]).

Corpora quædam in ſe mutuo impingentia reſilire, idque ita ut recedant mutuo reſpectu æque celeriter atque acceſſerunt, qualiscunque fuerit celeritas illa reſpectiva [7]). deinde fiet propoſitio. non poſſe ulla corpora celerius recedere quam acceſſerunt.

Item. Si fuerit eadem celeritas reſpectiva accedentibus etiam eandem fore celeritatem reſpectivam recedentibus.

[Fig. 17.]



ſit corporibus A et B celeritas reſpectiva accedentibus AB [Fig. 17]. Et propria celeritas corporis A ſit AC, corporis B celeritas BC. Vel ſit A celeritas AD, ipſi vero B celeritas BD. Dico utroque caſu eandem fore celeritatem reſpectivam recedentibus ab occurſu. Sit priore caſu celeritas reſpectiva recedentium E. Et fiant quæ in caſu poſteriore in navigio, quod feratur celeritate DC. Jam ſtantis in ripa reſpectu movebitur A celeritate AC et B celeritate BC. Quare ejusdem ſpectatoris reſpectu debent A et B recedere celeritate reſpectiva E. Ergo et vectoris reſpectu, eadem celeritate reſpectiva AB moventur. ut autem in navigio ita in terra.

---

nous croyons pouvoir supprimer après les renseignements fournis par la Pièce précédente et par les notes 8 et 11 des pp. 161 et 165. Remarquons seulement que les vitesses des corps A et B par rapport à la rive sont respectivement avant le choc $x - d$ et $x + \frac{ad}{b}$ et après le choc $x + \delta + \varepsilon$ et $x - \frac{a\delta}{b} + \varepsilon$, d'où il suit:

$$a(x-d)^2 + b\left(x + \frac{ad}{b}\right)^2 \geqq a(x+\delta+\varepsilon)^2 + b\left(x - \frac{a\delta}{b} + \varepsilon\right)^2.$$

[2]) Lisez plutôt $\geqq$. La formule se déduit immédiatement de celle-ci: $\frac{ad^2}{b} \geqq 2x\varepsilon + \varepsilon^2 + \frac{a\delta^2}{b}$ qui résulte de la dernière formule de la note précédente après division par $a + b$; comparez la note 10 de la p. 165.

[3]) Savoir pour obtenir que la condition précédente ($NC \neq 0$) n'est pas remplie.

[4]) Détermination de la valeur indiquée de x.

[5]) Huygens veut dire que la vitesse supplémentaire $\frac{add}{2\varepsilon b}$, qui est nécessaire pour la réduction à l'absurde, ne dépend pas de δ, c'est-à-dire qu'elle est indépendante de la nature des corps qui se choquent et par suite la même pour les corps mous, durs ou semi-durs.

[6]) Cette remarque peut avoir été ajoutée après coup.

[7]) Comparez (p. 43) la Prop. IV du Traité „De Motu". Évidemment cette Proposition n'est valable que pour les corps durs, savoir dans le cas particulier de la Fig. 16 où $CS = CA$ et, par suite $CT = CB$. Huygens va indiquer ensuite comment elle doit être modifiée dans le cas des corps semi-durs.

XI [1]).

[1667?]

An corpora dura quæ figuram non mutant, ſequuntur leges noſtrorum durorum, de quibus demonſtrari poteſt reſtitutioni et flexioni obnoxia eſſe.

Non video quid impediat. Non enim impoſſibile videtur motum in inſtanti vel indiviſibili tempore communicari (quod neceſſe eſt) quandoquidem quo duriora ſunt corpora quæ habemus, hoc eſt quo minus a figura recedunt minusque reſtituuntur, hoc eſt, quo minori tempore motum communicant, eo melius leges noſtras reflexiones ſervent [2]).

XII [3]).

[1675?] [4])

[Fig. 18.]

Si une boule d'yvoire venant choquer un rang de boules d'acier trempè ou de verre dont chacune ſoit plus legere qu'elle, rejalira pourtant quelque peu. a cauſe que ſon reſſort eſt plus lent.

---

[1]) La Pièce est empruntée à une feuille détachée.

[2]) Comparez p. 175 note 17.

[3]) La Pièce est empruntée à une feuille détachée. Sur la même feuille Huygens se pose quelques autres questions qui appartiennent à la physique.

[4]) On trouve cette date au revers de la feuille détachée.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. HUGENS

À L'AUTEUR DU JOURNAL

SUR LES REGLES DU MOUVEMENT DANS LA RENCONTRE DES CORPS.

1669.

JOURNAL DES SÇAVANS DU LUNDY 18 MARS, MDCLXIX.

Avertiſſement.

Nous avons vu [1]) qu'en 1656 Huygens était en poſſeſſion de toutes les Propoſitions qu'on trouve dans ſon Traité poſthume: „De Motu Corporum ex Percuſſione" et nous avons reconnu la cauſe qui a retardé la publication de ces réſultats [2]). Toutefois il n'en garda pas le ſecret. Outre les communications qu'il avait faites déjà auparavant à van Schooten [3]), Kinner à Löwenthurn [4]) et Mylon [5]), il fit connaître dans ſa correſpondance avec de Sluſe les fondements ſur leſquels il avait baſé ſa théorie. Dans le cours de cette correspondance [6]) il s'était montré que de Sluſe croyait poſſéder une méthode, différente de celle de Huygens, pour calculer les viteſſes après le choc. À ce propos Huygens lui écrivit

[1]) Voir les p. 10—11 de ce Tome.

[2]) Voir les p. 8—9.

[3]) Voir sa lettre du 29 octobre 1652, p. 186 du T. I, et comparez la p. 6.

[4]) Voir ses lettres du 16 décembre 1653 et du 26 novembre 1654, pp. 260 et 307 du T. I, et comparez encore la p. 6.

[5]) Voir sa lettre du 6 juillet 1656, p. 448 du T. I, et comparez la note 1 de la p. 80.

[6]) Dans la lettre du 2 novembre 1657 (p. 79 du T. II) Huygens avait communiqué la solution d'un cas spécial. Dans sa réponse (p. 87 du T. II) de Sluse lui demanda des explications, mais l'exemple qu'il donna à son tour montra que les règles qui les guidaient étaient différentes. En effet, dans sa réplique (p. 94 du T. II) Huygens énonça un résultat tout différent, obtenu évidemment en appliquant sa solution générale (voir les p. 65—67 ci-dessus) du cas où l'un des corps est en repos. La réplique de de Sluse (p. 103 du T. II) fit voir que celui-ci n'était pas entièrement convaincu de la justesse de la solution de Huygens. C'est alors que Huygens lui écrivit la lettre du 3 janvier 1658 (p. 115 du T. II) dont nous allons traduire un passage dans le texte.

le 3 janvier 1658: „J'ai de la peine à me contenir de vous expoſer ici mes raiſonnements et hypothèſes concernant les lois du mouvement, parce que je ſais que ce ſerait la ſeule manière de lever ce ſcrupule que vous avez émis avec ſubtilité mais non ſans que je m'y fuſſe attendu. Mais la matière eſt de grande étendue et peu propre pour une lettre; je l'ai expliquée dans tout un livre que je ſoumettrai un jour au jugement des lecteurs bienveillants. Quoique van Schooten et tous les autres plus adonnés que de juſte à Descartes, me l'aient déconſeillé. Mais ce que j'apporte, ils l'ignorent entièrement, ſachant ſeulement que je leur ai dit que c'eſt contraire aux conceptions de celui-ci. Ne penſez pas que je m'appuie uniquement ſur des expériences [1]), car je ſais qu'elles ſont trompeuſes"; après quoi Huygens fait connaître les deux hypothèſes principales ſur lesquelles il ſe fonde [2]). Si de Sluſe les accepte, il admettra ſans doute les autres poſtulats qui ſont encore plus évidents [3]).

Dans ſa réplique [4]) de Sluſe n'inſiſte plus ſur ſa propre théorie, mais il exhorte Huygens à publier bientôt la ſienne.

En octobre 1660 Huygens ſe rendit à Paris et enſuite à Londres. À Paris il s'entretint avec Auzout le 16 décembre „des reigles du mouvement des corps qui ſe rencontrent, dont il [ſavoir Auzout] en auoit des fauſſes" [5]). Dans le ſalon de Madame de Bonneveau, où ſe tenaient des conférences ſcientifiques et littéraires [6]), on le pria fort, le 22 janvier 1661, qu'il expliquât ſes principes concernant la rencontre des corps.

À Londres le 23 avril (V. St.) 1661 [7]) s'aſſemblèrent l'après-diner dans la chambre de Huygens „M. Morre [Moray], mil. Brouncker, S.r P. Neal [Neile], D.r Wallis. M. Roock [Rooke], M. Wren. de Godart [Goddard]. parlames de la maniere de former les verres, et je leur dis ma methode. Reſolus les cas qu'ils me propoſerent touchant les rencontres de deux ſpheres".

---

[1]) „Experientias me sectari ne existimes".

[2]) Savoir les Hypothèses IV et V du Traité; voir les pp. 39 et 41 de ce Tome.

[3]) Allusion e. a. à l'emploi du Principe de la relativité à propos duquel il avait écrit à Mylon: „Vous verrez une facon de demonstrer fort estrange mais qui pourtant est evidente"; voir la lettre du 6 juillet 1656, p. 448 du T. I.

[4]) Voir la lettre du 8 janvier 1659, p. 123 du T. II.

[5]) Nous empruntons les particularités qui suivent pour la plupart au Journal de voyage tenu par Huygens; comparez la note 18 de la p. 69 de notre T. XV.

[6]) Le 5 février 1661 M. de Guederville y „lût des tourbillons de M. des Cartes et nous [Huygens] expliquames la sphere de Copernic"; le 19 février on y „refuta la doctrine de des Cartes pour la lumiere"; le 12 mars on y lut ou discuta l'„Henritiade poeme latin de Quiliet".

On trouve encore d'autres renſeignements ſur cette conférence mémorable dans une lettre d'Oldenburg à Spinoza [8]). Il y eſt rapporté qu'un poids d'un livre fut ſuſpendu à la manière d'un pendule ſimple; ce poids élevé à un angle de 48° et lâché, en frappa un autre d'un demi-livre. À ce propos Huygens, après un petit calcul algébrique, prédit l'effet du choc, qui répondit exactement à cette prédiction [9]). Puis d'autres expériences ſemblables auraient été propoſées par Brouncker, qui furent calculées avec ſuccès par Huygens [10]).

En octobre 1666 on commença en Angleterre à s'occuper de nouveau du choc des corps [11]). Le 16 janvier 1667 (V. St.) ce ſujet revint un inſtant à l'ordre du jour dans la „Royal Society" [12]). Puis dans la ſéance du 22 octobre 1668 [13]), lorsque Hooke propoſa de continuer les expériences ſur la nature et les

---

[7]) Il est dommage que le journal de voyage n'ait pas été consulté lors de la rédaction des notes 1 de la p. 547 du T. V et de la p. 277 du T. VI.

[8]) Voir la p. 547 du T. V. On peut encore consulter le témoignage de Moray sur la même conférence aux pp. 371 et 423—424 du T. VI.

[9]) On trouve 65° 40′ et 15° 35′ pour les angles maximum auxquels, d'après la théorie de Huygens, doivent s'être élevés, après le choc, respectivement le plus léger et le plus lourd des pendules, c'est-à-dire en les supposant d'égale longueur.

[10]) Huygens lui-même écrivit le 13 novembre 1668 à Oldenburg: „je me souviens que Messieurs Wren et Rooke me firent veoir leur experiences quand j'estois en Angleterre, et qu'elles s'accordoient tres bien avec ce que j'en avois determiné sur le champ suivant mes hypotheses". Voir la p. 277 du T. VI.

[11]) Voir les p. 116—117 du „Vol. II" (1756), de l'„History of the Royal Society of London" de Birch, où l'on lit à propos de la séance du 17 octobre 1666 (V. St.): „An experiment was tried of the propagation of motion by a contrivance, whereby two balls of the ſame wood, and of equal bigness, were so suspended, that one of them being let fall from a certain hight against the other, the other was impelled upwards to near the same hight, from which the first was let fall, the first becoming then almost quiescent, and the other returning, impelled the first upwards again to almost the same hight it had fallen from before, itself becoming then in a manner motionless, till after some returns they both vibrated together. It was ordered that this experiment be prosecuted, and others of that kind thought upon", et à propos de la séance du 24 octobre suivant (p. 117): „The experiment about propagating of motion was prosecuted with three balls, of which the middle remained almost quiescent, though struck by either of the lateral ones, which impelled each other upwards".

[12]) „It was mentioned by Mr. Oldenburg, that the council had thought fit, that the experiments for making out a theory of the laws of motion formerly begun by Dr. Wren, Dr. Croune and Mr. Hooke.... should be prosecuted. The society thereupon desired Dr. Wren to give in those experiments of motion devised by himself; but he alledging, that the account of them was at Oxford, Dr. Croune and Mr. Hooke where desired to bring in theirs" (Birch, Vol. II, p. 140).

[13]) En attendant Huygens avait exposé verbalement ses règles du choc à l'Académie des Sciences de Paris dans les séances du 4, 11 et 18 janvier 1668. On trouvera les annotations

lois du mouvement, le préſident Brouncker remarqua qu'il n'était peut-être pas néceſſaire de faire cette ſorte d'expériences, puisque Huygens et Wren s'étaient déjà donné beaucoup de peine pour examiner cette matière et qu'on croyait qu'ils avaient trouvé auſſi une théorie pour expliquer tous les phénomènes du mouvement. Sur l'avis du préſident il fut donc convenu que le ſecrétaire, mr. Oldenburg, s'adreſſerait à ces deux perſonnes pour leur demander, dans le cas où ils ne voudraient pas encore publier leurs conſidérations et expériences ſur ce ſujet, de les communiquer à la „Royal Society", qui les ferait enregiſtrer [1]).

Or, la lettre à Huygens [2]) fut envoyée le 26 octobre 1668, celle à Wren le 29 (V. St). Dans ſa réponſe du 13 novembre [3]) Huygens demanda des éclairciſſements pour ſavoir „de quelle partie [4]) du mouvement" ils voulaient qu'il traiterait en premier lieu [5]); il ſe déclara prêt à communiquer les règles et théorèmes qu'il avait trouvés et ajouta qu'il ſerait fort aiſe de voir ce qu'ils avaient trouvé de leur côté et s'ils s'étaient parfois rencontrés avec lui dans le même chemin [6]).

Cette réponſe fut lue dans la ſéance du 12 novembre 1668 (V. St.) [7]). Dans la même ſéance on expérimenta [8]) et discuta ſur le choc des corps et l'on

---

dont il s'est servi à cette occasion aux p. 182—186, comme Appendice à l'ouvrage annoncé (p. 177) dans l'Avertissement présent.

[1]) Birch, Vol. II, p. 315.

[2]) On la trouve aux p. 271—272 de notre T. VI.

[3]) Voir les p. 276—278 du T. VI.

[4]) Huygens énumère comme les „parties" dont il s'était occupé: la chute des corps pesants tant sans la résistance qu'avec la résistance de l'air, le mouvement des pendules, les centres d'agitation, le mouvement circulaire et conique, la force de s'éloigner du centre et enfin la communication du mouvement par la rencontre des corps.

[5]) À ce propos il fut renseigné par Oldenburg dans sa lettre du 18 nov. (V. St.), p. 295—296 de notre T. VI.

[6]) Wren de son côté avait demandé du répit pour pouvoir reprendre quelques-unes de ses expériences (Birch, Vol. 2, p. 318).

[7]) Birch, Vol. II, p. 320.

[8]) On répéta l'expérience des trois boules mentionnée dans la note 11 de la p. 173 et le président Brouncker chercha la cause du repos de la boule intermédiaire en ce qu'elle éprouvait la résistance de la boule extrême tandis que celle-ci ne rencontrait d'autre résistance que celle de l'air.

[9]) Birch, Vol. II, p. 328.

[10]) Ibidem, p. 335.

[11]) Ibidem, p. 337. Dans une lettre de décembre 1668 (p. 312 de notre T. VI) Huygens s'excusa auprès de Moray de ne pas encore être prêt. En effet, nous possédons plusieurs avant-projets, qui évidemment ne le satisfirent pas entièrement, de la Pièce qu'il finit par envoyer à Oldenburg; comparez le dernier alinéa de la note 3 de la p. 12. Voir encore la lettre du 5 janvier 1669 (p. 334—335 du T. VI) qui accompagna l'envoi de son manuscrit.

réſolut de charger le ſecrétaire Oldenburg de faire à Wallis la même demande qu'à Huygens et à Wren.

Des trois ſavants invités à faire connaître leurs réſultats concernant le choc des corps, ce fut Wallis qui fut prêt le premier. Son manuſcrit, portant la date du 15 novembre 1668 (V. St.), fut mentionné comme reçu dans la ſéance du 26 novembre [9]); celui de Wren fut lu le 17 décembre [10]); celui de Huygens le 7 janvier 1669 [11]). Après la lecture de ce dernier il fut ordonné que des copies en feraient faites et diſtribuées aux membres qui s'étaient occupés de cette matière [12]).

Le manuſcrit de Huygens [13]) eſt beaucoup plus complet que les autres. Il ne donne pas ſeulement la ſolution du cas le plus général du choc central [14]), comme les autres le font auſſi, mais de plus les hypothèſes et les démonſtrations qui y appartiennent et ſur leſquelles Huygens déſirait fort connaître l'opinion de la „Royal Society" [15]).

L'envoi de Wallis [16]) contient la théorie moderne du choc des corps mous [17]). Ses réſultats ne reſſemblent donc guère à ceux de Huygens.

---

[12]) Consultez sur ce point la note 6 de la p. 352 du T. VI.

[13]) Voir pour le contenu les p. 336—343 du T. VI.

[14]) Après avoir donné les deux propositions sur le choc des corps égaux et leurs démonstrations (comparez les deux premières Propositions du Traité „De Motu", p. 33—39 du Tome présent), Huygens s'efforce d'arriver aussi vite que possible à la démonstration de la règle générale, ce qui ne lui réussit pas entièrement puisqu'il devait laisser une lacune dans cette démonstration (voir la note 2 de la p. 343 du T. VI) qu'il ne pouvait combler sans la prolonger de beaucoup. Il laisse donc de côté tous les autres théorèmes élégants qui se trouvent dans le Traité. Toutefois il composa des anagrammes qui les contiennent et qui étaient déstinées évidemment à être envoyées à la „Royal Society"; ce qui ne paraît pas avoir eu lieu. Il ne semble pas nécessaire de les reproduire à l'exception de la première dont on ne retrouve pas le théorème correspondant dans le Traité. La voici: „Centrum gravitatis ante et post occursum | duorum corporum æquabili motu | pergit in eandem semper partem | a c e g i m n o p r s t u | a b c d e i l m o p q r t u |
3 3 3 1 2 2 2 2 1 3 3 6 4 2 1 1 1 1 2 1 3 4 1 1 3 1 5
a d e g i m n p r s t"
2 1 6 1 2 3 2 3 3 1 2 ; comparez la p. 25. Les autres anagrammes concernent les Prop. IV (p. 43), VII (p. 51), VI (p. 49), VIII (p. 53), XI (p. 73), XII et XIII (p. 81 et 87) et V (p. 47).

[15]) Voir la p. 335 du T. VI. Oldenburg lui fit connaître l'opinion favorable de l'Assemblée et du président Brouncker en particulier, dans sa lettre du 10 juin 1669, p. 444 du même Tome.

[16]) Voir les „Philosophical Transactions" du 11 janvier 1669, p. 864—866 du Vol. 3, ou les p. 359—362 de notre T. VI.

[17]) Il est vrai qu'il nomme les corps considérés par lui „absolute dura", mais il leur donne les propriétés des corps absolument mous en ce sens qu'étant indéformables ils sont dépourvus de

Quant à l'envoi de Wren [1]), ſes règles pour le choc ſont identiques à celles de Huygens [2]). Aucune démonſtration ne les accompagne [3]). Wren affirma [4]) dans la ſéance de la „Royal Society" du 17 décembre 1668 (V. St.) qu'il était déjà en poſſeſſion de ces règles lorsqu'on commença à former la „Royal Society" [5]) et cette aſſertion fut confirmée par Neile, Ball et Hill.

Le même jour (le 7 janvier 1669 V. St.) où l'envoi de Huygens fut reçu et lu par la „Royal Society" [6]), on décida, ſur la propoſition de Neile, que le manuscrit de Wren ſerait imprimé dans les „Philoſophical Transactions" du mois. En attendant, avant l'ouverture de l'envoi de Huygens, Oldenburg avait déjà envoyé à celui-ci le 4 janvier (V. St.) une copie de ce manuscrit [7]). Huygens l'en remercia dans ſa lettre du 6 février [8]) en faiſant remarquer que les règles de Wren étaient tout à fait conformes aux ſiennes et „aſſurement les veritables"; mais quel ne fut pas l'étonnement de Huygens lorsqu'il reçut les „Transactions" du mois de janvier qui contenaient les envois de Wallis et de Wren [9]) ſans qu'il y fût fait la moindre mention du ſien. La ſeule explication qu'il en trouvât dans la lettre d'Oldenburg du 4 février [10]) qui accompagnait ce numéro des „Transactions", était que lui, Huygens, n'avait pas donné la permiſſion d'imprimer et n'avait pas envoyé un ſommaire de ce qu'il avait médité. Si cela eût été le cas, lui, Oldenburg, en aurait „enrichi les mesmes Transactions de grand cœur". Mais, comme Huygens le remarqua dans ſa réponſe [11]),

---

toute elasticité. Il ne dit que quelques mots du cas où, n'étant pas „absolute dura", ils peuvent à cause d'une force élastique se repousser plus ou moins après le choc selon la grandeur de cette force restituante. Ajoutons que dans sa „Mechanica sive de Motu Tractatus Geometricus. Pars Tertia", ouvrage de 1671 (voir la note 8, p. 356 du T. VI), il donne dans son „Cap. XI. De Percussione" (p. 1002—1005 du „Volumen primum" de ses „Opera mathematica") pour le choc des corps „perfecte dura" les mêmes règles que dans l'envoi à la „Royal Society", mais dans le „Cap. XIII. De Elatere, & Resilitione seu Reflexione" (p. 1023—1031 des „Opera") il déduit à sa manière pour les corps „elastica" les règles de Huygens.

Nous avons vu (Appendice III, XI, p. 168) que d'après Huygens (contrairement à l'opinion de Wallis) les corps *absolument* durs, c. à. d. *absolument* indéformables, ne seraient pas nécessairement dépourvus d'élasticité.

[1]) Voir les „Philosophical Transactions" du 11 janvier 1669, p. 867—868 du Vol. 3, ou les p. 346—348 de notre T. VI.

[2]) Voir les p. 65—67 qui précèdent et les p. 341—343 du T. VI.

[3]) Voir p. 359 du T. VI ce que Wren répondit lorsqu'il fut interpellé à ce sujet.

[4]) Voir Birch, Vol. II, p. 335.

[5]) Vers 1660, mais consultez l'assertion de Huygens à la p. 181 qui suit, d'où l'on semble devoir conclure que la théorie de Wren n'avait pas encore été aussi complète alors, qu'il croyait se le rappeler huit ans plus tard. Remarquons d'ailleurs, que Huygens savait résoudre déjà en

Oldenburg aurait pu dire dans les mêmes Transactions, ſans attendre ſa permiſſion, que les règles communiquées par Huygens à la „Royal Society" étaient en ſubſtance les mêmes que celles de Wren.

Ce fut ſous l'influence du tort qui lui avait été fait et afin de prévenir l'impreſſion qu'il aurait formé ſa Théorie ſur celle de Wren, que Huygens écrivit l'article qui ſuit [12]). Lorsqu'il fut que cet article avait paru dans le Journal des Sçavans du 18 mars et qu'il crut qu'on en aurait pris connaiſſance en Angleterre, il écrivit, le 30 mars, trois lettres. Dans l'une, adreſſée à Oldenburg [13]), il ſe plaint en des termes très modérés de la manière d'agir de celui-ci, dans celle à Moray [14]) il s'exprime un peu plus fortement, enfin dans celle à Duhamel [15]) qui réſidait alors en Angleterre [16]), il prie celui-ci de vouloir être ſon patron en ce pays-là, puisqu'il en avait grand beſoin.

Oldenburg ſe défendit dans ſa réponſe du 29 mars (V. St.) [17]) contre l'accuſation d'„injuſtice". Ayant achevé ſa lettre, mais avant de la cacheter, il reçut l'article de Huygens du Journal des Sçavans. Il y remarqua quelques omiſſions [18]) auxquelles il jugea devoir néceſſairement ſuppléer dans les „Transactions" prochaines d'avril, et, en effet, ces „Transactions" [19]) contiennent, avec la traduction de l'article de Huygens [20]), un récit détaillé, du point de vue d'Oldenburg,

---

1652 tous les cas du choc central des corps durs et qu'il formula ses règles en 1656; comparez les pp. 8, 10 et 11 de ce Tome.

[6]) Birch, Vol. 2, p. 337.

[7]) Voir les p. 345—348 du T. VI et consultez encore la lettre du 11 janvier (V. St.) (p. 351——353 du T. VI) où Oldenburg parle de la réception et de la lecture à la „Royal Society" du Mémoire de Huygens.

[8]) Voir les p. 354—355 du T. VI.

[9]) Voir les notes 16 de la p. 175 et 1 de la p. 176.

[10]) Voir la p. 356 du T. VI.

[11]) Du 30 mars 1669. Voir la p. 390 du T. VI.

[12]) Voir les p. 179—181.

[13]) Voir la p. 390 du T. VI.

[14]) Voir les p. 396—397 du T. VI.

[15]) Voir la p. 392 du T. VI.

[16]) Voir la note 14 de la p. 391 du T. VI.

[17]) Voir les p. 414—416 du T. VI.

[18]) Consultez encore à ce propos la lettre d'Oldenburg du 26 avril 1669, p. 427 du T. VI.

[19]) Voir les „Philosophical Transactions" du 12 avril 1669, p. 925—928 du Vol. 4, ou les p. 429—433 de notre T. VI.

[20]) Consultez à la p. 439 du T. VI l'indication par Huygens de deux „fautes d'impression" dans cette traduction.

de ce qui c'était paſſé. Duhamel, dans ſes lettres du 8 avril et du 15 avril [1]), rend compte de ſes entretiens avec Oldenburg. Moray répondit par une lettre très obligeante [2]), où il dit que ceux qui avaient été „temoins de ce que vous decouuriſtes des reigles que vous auiez toutes preſtes lors que ſur le champ dans voſtre chambre au Comun Jardin vous declaraſtes la reſulte de quelques experiences [3]) qu'on vous repreſenta auec une exactitude bien ſurprennante" ne manquèrent en toutes occaſions de lui en attribuer l'honneur qui lui était dû; mais — ajouta Moray — „des perſonnes diferentes ſe rencontrent quelques fois dans une meſme inuention et produiſent les meſmes choſes par des methodes et moyens differents. Et en tel cas il me ſemble que lhonneur de linuention ſe peut attribuer a tous les deux ſans faire tort a l'un ou à lautre".

Après avoir lu ces lettres et l'article des „Transactions" Huygens ſe déclara ſatisfait" [4]).

Ainſi ſe termina un incident qui menaça un inſtant troubler la bonne entente entre Huygens et les ſavants anglais, mais dont l'heureux effet a été de forcer Huygens à publier ses lois du choc, qui, ſans cela, n'auraient paru peut-être que parmi ſes œuvres poſthumes, comme il en a été du traité „De Motu Corporum ex Percussione" qui précède [5]).

---

[1]) Voir les pp. 417 et 422 du T. VI.

[2]) Voir les p. 423—424 du même Tome.

[3]) Il s'agit des expériences faites le 23 avril 1661 auxquelles Wren avait assisté; voir le dernier alinéa de la p 172 ci-dessus.

[4]) Voir sa lettre du 29 mai 1669, p. 439 du T. VI.

[5]) Voir les p. 29—91.

[6]) L'article qui suit occupe le bas de la p. 19—20 et les p. 21—24 du cahier du lundi 18 mars 1669 de l'édition originale du „Journal des Sçavans". On le retrouve aux p. 531—536 du Tome deuxième de l'édition d'Amsterdam. Il fut réimprimé aux p. 341—343 du T. X des „Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Depuis 1666 jusqu'à 1699", publié en 1730. Une traduction latine des „Regles" (sans l'alinéa qui les précède et sans le dernier des alinéas qui les suivent) parut dans les „Phil. Trans. Vol. 4, N°. 46, April 12. 1669", p. 927—928.

Ajoutons encore que la minute de la présente Pièce a été reproduite aux p. 383—385 de notre T. VI, où elle est suivie, p. 385—386, du commencement et de la fin de la Pièce elle-même reproduits d'après l'édition d'Amsterdam.

[7]) Comparez les pp. 99—100 et 112—113. Remarquons toutefois que Galilée n'a nulle part donné des règles du genre de celles qui suivent. Il s'est contenté de considérer la force immense qui peut accompagner les phénomènes du choc.

[8]) Dans la „Pars secunda" de ses „Principia Philosophiæ" de 1644; voir les p. 61—79 du T. VIII, 1905, de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes.

[9]) Il s'agit sans doute de l'ouvrage suivant: „Tractatus physicus de motu locali, in quo effectus

Extrait d'une Lettre de M. Hugens à l'Auteur du Iournal [6]).

Je vous envoye, comme j'avois promis, mes propoſitions touchant le mouvement de percuſſion, c'eſt à dire le mouvement qui eſt produit par la rencontre des corps. Cette matiere a déja été examinée par pluſieurs excellens hommes de ce ſiecle, comme Galilée [7]), Descartes [8]), le P. Fabri [9]), & depuis peu par M. Borelli [10]), desquels je ne rapporteray pas maintenant les divers ſentimens: Mais je vous diray ſeulement que ma Theorie s'accorde parfaitement avec l'experience, & que je la crois fondée en bonne demonſtration, comme j'eſpere de faire voir bien-toſt en la donnant au public.

Regles du mouvement dans la rencontre des Corps.

1. Quand un corps dur rencontre directement un autre corps dur, qui luy eſt égal & qui eſt en repos, il luy transporte tout ſon mouvement, & demeure immobile aprés la rencontre [11]).

2. Mais ſi cet autre corps égal eſt auſſi en mouuement, & qu'il ſoit porté dans la mesme ligne droite; ils font un échange reciproque de leurs mouvemens [12]).

---

omnes, qui ad impetum, motum naturalem, violentum, et mixtum pertinent, explicantur, et ex principiis physicis demonstrantur. Auctore Petro Mousnerio Doctore Medico cuncta excerpta ex praelectionibus R. P. Honorati Fabry, Societatis Iesu. Lugduni, apud Joannem Champion, in foro Cambij. MDCXLVI."

Le choc des corps y est traité à deux reprises: d'abord dans le Liber I, intitulé „de Impetu", ensuite dans le Lib. VI „De Motu Reflexo". Les démonstrations, d'une apparente rigueur logique, sont fondées sur un assez grand nombre de définitions, d'hypothèses, d'axiomes et de postulats, dont la valeur est le plus souvent illusoire. Aussi s'étonne -t- on plus ou moins de voir l'auteur arriver parfois à des théorèmes justes concernant le choc central de deux globes égaux. Il démontre en effet dans le Théorème 60 du Lib. I la Prop. I, p. 33, du Traité „de Motu" de Huygens et dans le théorème 135 du même livre (et aussi dans le Théorème 68 du Lib. VI) la deuxième des hypothèses que celui-ci accepte, p. 31, sans démonstration. En partant des deux théorèmes nommés, l'auteur arrive par une induction incomplète, mais plausible, à la Prop. II, p. 37, du Traité „de Motu" (Lib. VI, Theor. 60).

En considérant ces résultats corrects quoiqu'obtenus par des raisonnements douteux, on concédera que le Père Fabry (voir sur lui T. III, p. 83, note 3) a bien les mêmes droits que Descartes à être cité parmi les précurseurs de Huygens dans la science si difficile de la percussion des corps. Comparez encore la note 10 de la p. 182.

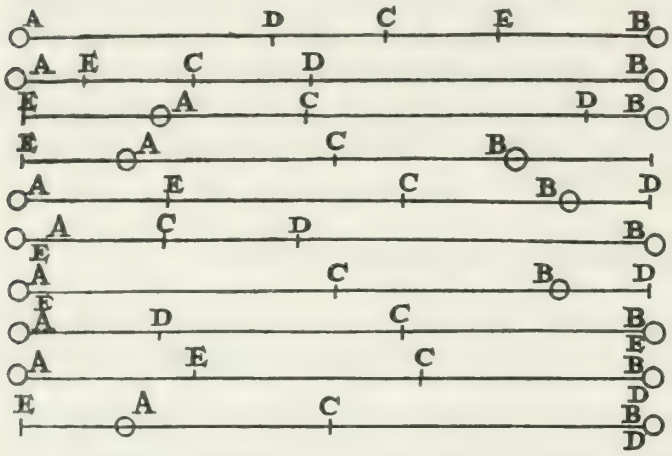
[10]) Dans l'ouvrage: „De vi percussionis liber Io: Alphonsi Borelli. In Patria Messanensi pridem, nunc vero in Pisana Academia Matheseos Professoris. Bononiæ, MDCLXVII. Ex Typographia Iacobi Montij." On peut consulter encore sur l'opinion de Huygens concernant cet ouvrage les p. 161—162 du T. VI et la p. 203, note 19, du Tome présent.

[11]) Comparez (p. 33) la Prop. I du Traité „De Motu".

[12]) Comparez (p. 37) la Prop. II.

3. Un corps, quelque petit qu'il ſoit, & quelque peu de viteſſe qu'il ait, en rencontrant un autre plus grand qui ſoit en repos, luy donnera quelque mouvement [1]).

4. La regle generale pour determiner le mouvement qu'acquierent les corps durs par leur rencontre directe, eſt telle [2]).



Soient les corps A & B, desquels A ſoit meu avec la viteſſe AD, & que B aille à ſa rencontre ou bien vers le mesme coſté avec la viteſſe BD, ou que mesmes il ſoit en repos, le point D en ce cas étant le même, que B, ayant trouvé dans la ligne AB le point C centre de gravité des corps AB, il faut prendre CE égale à CD, & l'on aura EA pour la viteſſe du corps A apres la rencontre, & EB pour celle du corps B, & l'une & l'autre vers le coſté que montre l'ordre des points EA, EB: Que s'il arrive que le point E tombe en A ou en B, les corps A ou B ſeront reduits au Repos.

5. La quantité du mouvement qu'ont deux corps, ſe peut augmenter ou diminuer par leur rencontre [3]); mais il y reſte toûjours la mesme quantité vers le mesme coſté, en ſouſtrayant la quantité du mouvement contraire [4]).

6. La ſomme des produits faits de la grandeur de chaque corps dur, multiplié par le quarré de ſa viteſſe, eſt toûjours la mesme devant & apres leur rencontre [5]).

7. Un corps dur qui eſt en repos, recevra plus de mouvement d'un autre corps dur plus grand ou moindre que luy, par l'interpoſition d'un tiers de grandeur moyenne, que s'il en eſtoit frappé immediatement: Et ſi ce corps interpoſé eſt moyen proportionnel entre les deux autres, il fera le plus d'impreſſion ſur celuy qui eſt en repos [6]).

Ie conſidere en tout cecy des corps d'une mesme matiere, ou bien j'entends que leur grandeur ſoit eſtimée par le poids.

---

[1]) Comparez (p. 39) la Prop. III.

[2]) On retrouve cette règle au Traité „De Motu" dans l'alinéa qui commence en bas de la p. 65.

[3]) Comparez (p. 49) la Prop. VI.

[4]) Consultez à propos de ce Théorème les p. 24—25.

[5]) Comparez (p. 73) la Prop. XI.

Au reſte j'ay remarqué une loy admirable de la Nature, laquelle je puis démontrer en ce qui eſt des corps Spheriques [7]), & qui ſemble eſtre generale en tous les autres tant durs que mols, ſoit que la rencontre ſoit directe ou oblique: C'eſt que le centre commun de gravité de deux ou de trois ou de tant qu'on voudra de corps, avance toûjours également vers le méme coſté en ligne droite devant & apres leur rencontre.

Vous aurez vû des regles ſemblables en ſubſtance à quelques-unes de celles-cy dans le dernier Iournal d'Angleterre [8]): ce qui m'oblige de vous dire, afin de n'eſtre pas ſoupçonné d'avoir rien emprunté d'ailleurs, que j'ay fait part de mes regles à Meſſieurs de la Societé Royale d'Angleterre avant l'impreſſion de celles-là. Car ces Meſſieurs m'ayant prié il y a quelques ſemaines [9]) de leur communiquer ce que j'avois medité ſur le ſujet du mouvement, j'envoiay [10]) à Monſieur d'Oldembourg Secretaire de la Societé Royale d'Angleterre les quatre premieres des ſept Propoſitions que vous avez vûes cy-deſſus, avec leurs demonſtrations: Aprés qu'il les eut receues, il me renvoya la Theorie de Monſieur Vvren tout à fait conforme à mes regles, qu'il m'aſſura avoir eſtè preſentée à cette societé il y avoit 15 jours [11]), & qui a eſté depuis imprimée dans le Iournal d'Angleterre. Monſieur d'Oldembourg & beaucoup d'autres de cette Compagnie pourront auſſi témoigner qu'en l'année 1661 me trouvant à Londres, Meſſieurs Vvren & Rook me propoſerent quelques cas de cette percuſſion des corps, dont je leur donnay ſur l'heure la ſolution par mes principes; & je me ſouviens qu'elle s'accordoit parfaitement avec les experiences qu'ils en avoient faites; car pour ce qui eſt de la Regle, ils m'avoüerent qu'ils n'en avoient pas encore trouvé de certaine pour ces ſortes de mouvemens [12]). Ie pourrois vous alleguer une poſſeſſion encore bien plus ancienne de la connoiſſance de ces loix de la Nature [13]), ſi je n'apprehendois de vous donner d'autant plus de ſujet de me blâmer d'avoir eſté ſi long-temps ſans les communiquer.

---

[6]) Comparez (p. 81) la Prop. XII.

[7]) Nous ne connaissons pas cette démonstration. Voir encore à ce propos l'alinéa qui commence au bas de la p. 24.

[8]) Il s'agit du N°. 43 des „Philosophical Transactions" du 11 janvier 1669, où l'on trouve p. 867—868 l'article de Wren qui a été reproduit aux p. 346—348 de notre T. VI.

[9]) Voir la lettre d'Oldenburg du 5 novembre 1668, p. 271—272 du T. VI.

[10]) Voir les p. 336—343 du T. VI et la lettre à Oldenburg du 5 janvier 1669 (p. 334—335 du T. VI) qui accompagnait cet envoi.

[11]) Voir la lettre d'Oldenburg du 14 janvier 1669, p. 345—346 du T. VI.

[12]) Consultez sur cette entrevue du 23 avril 1661 les p. 172—173.

[13]) Huygens fait allusion ici à sa correspondance avec de Sluse de 1657 et 1658; voir la note 6 de la p. 171.

APPENDICE [1])

À L'„EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. HUGENS À L'AUTEUR DU JOURNAL" SUR LES „REGLES DU MOUVEMENT DANS LA RENCONTRE DES CORPS".

[1668] [2])

Philetymus. Eudoxus. Antiphanes [3]).

Galilee premier qui ait bien examinè le mouvement [4]).

1 [5]) Paſſage de Galilée ſur ce qu'il promet de cette matiere, et ce qu'il dit de ſa difficultè [6]).

2 des Regles de descartes [7]). qu'il demande le vuide pour ces mouvemens [8]). que je le ſuppoſe ſi l'on veut [9]).

2.1 Regles de Fabri [10]).

4 que mes exper. s'accordent avec mes regles, ce qui ne ſe pourrait faire ſi elles eſtoient fauſſes [11]).

---

[1]) Cet Appendice est emprunté aux p. 115—116 du Manuscrit D. Il contient sans doute des annotations de Huygens qui lui ont servi dans les discussions du 4, 11 et 18 janvier 1668 sur les règles du mouvement dans l'Académie des Sciences; discussions mentionnées comme suit dans les Registres de cette Académie: „Le 4e et 11e Janvier 1668 on a examiné des règles du mouvement de Mr Hugens .... Le 18e de Janvier .... Mr Hugens a continué ses règles du mouvement".

[2]) D'après le lieu que la Pièce occupe dans le manuscrit D.

[3]) Ces noms se trouvent en tête de la première des pages dont nous avons emprunté la présente Pièce, mais il est difficile de deviner ce qu'ils ont à faire avec ce qui suit. Eudoxus, il est vrai, le contemporain de Platon, est bien connu comme mathématicien et astronome. Mais que signifie ici le nom d'Antiphanes, auteur dramatique du 4ième siècle avant notre ère? Quant à Philetymus, nous ne connaissons aucun Grec qui ait porté ce nom.

Il n'est pas impossible que les trois noms ont une signification symbolique et désignent différents savants ou types de savants: Philetymus désigne peut-être le philosophe qui aime la réalité (ce qui pourrait s'appliquer à Galilée), Eudoxus, le philosophe célèbre (Descartes?), et Antiphanes le philosophe qui contredit (Huygens, contradicteur de Descartes?).

[4]) Comparez la note 7 de la p. 178.

[5]) Sans doute les nombres: 1, 2, 2.1, 4, 14.1. etc. indiquent l'ordre dans lequel Huygens a traité ou s'est proposé de traiter dans l'Assemblée les sujets en question.

[6]) Voir le dernier alinéa de la note 8 de la p. 99, la note 1 de la p. 100 et la p. 138.

[7]) Consultez la note 4 de la p. 4.

[8]) Voir à la p. 5 le dernier alinéa de la note 4 de la p. 4.

[9]) Comparez la p. 101 et le dernier alinéa de la p. 102.

[10]) Il s'agit des règles formulées dans l'ouvrage cité dans la note 9 de la p. 178. Ajoutons que les „Dialogi Physici, quorum primus est de lumine, secundus et tertius de Vi Percussionis et Motu", etc. de Fabri ne parurent qu'en 1669; voir la note 6 de la p. 143 du T. III. Notons en

14.1 de la quantitè du mouuement, qu'elle s'augmente et diminue en certain ſens et en un autre ſens point [12]).

15 Mouvement droit n'eſt que relatif [13]) entre divers corps, le circulaire autre choſe et a ſon κριτηριον que le droit n'a point [14]) mais on en parlera dans une autre occaſion [15]).

14.2 Vortex ayant une fois ſon mouvement, il demeurera tousjours egal vers le mesme coſtè [16]).

15.1 Il n'y a rien qui diſtingue le mouvement droit d'avec le repos, et que l'un et l'autre n'eſt que relatif, l'eſtendue du monde eſtant infinie.

5 Si c'eſt que les corps durs font reſſort, qu'ils ſe pouſſent et s'ecartent [17]).

6 Si c'eſt l'air entre deux qui fait reſſort. Experience de deux verres convexes, ou l'on voit qu'il y reſte de l'air entre deux [18]).

7 dimenſion de choſes tres minces par le moyen de cet angle de contact de deux verres [19]).

8 des couleurs qui y naiſſent et de l'espeſſeur qu'il faut pour les produire.

---

passant que les dialogues II et III de ce dernier ouvrage, qui traitent du choc des corps, ne contiennent qu'un commentaire sur l'ouvrage de Borelli (p. 179, note 10).

[11]) Consultez l'avant-dernier alinéa de la p. 20.

[12]) Consultez la cinquième règle de la p. 180.

[13]) Il s'agit du Principe de la relativité exposé et appliqué tant de fois par Huygens dans ce qui précède; voir p. e. les pp. 33, 95, 103 et 141—143.

[14]) Allusion aux lois de la force centrifuge, découvertes par Huygens vers 1659. Elles furent publiées sans démonstrations aux p. 159—161 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" de 1673 et avec leurs démonstrations (dues en partie aux éditeurs des „Opuscula Postuma") en 1703 sous le titre „De Vi Centrifuga", p. 401—428 des „Opuscula Postuma" Nous les reproduisons plus loin dans ce Tome. Le „κριτηριον" en question fut cherché par Huygens dans la tension du fil retenant le corps dans son orbite circulaire.

[15]) Dans un discours sur la cause de la pesanteur que Huygens a tenu devant l'assemblée le 28 août 1669 il dit avoir fait voir „cy-devant" la propriété du mouvement circulaire de créer une force centrifuge et qu'il avait trouvé la détermination de cette force et plusieurs Théorèmes qui la concernent „que nous examinerons icy quelque jour". Comparez la p. 305 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la p. 91 de notre T. IX, où de la Hire a reproduit avec quelques variantes ce discours de Huygens.

[16]) Nous n'avons pas retrouvé cette remarque, ni dans le discours mentionné dans la note précédente, ni ailleurs dans les manuscrits.

[17]) Comparez à propos de cet article la Pièce V, p. 159—160.

[18]) Sous la date de novembre 1665 on trouve aux p. 78—80 du Manuscrit C des expériences et des calculs qui se rapportent aux anneaux colorés qu'on observe sous le microscope lorsqu'on superpose deux lentilles planconvexes. Ces annotations seront reproduites dans notre publication à leur propre place. Elles contiennent la phrase: „Experiendum esset in vacuo machinæ pneumaticæ, ubi credibile est disparituras coloratas irides, cum aer subtrahatur." Probablement cette expérience, qui peut avoir été faite plus tard, est-elle celle que Huygens a en vue dans le texte. Mais nous n'avons pu trouver dans les manuscrits aucun renseignement à ce sujet.

[19]) Voici ce qu'on lit parmi les annotations mentionnées dans la note précédente: „Experien-

6.1 Experience belle des boules ou dames [1]) rangees et frappees par 2 ou 3 autres. Et que la communic.n du mouuement s'y fait de mesme que ſi les boules avoient quelque petite diſtance [2]).

15 de la rencontre des corps moux et la commun.n de mouuement qui s'y fait [3]).

16 de la rencontre des boules point directe [4]).

14 grande multiplication de mouvement dans un grand nombre de corps pro-
13 portionnales, et la maniere du calcul [5]).

9 Principes ou hypotheſes. . . .

11 Oppoſitions contre la demonſtration par le batteau [6]).

10 de la rencontre de corps egaux [7]).

14.3 | 3 Force infinie du coup [8]). et abus de ceux qui l'ont voulu comparer avec celle du poids. Experiences dans la balance [9]).

12 Theoremes principaux. Et la demonſtration de la pluspart a la fin [10]). qu'on leur laiſſera [11]).

17 [12]) Si les corps parfaitement durs ne rejaliſſent point, comment s'eſtendra la lumiere. les corpuſcules qui y ſervent ne pourront donc pas eſtre des atomes mais ce ſeront des petits corps faiſant chacun reſſort et par conſequent compoſez. Cela s'accorde avec l'hypotheſe du P. Pardies que la lumiere ne s'eſtend pas dans un inſtant, par ou il explique la refraction [13]).

---

dum an eadem requiratur crassitudo laminæ aqueæ, vitreæ vel talci [pour montrer les couleurs]. Posset talci crassitudo interpositione inter lentes duas explorari, tentando quousque lamella ingrediatur angulum contactus."

[1]) Consultez sur ces „dames" ou disques la note 21 de la p. 143.

[2]) Comparez la Pièce VII aux p. 159—160.

[3]) Consultez la Pièce IX aux p. 161—164.

[4]) Voir les p. 117—118.

[5]) Consultez les pp. 91 et 156—158.

[6]) Comparez l'alinéa qui commence en bas de la p. 11.

[7]) Voir les deux premières règles, p. 179.

[8]) Comparez p. e. la p. 113.

[9]) Il s'agit probablement d'expériences dans lesquelles, afin de déterminer la force de la percussion, on laissait tomber divers poids de diverses hauteurs sur l'un des plateaux d'une balance, tandis que l'autre plateau, chargé d'un poids supérieur, reposait sur un soutien. Comparez les pp. 285—286 de l'ouvrage de Borelli (p. 179 note 10). On trouvera une description détaillée d'expériences de cette sorte dans la polémique de Gassend avec le Père Cazrée (voir les „Epistolae tres de proportione, qua gravia decidentia accelerantur quibus ad totidem epistolas R. P. Petri Cazraei S. J. respondetur". Petri Gassendi Opera Omnia. Vol. III. Tomus Tertius. Lugduni 1658, p. 575*a*—579*a*).

D'ailleurs le père Mersenne parle déjà d'expériences de ce genre dans son Traité „Reflexiones mathematicæ", Cap. VIII: „De viribus percussionis". Ce Traité fait partie du „Novarum observationum physico-mathematicarum F. Marini Mersenni Minimi Tomus III, Parisiis, sumptibus Antonii Bertier, 1647".

[10]) Comparez (p. 336—343 du T. VI) les démonstrations envoyées le 5 janvier 1669 à la „Royal Society" et consultez la note 3 de la p. 12.

18. Qu'eſt ce que le reſſort des corps durs? c'eſt qu'en les pliant on eſtreint les paſſages par ou couloit la matiere tres ſubtile avec une grande viteſſe. leſquels paſſages elle remet ou taſche de remettre, par l'effort qu'elle fait, dans leur premiere diſpoſition.

19. Qu'eſt ce que le reſſort de l'air. Il eſt vraiſemblable que l'air ſont [ſic] des particules longuettes qui ſont remuees en tous ſens et circulairement a l'atour de leur centre, par le mouvement rapide de la matiere ſubtile, de ſorte que quand on reduit quelque partie d'air dans un moindre eſpace qu'il n'occupoit auparavant, ces parties ſe rencontrent et ſe frappent, et par la font effort de s'ecarter d'avantage les unes des autres. la grande liquiditè de l'air demande cette facon de reſſort, par ce qu'autrement ſi c'eſtoit comme des reſſorts entortillez ainſi que quelques uns ont voulu, l'air comprimè dans un tuyau n'aurait pas cette liquiditè qu'on y remarque.

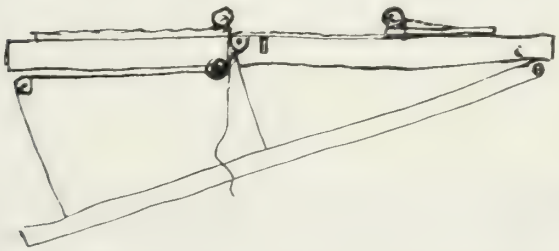
Comment eſt-ce que l'eau quoyque comprimée garde ſa liquiditè il ſemble que ſes parties doivent eſtre bien polies et gliſſantes, ou eſt ce que la violence du mouvement de la matiere ſubtile qui coule a travers en donnant quelque mouvement ou tremouſſement aux parties de l'eau, fait qu'elles cedent facilement à quelque grand corps qu'on y remue dedans. Si les parties de l'eau eſtoient gliſſantes il ſemble qu'il n'y pourroit pas reſter tant d'eſpace entre elles, qu'il en faut pour faire que l'eau differe tant en peſanteur d'avec le vif argent car elle n'en peſe que la quatorzieme partie. Ce qui ſemble venir de ce qu'elle ne contient que la $\frac{1}{14}$ partie de matiere coherente, ou qui eſt cenſee eſtre en repos a legard du

---

[11]) On n'en trouve rien dans les Registres de l'Académie.

[12]) En marge de ce numéro on lit l'annotation suivante: „faire rencontrer 2 boules dans le vuide. faut les suspendre en haut et attacher l'une avec de la cire contre le coste du verre, et puis ij approcher du feu par dehors pour la detacher."

De plus on trouve dessinée dans le Manuscrit, pêle mêle avec le texte des numéros 17 et 18, la figure suivante, qui porte une si grande ressemblance à la Fig. 9 de la p. 158 que les machines que ces figures représentent ont dû servir au même but (indiqué par nous dans la note 12 de la p. 159).



[13]) Consultez a propos de cette hypothèse le passage du „Traité de la lumière" (1690) cité dans la note 32 de la p. 612 de notre T. X et aussi les pp. 203, 204, la note 11 de la p. 601 et la note 31 de la p. 612 du même Tome.

mouvement rapide de la matiere ſubtile, pourquoy eſtant preſſee ne ſe reduit elle point à moindre eſpace, auſſi bien que l'air. Eſt ce que la preſſion que nous faiſons eſt beaucoup trop foible pour empeſcher le remouement dont la matiere ſubtile agite les parties de l'eau, qui ſont deſia poſees les unes ſur les autres, ce qui n'eſt pas ainſi dans celles de l'air, qui voltigent. Ou eſt ce que la preſſion que nous ſommes capables de faire n'eſt pas conſiderable aupres de celle que l'eau ſouſtient deſia non ſeulement du poids de l'air mais de cette autre matiere plus ſubtile dont on a connu la preſſion par mon experience du vuide [1]).

[1]) On peut consulter sur cette expérience et sur l'hypothèse que Huygens avait émise à ce propos l'„Extrait d'une lettre de M. Hugens" dans le „Journal des Sçavans" du 25 juillet 1672 „touchant les phenomenes de l'Eau purgée d'air", extrait que nous avons reproduit aux p. 201—206 de notre T. VII.

MANUSCRITS ULTÉRIEURS CONCERNANT L'HISTORIQUE DE LA THÉORIE DU CHOC DES CORPS ET LA QUESTION DE L'EXISTENCE ET DE LA PERCEPTIBILITÉ DU „MOUVEMENT ABSOLU."

Avertiſſement.

Nous ſavons que même en 1692 Huygens n'avait pas encore abandonné [1]) l'intention de publier ſes démonſtrations des règles du choc, rédigées déjà en 1656 [2]). En effet, nous poſſédons un aſſez grand nombre de Pièces écrites à des dates incertaines, mais à une époque avancée de ſa vie, qui ſe rapportent à cette intention.

Ce n'eſt pas qu'il veut apporter encore des changements importants dans ſon Traité „De Motu corporum ex percuſſione" [3]). Au contraire, il lui paraît que l'enſemble des Hypothèſes et des Propoſitions avec leurs démonſtrations laiſſe peu à déſirer [4]) et ſurpaſſe de beaucoup ce que quelques-uns de ſes contemporains ont donné après la publication ſans démonſtrations de pluſieurs de ces Propoſitions dans ſon article dans le Journal des Sçavans du 8 mars 1669 [5]). Ce qu'il ſe propoſe maintenant c'eſt d'écrire une préface pour ce Traité, ainſi que pour celui ſur la Force Centrifuge [6]); préface qui en premier lieu doit donner un aperçu de l'hiſto-

---

[1]) Voir sa lettre à Leibniz du 11 juillet 1692 aux p. 302—303 de notre T. X.
[2]) Voir la p. 10.
[3]) Voir les p. 31—91.
[4]) Voir cependant la note 5 de la p. 221 qui suit.
[5]) Voir les p. 179—181.
[6]) Ou plutôt pour un Traité unique sur la percussion et la force centrifuge. Voir la note 2 de la p. 202 qui suit.

rique de la théorie du choc avant et après ſes propres découvertes, et en ſecond lieu quelques conſidérations théoriques ſur le mouvement en général ou plutôt ſur la nature, abſolue ou relative, du mouvement rectiligne et du mouvement circulaire.

Force nous eſt donc d'entrer en quelques détails ſur cette dernière queſtion telle qu'elle ſe préſentait à Huygens et à ſes contemporains.

On ſait que ſuivant la doctrine d'Ariſtote, et de Ptolémée, la terre ſe trouve dans un état de repos abſolu au centre de la ſphère des étoiles fixes en dehors de laquelle, d'après Ariſtote, rien n'exiſte, pas même l'eſpace [1]). Copernic, auſſi bien qu'Ariſtarque [2]), conſerve la ſphère des étoiles fixes; du monde ſphérique [3]) notre ſoleil, immobile, occupe le centre [4]). Il ne ſe prononce pas ſur la queſtion de ſavoir ſi l'eſpace eſt infini [5]).

---

[1]) Aristoteles, Physica III, 5 (Aristotelis Opera ed. Acad. regia Borussica, ex recensione I. Bekkeri, Berolini, apud G. Reimerum, 1831, Vol. I, p. 205 b, dernière ligne): ἀδύνατον τόπον ἄπειρον εἶναι („il est impossible qu'un espace infini existe").

[2]) Archimède dans son Ψαμμίτης (Archim. Opera omnia ed. J. L. Heiberg, Vol. II, Lipsiae, Teubner, 1913, p. 218) dit que suivant Aristarque le soleil et la sphère des étoiles fixes ont le même centre. Toutefois il n'est pas absolument certain qu'Aristarque est d'avis que toutes les étoiles se trouvent sur une sphère de grandeur finie. D'une part Archimède ajoute que suivant Aristarque (ce que lui, Archimède, considère comme une impossibilité) „la circonférence décrite par la terre autour du soleil [ou plutôt le rayon de cette circonférence] est au rayon de la sphère des étoiles fixes comme le centre d'une sphère est à sa surface", d'autre part Plutarque ou Pseudo-Plutarque („De Placitis Philosophorum", ed. Ed. Corsinus, Florentiæ, 1750, II, c. 24) dit qu'Aristarque considère le soleil comme une des étoiles fixes („Aristarchus Solem cum inerrantibus stellis collocat", en grec: Ἀρίσταρχος τὸν ἥλιον ἵστησι μετὰ τῶν ἀπλανῶν).

Plusieurs philosophes anciens font une distinction entre le monde (terminé par la sphère des étoiles fixes) et l'univers qui peut être infini et contenir plusieurs mondes. Voir p. e. Ps.-Plutarque („De Placitis Phil." édition nommée, II, c. 1): „Democritus et Epicurus... infinitos Mundos in spatio undequaque infinito positos existimarunt... Seleucus mundum infinitum esse putavit, Diogenes Universum quidem infinitum, Mundum vero finitum esse dixit. Stoici differre Totum atque Universum existimant. Siquidem Universum una cum Vacuo, quod illud in se complectitur, infinitum esse; Totum vero sine Vacuo, a quo circumfunditur, esse Mundum, proindeque Universum ac Mundum non idem esse dixerunt."

Copernic connaissait l'ouvrage de Ps.-Plutarque qui dit comme Archimède qu'Aristarque fait mouvoir la terre autour du Soleil (II, c. 24: „Tellurem vero circa Solem... movet", en grec: τὴν δὲ γῆν κινεῖ περὶ τὸν ἡλιακὸν κύκλον); mais Copernic nomme de préférence d'autres précurseurs anciens.

[3]) N. Copernici Revolutionum L. I, C. I: „Principio advertendum nobis est, globosum esse mundum".

[4]) L. I, C. X: „... centrum mundi: quo etiam Sole immobili permanente..."

Huygens dès ſa jeuneſſe admet l'infinité de l'eſpace [6]), comme Descartes [7]) et bien d'autres [8]) l'avaient fait avant lui.

En ſe déclarant partiſan de la doctrine de Copernic [9]), il veut dire, comme Galilée [10]), qu'à ſon avis les planètes, et la terre parmi elles, ſe meuvent autour

---

[5]) Il est vrai qu'il dit (L. I, C. VI): „.. satis apparet... sensus æstimatione terram esse respectu cœli, ut punctum ad corpus", ce qui rappelle la locution employée par Aristarque (note 2); mais ici il s'agit sans aucun doute d'une expression forte pour désigner l'immensité du rayon de la sphère des étoiles fixes. Comparez la note 1 de la p. 192.

Cette phrase de Copernic est d'ailleurs presque identique à celle de Ptolémée (Cl. Ptolemæi Opera quæ exstant omnia, ed. J. L. Heiberg, Lipsiæ, Teubner, 1898, Vol. I, p. 20: ὅτι... σημείου λόγον ἔχει πρὸς αἴσθησιν ἡ γῆ πρὸς τὸ μέχρι τῆς τῶν ἀπλανῶν καλουμένων σφαίρας ἀπόστημα).

[6]) Voir ce T. p. 4. Il lut à l'âge de 16 ans „Les Principes de la Philosophie" de Descartes, et il lui sembla „que tout alloit le mieux du monde". Il est vrai que plus tard il revint de cette „préoccupation", mais il est permis de supposer qu'il ne changea jamais d'avis au sujet de l'infinité de l'espace. Voir p. e. à la p. 195 le troisième alinéa de la note 6.

[7]) Descartes, „Les Principes de la Philosophie", II § 21 (T. IX des Œuvres, publ. par Adam et Tannery, p. 74): „Nous sçaurons aussi que ce monde, ou la matiere estendue qui compose l'vnivers, n'a point de bornes, pource que, quelque part où nous en vueillons feindre, nous pouuons encore imaginer au delà des espaces indefiniment estendus, que nous n'imaginons pas seulement, mais que nous conceuons estre tels en effet que nous les imaginons." Descartes ajoute (III § 13, T. IX, p. 107): „Que le Soleil peut estre mis au nombre des Estoiles fixes" et (§ 23, T. IX, p. 111): „Que toutes les Estoiles ne sont point en une superficie sphérique."

[8]) E. a. le poète epicuréen Lucrèce (premier siècle avant notre ère); voir „De Rerum Natura", I vs. 958 et suiv.; II vs. 1053 „undique spatium... infinitum". Lucrèce admet une infinité de mondes dans le sens de la note 2, deuxième alinéa. Au seizième siècle Giordano Bruno (1548—1600) fut le grand apôtre de l'infinité de l'espace et de l'idée que les étoiles fixes sont des soleils comme le nôtre. Voir ses dialogues et son Traité „de immenso et innumerabilibus, seu de universo et mundis" (J. Bruni Nolani opera latine conscripta rec. F. Fiorentino Vol. I. Pars I, p. 191. Neapoli, apud D. Morano, 1879).

[9]) Voir p. e. T. XV, p. 215 (Année 1659).

[10]) Galilée, comme Bruno et Descartes, est d'avis que les étoiles sont dès soleils et qu'elles ne sont pas situées sur une sphère; mais il n'ose pas affirmer l'infinité de l'espace. Opere di Galileo Galilei, Ed. Naz. VI, Firenze, 1896, p. 523 (Lettera a Fr. Ingoli, 1624): „... voi supponete che le stelle del firmamento sieno collocate tutte in un medesimo orbe: il che è tanto dubbio a sapersi, che nè voi nè altri [altro?] lo proverà mai in eterno; e stando su 'l conietturale e su 'l probabile, io dirò che nè anco quattro delle stelle fisse, non che tutte, sono da qual punto più vi piacesse assegnar nell' universo egualmente lontane; ed a voi toccherà a provare il contrario". P. 525: „Le fisse... risplendono per loro medesime... sì che nessuna cosa gli manca per poter esser chiamate e stimate Soli." P. 530: „il Sole... non ha condizione alcuna per la quale noi lo possiamo sequestrare dal gregge dell' altre stelle fisse". P. 530: „il discorso e la mente mia non si sa accomodare a concepirlo [lo spazio] nè finito nè infinito; e però in questo mi rimetto a quello che ne stabiliscono le scienze superiori".

du ſoleil: rien n'indique qu'il ait jamais, comme Copernic, Kepler [1]) et Baco de Verulam [2]), cru à l'exiſtence d'une ſphère ſtellifère ou plus généralement d'une ſphère enveloppant notre monde [3]).

Il ne dit nulle part qu'il attribue au ſoleil (ou aux étoiles fixes) l'immobilité par rapport à l'eſpace [4]).

Quant aux arguments de ceux qui combattent le mouvement de la terre, il eſt

---

[1]) Voir „Epitome Astronomiæ Copernicanæ, authore J. Keplero, Francofurti, impensis I. G. Schönwetteri, exc. I. F. Weissius, Anno 1635." À la p. 492 Kepler écrit: „Sicut diameter Saturni, extimæ sphæræ mobilium, continet in se diametrum corporis Solaris bis millies circiter: Sic etiam diameter sphæræ fixarum continet diametrum Saturni in se fere bis milies." Et à la p. 498: „Videtur igitur una qualibet Fixarum tale corpus esse, quale Sol est, et Sol vicissim inter fixas videtur tantus et talis appariturus, quanta et qualis unaqualibet Fixarum? Non existimo."

D'autres Copernicains évaluent diversement le rayon de la sphère des étoiles fixes. Chez Copernic lui-même la grandeur de cette sphère est „indefinita". Voir Riccioli, Almagestum novum (ouvrage cité à la p. 402 du T. I) I, p. 419.

[2]) Voir „Fr. Baconi Opera Omnia, Francofurti, impensis J. B. Schönwetteri, typ. M. Kempffer, Anno 1665." Bacon admet l'infinité de l'espace; il écrit (Novi Organi L. I, p. 285): „incogitabile est ut sit aliquid extremum aut extimum Mundi, sed semper quæri necessario occurrit ut sit aliquid ulterius." Au sujet de la mécanique céleste il s'exprime d'une façon peu claire dans les termes suivants (Novi Organi L. II, p. 404): „Motus Rotationis..... iste Motus communi et inveterata opinione habetur pro proprio cœlestium. Attamen gravis de illo Motu Lis est inter nonnullos tam ex Antiquis quam Modernis qui Rotationem Terræ attribuerunt. At nullo fortasse justior movetur Controversia (si modo res non sit omnino extra Controversiam) an Motus videlicet iste (concesso quod Terra stet) cœli finibus contineatur, an potius descendat, et communicetur Aëri, et Aquis;" et ailleurs (Descriptio Globi intellectualis, p. 609): „Optima foret ea Historia Cœlestium, quæ ex Ptolemæo et Copernico et doctioribus Astronomiæ Scriptoribus exprimi et erui possit"; p. 613: „stellæ procul dubio non sunt sitæ tanquam in plano... omnino necesse est, ut aliæ ex iis magis quam aliæ promineant... tamen asseri potest crassities quædam definita (licet insignis) ejus regionis, quæ vocatur sphæra sive cœlum stellatum."

[3]) Il est vrai qu'en 1659 dans le „Systema Saturnium" (voir le T. XV, p. 191 et p. 237) il décrit un phénomène observé par lui („phænomenon in Orione novum"; il s'agit de la grande nébuleuse) dans des termes qui pourraient faire croire qu'il admet l'existence d'une sphère céleste et d'une région plus lucide au-delà d'elle. Mais il paraît bien probable qu'il ne s'agit ici que d'une manière de parler.

[4]) Voir p. e. ce T. p. 108: „Motum quidem corporum esse liquido percipimus, sed quietem nusquam certo invenimus" (1654). Comparez le troisième alinéa de la note 6 de la p. 195. Dans son ouvrage posthume, le Cosmotheoros, L. II, Huygens déclare „stellas fixas totidem esse soles" et „non in una eademque superficie hærere stellas istas". Comparez la p. 191, note 7. Il affirme aussi „spatium naturæ universæ infinitè undique protendi", mais il n'ose affirmer avec Giordano Bruno que le nombre des étoiles est infini, et il ne fait pas mention de l'opinion de Bruno d'après laquelle les étoiles ont chacune leur mouvement propre qui nous échappe à cause de la grande distance (voir l'„Opere di G. Bruno, pubbl. da A. Wagner, Lipsiæ, Weidmann, 1830, Vol. I „La Cena de le Ceneri, dialogo quinto", p. 184). Des-

d'avis qu'ils sont ſans valeur, comme Galilée l'a fait voir dans ſes célèbres dialogues: c'eſt à bon droit que Galilée admet que les divers phénomènes conſidérés dans ces discuſſions doivent être les mêmes ſur une terre en mouvement que ſur une terre immobile [5]).

Il y a lieu cependant, comme Galilée lui-même l'indique, de diſtinguer entre le mouvement de tranſlation de la terre et ſon mouvement de rotation: ſi la tranſlation (conſidérée comme uniforme) eſt ſans influence ſur les phénomènes terreſtres, ce n'eſt que *par ſuite de l'inaccurateſſe des expériences* que le mouvement diurne ne peut être décelé [6]). Pour Galilée, comme pour Copernic, la terre poſſède un mouvement réel. Lorsque plus tard Newton (qui, lui auſſi, n'admet pas le monde ſphérique [7])) déclare carrément qu'il exiſte un eſpace abſolu [8]), il ne fait, ſelon Huygens, qu'exprimer l'opinion courante [9]).

Quoiqu'il ſoit certain que Huygens n'ait à aucune époque de ſa vie proclamé l'exiſtence d'un eſpace abſolu, on peut cependant diſtinguer chez lui diverſes opinions qui ſe ſuccèdent et parfois ſe confondent.

---

cartes („Les Principes de la Philosophie", III, § 14, T. IX des Œuvres, publ. par Adam et Tannery, p. 108) dit que les étoiles „gardent vn mesme ordre entr' elles & se trouuent tous-jours également distantes". Dans les Pièces qui suivent Huygens déclare plusieurs fois que les étoiles peuvent être considérées comme immobiles *entre elles.*

5) Voir p. e. ce T. p. 106 et p. 141 (Années 1654 et 1656).

6) Dans le „Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" (voir Edizione Nazionale, VII, p. 152 et p. 201 et suiv.), Galilée, après avoir réfuté l'erreur de ceux qui pensent qu'une balle de canon, tirée verticalement en l'air, doit retomber à une grande distance du canon, dit que néanmoins une balle de canon, par suite du mouvement diurne de la terre, ne retombera pas *exactement* à l'endroit, où elle serait tombée si la terre ne tournait pas. Consultez aussi notre T. VI, p. 332, où il est question d'expériences de ce genre de Descartes, exécutées dans le but de démontrer le mouvement de la terre.

7) Voir „The correspondence of Richard Bentley D. D. Vol. I, London [ed. by Chr. Wordsworth], J. Murray, 1842". Newton écrit (p. 71, Sir Isaäc Newton to R. Bentley, Feb. 25, $169\frac{2}{3}$): „ . . many ancient philosophers and others. . . have allowed, that there may be worlds and parcels of matter innumerable or infinite; you deny this, by representing it as absurd. . . but you do not prove it to be absurd". Dans le „De Mundi Systemate liber Isaaci Newtoni", Londini, impensis J. Tonson, J. Osborn & T. Longman, 1728, il est dit que les étoiles sont en repos les unes par rapport aux autres, et qu'elles se trouvent à des distances différentes. P. 33: „Fixæ quiescunt inter se". P. 64: „Fixæ quæ sunt duplo remotiores erunt sexdecim vicibus obscuriores".

8) Premier „Scholium" des „Principia", p. 5—8 de l'édition originale: „Spatium absolutum, natura sua absque relatione ad externum quodvis semper manet similare & immobile;" etc.

9) Voir la note 10 de la p. 209 qui suit: „Ita omnes *vulgo* (mot souligné par Huygens) et aussi Newton". Comparez aussi la p. 226, premier alinéa de la Pièce V, la p. 229, deuxième.

Il n'a garde, du moins avant 1659 (année de la découverte des théorèmes ſur la force centrifuge), de tâcher d'approfondir la queſtion ſi complexe et peut-être ſans iſſue du mouvement et du repos, qui cependant ne ceſſe de le préoccuper [1]) comme elle avait préoccupé bien d'autres penseurs avant lui [2]). Il y a pourtant un point ſur lequel il a une conviction bien arrêtée : le mouvement rectiligne et uniforme d'un ſyſtème matériel par rapport à ſon entourage (tel que celui d'un bateau par rapport à la rive [3])) eſt imperceptible pour ceux qui ſont emportés par ce mouvement et ne conſidèrent que ce ſyſtème, puisque tous les phénomènes s'y paſſent de la même manière que ſi ce ſyſtème était en repos par rapport à ſon entourage. C'eſt là ſon principe de la relativité [4]).

Avant 1659 Huygens ne paraît pas avoir conſidéré avec attention la nature du mouvement circulaire [5]), mais après avoir trouvé en cette année la meſure de la

---

alinéa de la Pièce VI, et la p. 231, quatrième alinéa.

Borelli en 1666 parle d'un „universum" ou „mundanum spatium" par rapport auquel les étoiles fixes sont en repos (voir à la p. 227 le dernier alinéa de la note 2); mais l'existence objective d'un pareil espace n'est pas un dogme pour lui, puisqu'en 1667 (voir les trois premiers alinéas de la même note) il parle d'un „spatium mundanum" ou „universum" par rapport auquel *la terre* est en repos. Galilée ne pose pas nettement la question du mouvement „véritable" ou „absolu". Newton quoiqu'il admette l'immobilité des étoiles fixes les unes par rapport aux autres et que d'autre part, il appelle l'espace absolu „immobile" (voir les notes 7 et 8 de la p. 193) ne dit point que l'espace absolu est immobile par rapport aux étoiles. Avant Newton, G. Bruno (qui, lui, attribue des mouvements divers aux étoiles, voir p. 192, note 4) avait déjà appelé le „spacium" ou „universo" „immobile" (voir la note 6 de la p. 199).

[1]) Ce T. p. 111 : „Quidnam in corporibus quies sit aut motus nisi aliorum corporum respectu non videtur intelligi posse" (1654). P. 143 : „Nos autem tam perplexæ disputationi immisceri nihil opus" (1656).

[2]) Entre autres G. Bruno, Gassend (voir sur eux la note suivante) et avant eux beaucoup d'auteurs anciens (voir p. e. l'ouvrage de Sextus Empiricus, nommé à la p. 226, note 2, deuxième alinéa).

[3]) Chez Bruno („La Cena de le Ceneri, dialogo terzio" éd. Wagner (voir p. 192, note 4), Vol. II p. 171), Galilée (comparez ce T. p 141) et Gassend („Epistolæ tres de Motu impresso a Motore translato", p. 478—563 du Vol. III. Tom. Tertius, 1658, des „Petri Gassendi... Opera Omnia, Lugduni, sumpt. L. Anisson et J. B. Devenet") la considération du bateau est étroitement liée, comme chez Huygens, à celle de la terre en mouvement; ils parlent tous de l'imperceptibilité de ces translations uniformes.

[4]) Comparez ce T. p. 27.

[5]) Ainsi il lui arrive de dire en 1654 (ce Tome p. 111) : „Neque nobis necesse sit quærere an aliquid in universo hoc revera quiescat aut quidnam illud sit. *An terra consistat an cœlum stellarum*".

force centrifuge, il croit apercevoir que la rotation a un caractère „absolu" quoiqu'il ne se serve pas de cette expression [6]) et que vers la fin de sa vie il se ravise: sa correspondance avec Leibniz fait voir l'un et l'autre. En effet, le 22 juin 1694 Leibniz lui écrivit [7]): „Il me semble cependant que vous même, Monsieur, estiés autres fois du sentiment de M. Newton a l'egard du mouuement circulaire", à quoi Huygens répondit [8]) le 24 août de la même année: „Pour ce qui est du mouvement absolu et relatif, j'ay admirè vostre memoire, de ce que vous vous estes souvenu, qu'autrefois [9]) j'estois du sentiment de Mr. Newton, en ce qui regarde le mouvement circulaire. Ce qui est vray, et il n'y a que 2 ou 3 ans que j'ay trouvè celuy qui est plus veritable, duquel il semble que vous n'estes pas

---

[6]) L'expression „mouvement absolu", correspondant à l'idée d'un „espace absolu" par rapport auquel la terre est en mouvement, ne paraît pas avoir été employée avant l'apparition des „Principia" de Newton (Le P. I. G. Pardies se sert déjà en 1670 de l'expression „vitesse absolue" — voir la note 4 de la p. 227 qui suit — mais il considère apparemment la vitesse par rapport à la terre comme une vitesse absolue). Huygens avant l'apparition des „Principia" de Newton se sert de l'expression: „*revera* quiescere". Plus tard on rencontre chez lui l'expression: „motus verus". Il n'emploie l'expression „mouvement absolu" que dans la lettre du 24 août 1694 à Leibniz. Quoique l'expression „motus verus" puisse désigner, et désigne souvent chez Huygens, un mouvement absolu, elle n'est pas cependant équivalente à l'expression „motus absolutus"; c'est un terme ambigu. En effet, tandis qu'il y a une opposition formelle entre les termes „mouvement relatif" et „mouvement absolu", il n'en est pas de même des expressions „motus relativus" ou „motus respectivus" et „motus verus": en 1688 Huygens écrit (voir la p 222 qui suit): „Corpora quæ mutuo respectu moventur, ea vere moventur". Et ailleurs (voir la p. 231 qui suit): „Ego... nullum alium esse motum corporum arbitror quam mutuo respectu. Hunc esse verum."

En 1660 toutefois (voir notre T. XV, p. 459) Huygens s'exprime comme suit en parlant du système de Copernic, comparé avec celui de Tycho Brahé: „Utrum enim adhibeam parum admodum interest ad phænomena quod attinet. *Sed rei veritas haud aliter quam Copernicum sequendo explicatur.*" Cette affirmation indique-t-elle que Huygens admet en ce moment le mouvement absolu? Il faut peut-être répondre affirmativement à cette question; comparez à la p. 197 la fin de la note 5 de la p. 196.

Notons cependant qu'après 1659 Huygens s'exprime, en parlant du mouvement *rectiligne*, (il veut dire sans doute le mouvement *rectiligne uniforme*) dans des termes analogues à ceux qu'il aurait pu employer auparavant. Dans l'annotation numérotée 15.1 de la p. 183 de ce Tome il écrit: „Il n'y a rien qui distingue le mouvement droit d'avec le repos, et que l'un et l'autre n'est que relatif, *l'estendue du monde estant infinie*" (1668).

[7]) Voir les p. 645—646 de notre T. X.

[8]) Voir les p. 669—670 du T. X.

[9]) Huygens parle sans doute des années 1672—1676, pendant lesquelles Leibniz et lui séjournèrent simultanément à Paris. Dans la lettre qui suit Leibniz fait expressément mention de la ville de Paris.

eloignè non plus maintenant, ſi non en ce que vous voulez, que lorſque pluſieurs corps ont entre eux du mouvement relatif, ils aient chacun un degrè de mouvement veritable, ou de force [1]), en quoy je ne ſuis point de voſtre avis." Enfin dans une lettre du 14 ſeptembre [2]) Leibniz ajouta encore: „Comme je vous diſois un jour à Paris qu'on avoit de la peine à connoiſtre le veritable ſujet du Mouuement, vous me répondîtes que cela ſe pouuoit par le moyen du mouuement circulaire, cela m'arreſta [3]); et je m'en ſouuins en liſant à peu près la même choſe dans le liure de Monſ. Newton [4]) mais ce fut lorſque je croyois déja voir que le Mouuement circulaire n'a point de privilege en cela. Et je voy que vous eſtes dans le meme ſentiment."

On s'aperçoit donc que la conception de Huygens, abandonnée depuis [5]), de la nature „abſolue" de la rotation s'était formée chez lui bien avant la publication, en 1687, des „Principia" de Newton, et cette concluſion à laquelle la correſpondance avec Leibniz nous mène eſt confirmée par la Pièce que nous venons de publier aux p. 182—186. En effet, l'annotation numérotée 15 de la p. 183 montre qu'il a, en 1668, fait part à l'Académie des Sciences de ſa manière de voir ſuivant laquelle le „mouvement droit n'eſt que relatif entre divers corps, le circulaire autre choſe et a ſon κριτήριον que le droit n'a point" [6]). Si les deux correſpondants déſignent cette conception du mouvement circulaire

[1]) La citation n'est pas littérale; Leibniz avait écrit (T. X, p. 645): ... que veritablement chacun [chaque corps] a un certain degré de mouuement ou, si vous voulés *de la* force". Comparez sur les opinions de Leibniz les notes 10 de la p. 197, 2 de la p. 198 et 8 de la p. 199.

[2]) Voir la p. 681 du T. X.

[3]) Dans son Traité „Dynamica de Potentia et Legibus Naturæ Corporeæ" (Leibnizens math. Schriften, herausg. v. C. I. Gerhardt, Halle, H. W. Schmidt, Bd. VI, 1860) Leibniz (p. 508) raconte le même fait dans les termes suivants: „Memini quidem viro cuidam præclaro olim visum ex motibus quidem rectilineis non posse discerni sedem subjectumve motus, posse tamen ex curvilineis, quoniam quæ revera moventur, recedere conantibus a centro motus sui."

[4]) Il s'agit des derniers alinéas du „Scholium" (p. 9—11 de l'édition originale des „Philosophiæ naturalis Principia mathematica") qui précède les „Axiomata sive leges motus".

[5]) Voir cependant la note 5 de la p. 198.

[6]) Ce κριτήριον consiste évidemment dans la tension du fil (dans le cas où la rotation est celle d'un globe attaché à un fil), tension qui permet de calculer le nombre de rotations par seconde.

Il est vrai qu'à l'époque où Huygens écrivit les Pièces qui suivent sur la nature du mouvement il eût pu s'exprimer dans les mêmes termes. Lorsqu'à cette époque il appelle la rotation un mouvement relatif des parties d'un corps les unes par rapport aux autres, il n'en est pas moins vrai que ce mouvement relatif est „autre chose" que le mouvement „relatif entre divers corps". Mais il indique clairement que son opinion a subi un changement en écri-

comme „le ſentiment de M. Newton", c'eſt qu'elle n'avait été publiée que par lui et qu'elle avait reçu tant de relief par ſon expérience célèbre du ſeau tournant [7]).

D'après la correſpondance avec Leibniz et les annotations de la p. 183 nous ſommes donc en droit d'admettre qu'après 1659 Huygens conſidère le mouvement rectiligne uniforme comme relatif [8]) et le mouvement circulaire comme abſolu; il ſemble même que parfois, lorsqu'il parle du ſyſtème de Copernic, il conſidère (ſans faire aucune différence entre les tranſlations et les rotations) les mouvements des planètes comme des mouvements abſolus ou mouvements par rapport à un „ſpatium mundanum" [9]).

Remarquons cependant qu'il écrit en 1668 (?): „que le mouvement d'un corps peut eſtre en mesme temps veritablement egal et veritablement accelerè ſelon qu'on raporte ſon mouvement a d'autres differents corps" [10]). Voir à ce ſujet le T. VI, p. 327 et 328. On peut dire que Huygens émet ici incidemment une opinion relativiſte remarquable [11]). Il faut avouer qu'il n'eſt pas bien clair comment l'idée qu'on peut attribuer à un corps différents mouvements également véritables doit s'accorder avec l'idée que le ſyſtème de Copernic eſt le ſeul ſyſtème aſtronomique vrai.

Après l'apparition des „Principia" de Newton (1687) nous voyons Huygens combattre la théorie de l'eſpace abſolu d'après laquelle un corps ne peut évidemment poſſéder qu'un ſeul mouvement vrai.

Ce n'eſt, comme nous l'avons vu plus haut, que „2 ou 3 ans" avant 1694 que

---

vant (voir la p. 232 qui suit). „*Diu putavi* in circulari motu haberi veri motus κριτηριον ex vi centrifuga." Comparez aussi le deuxième alinéa de la p. 226. Malgré l'ambiguité de l'expression „motus verus" (comparez la note 6 de la p. 195) nous croyons pouvoir dire, en ayant égard au troisième alinéa de la p. 226, que cette expression désigne ici le mouvement absolu ou mouvement par rapport à l'espace absolu.

7) Voir l'alinéa qui commence à la p. 9 de l'édition originale des „Principia".

8) Comparez le troisième alinéa de la note 6 de la p. 195.

9) Comparez le deuxième alinéa de la note 6 de la p. 195.

10) Leibniz dans le Traité posthume „Dynamica de Potentia, etc." (voir le T. X p. 645, note 25) parle aussi (p. 508) de l'„æquipollentia hypothesium" et ajoute: „. . ex solo principio, quod motus suæ naturæ sit respectivus adeoque omnes hypotheses semel consentientes semper idem producant, cæteræ Naturæ leges hactenus expositæ demonstrari potuissent, quod admonere operæ pretium fuit". Mais il n'a pas développé cette pensée, ce qui sans doute n'aurait pas été chose facile.

11) Devons nous en conclure que lorsqu'en 1694 il évoque le souvenir de l'entretien avec Leibniz à Paris (comparez la note 9 de la p. 195), et lorsque vers la fin de sa vie il écrit le passage cité à la note 6 de la p. 196 et autres passages semblables, il exagère quelque peu la fermeté de sa croyance ancienne au mouvement vrai ou absolu?

Huygens penſe avoir trouvé le ſentiment „qui eſt plus veritable" que „le ſentiment de Mr. Newton." Il s'exprime à ce propos le plus fortement dans ſa lettre à Leibniz du 29 mai 1694 [1]), où l'on lit: „Je vous diray ſeulement, que dans vos notes ſur des Cartes j'ay remarquè que vous croiez *abſonum eſſe nullum dari motum realem, ſed tantum relativum* [2]). Ce que pourtant je tiens pour tres conſtant, ſans m'arreſter au raiſonnement et experiences de Newton dans ſes Principes de Philoſophie, que je ſcay eſtre dans l'erreur, et j'ay envie de voir s'il ne ſe retractera pas dans la nouvelle edition de ce livre, que doit procurer David Gregorius [3]). Des Cartes n'a pas aſſez entendu cette matiere".

Bien malheureuſement aucune des Pièces que nous poſſédons ne nous fait connaître ſuffiſamment les raiſonnements qui ont amené Huygens à s'exprimer dans des termes ſi catégoriques. Elles ſuffiſent cependant pour nous faire voir quel ſens il faut attribuer à la relativité de la rotation à une époque où il ne croyait plus „in circulari motu haberi veri motus κριτηριον ex vi centrifuga" [4]): elle conſiſte en ceci que les parties d'un corps tournant ont un mouvement relatif *les unes par rapport aux autres;* ce mouvement relatif, dont la direction change continuellement, tandis que les diſtances demeurent invariables à cauſe des liens, ſe

[1]) Voir la p. 614 de notre T. X.

[2]) Les italiques se trouvent dans la lettre nommée; ce n'est pas cependant, comme on pourrait le croire, une citation littérale du texte de Leibniz, sur lequel on peut consulter la note 45 de la p. 614 du T. X. Voir aussi la note 8 de la p. 199.

[3]) Consultez sur la préparation de la seconde édition des „Principia", qui eut lieu en 1713 par les soins de Cotes, les p. 124—135 de l'ouvrage de Rouse Ball: „An essay on Newton's Principia", London and New-York, Macmillan and Co. 1893". Elle ne contient aucune rétractation de ce genre.

[4]) Voir p. 196, note 6. Dans la même Pièce où on lit les paroles citées dans le texte il dit que le „motus circularis" est „relativus partium in partes contrarias concitatarum".

[5]) En 1688 il écrit (voir la p. 222 qui suit): „In hoc motu partes recedere conantur a se mutuo vel a puncto ipsarum respectu definito, idque eo majore vi quo major est motus ipsarum relativus." Dans une autre Pièce (voir la p. 226 qui suit) il écrit: „Motus circulationis est motus relativus in rectis parallelis, mutata continuè directione, et manente distantia propter vinculum." Huygens semble admettre (excepté dans le passage cité à la p. 197, troisième alinéa) que, si non les directions des mouvements, du moins les changements de ces directions ont dans l'espace entièrement vide un caractère absolu. Voir sur la question des directions les notes 1 de la p. 220, 1 de la p. 224 et 6 de la p. 231. Le passage de Huygens dans la note 1 de la p. 220, ainsi que le deuxième alinéa de la p. 225 font voir qu'il ne pensait pas avoir nettement expliqué la conception relativiste qui s'imposait à son esprit. Dans une des Pièces qui suivent (p. 230, premier alinéa de la Pièce VII) il semble vouloir dire que le mouvement circulaire est „respectivus" pour cette seule raison qu'on ne peut pas dire „centrum circulationis quiescere in mundo". Néanmoins il considère son opinion comme tout-à-fait contraire à celle de Newton. Dans cette même Pièce il déclare (p. 231) que le

reconnaît à la force centrifuge [5]). Quant à l'eſpace infini, il ne poſſède pas le caractère ſémi-matériel que lui attribuent G. Bruno [6]) et Descartes [7]); le vide exiſte quoi qu'en penſe Leibniz [8]); ſur ce point du moins Huygens eſt d'accord avec Newton [9]).

---

mouvement „quem isti verum dicunt" n'existe pas „in rerum natura", et dans le recueil „Anecdota" p. e. on lit sur une feuille détachée: „motum non alium quam relativum dari. etiam vertiginis motum relativum. contra Newtonum."

[6]) G. Bruno se sert souvent de l'expression „spacium æthereum" ou „æther"; p. e. „De immenso et innumerabilibus, seu de universo et mundis", p. 212: „omnia in uno eodemque æthereo spacio"; p. 390: „consistentia mundi astrorum... sine pondere in amplo æthere". Dans le Traité „de la Causa, Principio et Uno", éd. Wagner (voir p. 192, note 4), Vol. II, il dit: „È dunque l'universo uno, infinito, immobile... è talmente materia, che non è materia".

[7]) Descartes „Les Principes de la Philosophie", II, § 16 (T. IX des Œuvres, publ. par Adam et Tannery, p. 71) s'exprime comme suit: „Pour ce qui est du vuide, au sens que les Philosophes prennent ce mot, à sçavoir pour vn espace où il n'y a point de substance, il est éuident qu'il n'y a point d'espace en l'vniuers qui soit tel, pource que l'extension de l'espace ou du lieu intérieur n'est point differente de l'extension du corps. Et comme de cela seul qu'vn corps est étendu en longueur, largeur & profondeur, nous auons raison de conclure qu'il est vne substance, à cause que nous conceuons qu'il n'est pas possible que ce qui n'est rien ait de l'extension, nous deuons conclure le mesme de l'espace qu'on suppose vuide: à sçavoir que puis qu'il y a en luy de l'extension, il y a necessairement aussi de la substance."

[8]) Leibniz („Dynamica de Potentia, etc." p. 511): „omnis firmitas oritur ab appressione ambientis. Igitur corpus omne ab omni parte ambiri necesse est, id est vacuum non datur." À la p. 508, déjà deux fois citée (p. 196 note 3 et p. 197 note 10) du même Traité Leibniz parle comme suit de la nature du mouvement circulaire: „... omnibus exacte consideratis reperi, motus circulares nihil aliud esse quam rectilineorum compositiones (jusque là, cette opinion s'accorde avec celle de Huygens, exprimée dans les Pièces qui suivent), neque alia in Natura esse retinacula quam ipsas motus leges. Et ideo nobis aliquando non apparet æquipollentia hypothesium, quod omnia eventa aliquando non apparent ob corporum ambientium insensibilitatem, et sæpe systema aliquod corporum cum aliis incommunicans videtur, contra quam res se habet". Cette opinion, d'après laquelle le milieu ambiant jouerait un rôle dans les phénomènes qu'on observe chez les corps tournants, n'est pas celle de Huygens (voir p. e. la p. 230 qui suit: „.. spatio *vacuo*".. et p. 231: „... spatio illi infinito *et inani*...").

Remarquons encore que chez Leibniz il faut toujours faire une distinction entre le point de vue du métaphysicien et celui du physicien. La force absolue et le „mouvement absolu véritable" (qui ne prouve nullement, suivant Leibniz, „la réalité de l'espace en soi"; voir la p. 117 de l'ouvrage nommé dans la note 1 de la p. 237 qui suit) peuvent exister sans que (suivant Leibniz) le physicien puisse les apercevoir. Voir p. e. le „Specimen dynamicum, Pars II" dans „Leibnizens math. Schriften", Gerhardt VI, où il écrit (p. 248): „Etsi... vis aliquid reale et absolutum sit, motus tamen [le mouvement tel qu'il apparaît au physicien] ad classem pertinet phænomenorum respectivorum, et veritas non tam in phænomenis quam in causis spectatur". Cette „vis" qui ne se manifeste pas dans les phénomènes est tout autre chose que la „vis" de Huygens ou de Newton.

[9]) „Optice: sive de reflexionibus, refractionibus etc. libri tres, auctore Isaaco Newton, Lon-

Les Pièces en queſtion ſont en aſſez grand nombre. Ainſi il n'y pas moins de cinq ou ſix projets de préface, plus ou moins achevés, et encore quelques autres Pièces concernant excluſivement la queſtion du mouvement abſolu ou relatif, deſtinées peut-être à être inſérées dans une telle préface. Priſes enſemble ces Pièces ſont pleines de répétitions quoique la rédaction diffère presque toujours. Il ne ſemble pas néceſſaire de les reproduire toutes. Nous commencerons par donner en entier dans une Première Partie ce qui ſemble être le plus récent des projets de préface, où, par ſuite, l'hiſtorique eſt pourſuivi le plus loin, ſauf à y ajouter en Appendice une Pièce remarquable où Huygens attaque l'attitude de Mariotte envers lui concernant la théorie du choc et combat quelques-unes de ſes idées. Puis nous ferons ſuivre dans une deuxième Partie divers paſſages où Huygens expoſe ſes idées ſur l'eſpace et la nature relative ou abſolue du mouvement.

---

dini, impensis G. & J. Innys, 1719", p. 367: „... liquet, spatia cœlestia omnis sensibili resistentiæ, & consequenter omnis sensibilis materiæ, expertia esse". P. 371: „... omnino necesse est ut spatia cœlestia omni materia sint vacua; nisi forte excipiendi erunt tenuissimi aliqui vapores, exhalationes, vel effluvia, quæ oriantur ex atmosphæris terræ, planetarum & cometarum; & æthereum aliquod medium longe longeque rarissimum".

PREMIÈRE PARTIE. [1])

PROJET INACHEVÉ D'UNE PRÉFACE POUR UN TRAITÉ SUR LE CHOC DES CORPS ET LA FORCE CENTRIFUGE [2]).

[1690?] [3])

Cum multa ad naturalem ſcientiam attinentia [4]) diligentius curioſiusque ætate noſtra quam prioribus ſæculis inveſtigata ſunt, tum in his quæ ad corporum motus pertinent non pauca ſunt animadverſæ [5]), de quibus ne quærere quidem priſcis philoſophis in mentem venerit [6]); quæ tamen et cognitione digniſſima erant, et ad mechanicas phyſicaſque rationes apprime utilia. In his ſunt quæ de deſcenſu gravium, deque projectorum corporum linea Parabolica Galileus feliciter invenit, novæque ſcientiæ titulo jure inſignivit [7]). quæ ſcientia deinde à nobis quoque inter cæteros exculta eſt, et non exigua acceſſione aucta, cum pendulorum recurſus curvæ Cycloidis opera æqualis effecimus, pendulaque ipſa automatis horologijs adaptavimus. Tum centra oscillationis reperimus multum prius quæſita. quæ omnia in opere illo quod Horologium Oſcillatorium inſcriptum eſt explicavimus [8]). Sunt etiam æque nova quæ ad colliſorum corporum percuſſiones ſpectant. itemque ad vires circulariter motorum, quibus a centro recedere conantur.

---

[1]) Cette Partie est empruntée à quelques feuilles détachées qui se trouvent dans le portefeuille L (voir la note 1 de la p. 213). Le début de la Première Partie est emprunté à la p. 39 de ce portefeuille. Elle concerne l'historique de la théorie de la percussion.

[2]) Du dernier sujet on ne trouvera dans ce projet que quelques indications au début. Évidemment Huygens s'était proposé d'en traiter plus amplement vers la fin de la préface projetée.

[3]) Voir à propos de cette date la note 4 de la p. 202.

[4]) Leçon alternative: „spectantia".

[5]) Lisez: „animadversa".

[6]) Leçon alternative au lieu de „in mentem venerit": „instituerint".

[7]) Il s'agit de l'ouvrage de 1638 „Discorsi e dimonstrazioni mathematiche intorno à due nuove scienze" (Voir la note 1 de la p. 31 de notre T. I). On trouve les sujets mentionnés dans les „Giornate terza e quarta", p. 197—313 du Vol. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galilei".

[8]) Voir les pp. 5—10 et 91—146 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" publiée en 1673.

quorum illa ante nos aliqui inſpicere ceperunt nec multum tamen promoverant, iſta vero nemo adhuc attigerat quorum ſummam publice expoſuimus, velut mantiſſæ loco operi jam dicto adjunctam [1]). De utroque autem argumento hìc agere inſtituimus [2]) quoniam ipſas quidem leges horum motuum in lucem emiſimus [3]), demonſtrationes vero poſtea daturos polliciti ſumus. quod eo magis præſtare debemus, quod in ijs quæ de Luce et de Gravitate nuper evulgavimus, non nunquam hasce motus regulas ad alia demonſtranda adhibemus [4]). ac primum quidem de communicato motu ex appulſu mutuo corporum inquiremus ubi et de mollibus demonſtrationes novas proferemus [5]), quas aliquanto ſerius [6]) quam cæteras reperimus [7]). Porro ut aliorum quoque ſtudia in hoc argumento cognoscantur [8]) non pigebit omnem ejus progreſſum et incrementa ab origine exponere.

Itaque quantum video annis ab hinc 50 aut amplius de metienda vi Percuſſionis quæri cæptum eſt [9]) quamquam jam ante Galilei quandam commentationem hac de re extitiſſe ſcribit Alph. Borellus [10]). Sed juvenili ejus ætate editam, ac poſtmodum retractatam improbatamque. Poſtea vero provecta jam ætate Galileum denuo in hanc diſquiſitionem incubuiſſe, nec tamen in chartis ejus poſt obitum

---

[1]) Voir les p. 159—161 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" ou les p. 63B—66B de ce Tome.

[2]) L'ouvrage pour lequel la présente préface fut écrite n'a jamais paru sous cette forme. Celui „De motu corporum ex percussione" que nous avons reproduit aux p. 31—91 qui précèdent et celui „De vi centrifuga" que nous reproduisons plus loin dans ce Tome, n'ont paru qu'en 1703 dans les „Opuscula postuma".

[3]) Voir (p. 179—181) pour les lois de la percussion l'„Extrait d'une lettre de M. Hugens à l'auteur du Journal" et pour celles de la force centrifuge la note 1 qui précède.

[4]) Comparez pour le „Traité de la lumière" (1690) la note 4 de la p. 151. Quant au „Discours de la cause de la pesanteur", publié dans le même ouvrage, il est fondé entièrement sur l'existence de la force centrifuge. Les lois qui la régissent sont appliquées plus particulièrement aux p. 142—143 de l'édition originale.

[5]) Comparez les p. 161—167. Leçon alternative: „adferemus".

[6]) Probablement vers 1667; voir la note 7 de la p. 161.

[7]) Ici s'arrête la feuille (Portef. L, p. 39), que nous avons suivie jusqu'ici. Elle contient une leçon plus soignée de la première partie de celle (Portef. L, p. 36) à laquelle nous empruntons ce qui suit.

[8]) Leçon alternative: „non ignorentur".

[9]) Il s'agit des ouvrages de Galilée (1638), de Descartes (1644) et de Mousnerius (inspiré par Fabri) (1646); voir les notes 7, 8 et 9 de la p. 178.

[10]) Voir la première page du „Proœmium" de l'ouvrage de 1667, cité dans la note 4 de la p. 106 de notre T. VI. Il s'agit probablement de l'écrit: „Della forza della percossa", qui fut composé par Galilée pendant son séjour à Padoue de 1592—1610. On le trouve aux p. 188—190 du Vol. II (1891) de l'édition nationale des „Opere di Galilei". Pour l'histoire de cet écrit nous renvoyons aux p. 153—154 du même Volume.

fuiſſe repertum quod huc ſpectaret ut idem Borellus auctor eſt [11]). Idque contra opinionem omnium contigiſſe dicit quoniam Galileus in dialogis ſuis non ſemel tanquam de re multum a ſe agitata ac partim explicata mentionem fecerat. Scribit enim in quarto Mechanicorum Dialogo [12]) diu obſcuram prorſus hanc materiam ſibi fuiſſe cumque multa millia horarum in ea meditanda inſumſiſſet, tandem notitiam nonnullam eſſe adeptum eamque primis hominum cogitationibus plurimum diſcedentem [13]) quam quidem poſt illam de projectorum motibus doctrinam ſeſe expoſiturum promittit [14]). Sed credibile eſt virum ingenioſiſſimum [15]) ne tunc quidem ſibi ſatisfeciſſe eoque nihil potius quam non ſatis explorata tradere conſultius duxiſſe. In eodem enim extremo dialogo differt rurſus tractationem hanc, ſummam difficultatem obtrudens qua factum ſit ut a nemine quoquam qui hactenus eam aggreſſus ſit, penetrari potuerint intimi ejus receſſus, utpote maximis tenebris obrepti et à primo hominum conceptu prorſus alieni.

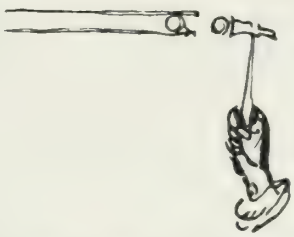
Eodem vero tempore fere ab Honor.° Fabrio [16]), et Renato Carteſio [17]) res tentata eſt qui ita de Percuſſione egerunt ut quod fieret occurſu corporum in ſpatio nulla alia materia impedito exquirerent. quorum inventis non acquieſcens idem argumentum deinceps reſumſit Alph. Borellus, Piſis in Italia mathematices Profeſſor [18]). Et hi quidem omnes non certa ſatis Principia uſurpantes et quibusdam quaſi demonſtrationibus veris falſa miscuerunt [19]), nonnunquam experimentis conſona afferentes, nonnunquam prorſus contraria.

Mihi in hæc ut inquirerem fecit legum illarum quas apud Carteſium inveneram abſurditas et ab experimentis diſſenſio, quas tamen ille ſummo ſtudio

---

[11]) Voir les deux dernières pages du „Proœmium" mentionné dans la note précédente, mais aussi la note 1 de la p. 100 du Tome présent et la note 4 de la p. 28 du T. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galilei".

Ajoutons qu'on trouve ici en marge la figure reproduite à côté.



[12]) Voir la note 8 de la p. 99.

[13]) Leçon alternative: „longe abeuntem ac paradoxam".

[14]) Leçon alternative: „recipit".

[15]) Leçon alternative: „summum".

[16]) Voir la note 9 de la p. 178.

[17]) Voir la note 8 de la p. 178.

[18]) Voir l'ouvrage de 1667 mentionné dans la note 10 de la p. 179. Notons que cet ouvrage parut avant que les règles de la percussion de Huygens furent publiées dans le „Journal des Sçavans" du 18 mars 1669. Plus loin Huygens parlera des publications ultérieures.

[19]) Quant à Borelli Huygens (Portef. L, p. 8) indique comme fausses ou vicieuses les Prop. 64, 119, 18 et 19 de son ouvrage. On les y rencontre aux pp. 121, 265, 43 et 46. Elles concernent divers cas du choc direct des corps durs où les solutions de Borelli diffèrent de celles qu'on obtient en appliquant les règles de Huygens.

ſemper defendit uti et diſcipuli ipſius, e quorum numero erat Fr. Schotenius [1]). adeo ut cum anno 1654 alias veriores leges reperiſſem, invitus. . . [2])

Quid vero ab eo tempore actum ſit, et quomodo in lucem venerint hæ leges, ea pleraque ex actis diarijsque Eruditorum in Gallia Brittanniaque Editis cognoſcere licet, quorum hæc ſunt Menſis Jan. et Aprilis [3]), illa Martij anni 1669 [4]). Ex ijs nempe apparet eodem fere tempore a viris Clar. Walliſio, Wrennoque, et a me, Regulas quasdam de motu ex occurſu corporum genito, Oldenburgio traditas fuiſſe qui Societati Regiæ tunc erat a secretis. Apparet etiam meas mihi aliquot ante annis fuiſſe cognitas [5]) cum propoſitos a Wrennio et Rookio caſus aliquot colliſorum corporum ſecundum ipſas ſic reſolviſſem ut experimentis illorum definitiones noſtræ exacte quadrarent. Regulas enim nullas adhuc reperiſſe ſe fatebantur. Erat autem annus 1661, idem quo primum Brittanniam adieram [6]). Cæterum Walliſij Regulæ ad corpora ea tantum pertinebant quæ colliſa à contactu non reſilirent, quorum numero etiam perfecte dura haberi vult [7]) quod et alijs viſum eſt, etſi non pauci diſſentiant quorum mihi verior opinio eſſe videtur ut poſtea disquiretur [8]). reſilire autem tantum exiſtimat quibus inflecti ac reſtitui

---

[1]) Voir les pp. 4—6 et 8 du Tome présent. Ajoutons qu'on lit encore en marge du Manuscrit (Portef. L, p. 36 verso): „Cum autem V. Cl. Fr. Schotenius earundem patrocinium suscepisset atque ego jam veriores invenissem, aliquot epistolis de hac re inter nos fuit disceptatum 1654."

[2]) Il y a ici une lacune, mais on lit en marge (Portef. L, p. 37 verso): „me jam inde ab
2
anno 1654 veras leges reperisse quæ ad dura seu resistentia pertinent. Sed de ijs in luce edendis supersedisse, quod præter eas leges superessent quædam de motus natura nondum penitus mihi nec satis liquido perspecta, quæ longiorem meditationem requirebant. Comparez l'alinéa qui commence en bas de la p. 8 du Tome présent.

[3]) Voir les „Philosophical Transactions" du 11 janvier 1669, p. 864—868 du Vol. 3 et celles du 12 avril 1669, p. 925—928 du Vol. 4, ou les pp. 346—348, 359—362 et 429—433 de notre T. VI.

[4]) Voir les p. 179—181 du Tome présent. On lit encore en marge (Portef. L, p. 37 verso): „Gallicum diarium annotavi in Transact. fuisse 11 febr. 69". En vérité, le „dernier Journal d'Angleterre" (voir la p. 181) mentionné dans le „Journal des Sçavans" du 18 mars 1669 n'était pas à la rigueur le N°. 43 du 11 janvier, que Huygens avait en vue, mais le N°. 44 du 15 février.

[5]) Leçon alternative: „perspectas".

[6]) Comparez les p. 172—173.

[7]) On lit en marge (Portef. L, p. 37 verso): „Vide Wall. de Motu an sic sentiat etiamnunc". Comparez la note 17 de la p. 175.

[8]) Nous ne connaissons pas une telle disquisition de Huygens.

natura ſua datum [9]) de quibus nihil certi tunc [10]) definiverat. Regulæ autem de non reſilientibus veræ ſunt; ſed Wrennus ſuorum nullam demonſtrationem dederat [11]); Imo Exiſtimabat (ut ab Oldenburgio tunc accepi [12]) nullam demonſtrationem eorum dari, niſi multis adſumtis de quibus nihilo magis liqueret. quæque propterea et ipſa demonſtranda forent ut appareat non aliunde quam ab experimentis regulas hujus Cl.i viri fuiſſe petitas [13]).

Noſtris tamen theorematibus in Angliam miſſis [14]) demonſtrationes acceſſerant, de quibus eadem epiſtola ſcribit Oldenburgius, has *Multis e Regia Societate, ac præſertim Preſidi Brounckero, valde* [15]) *probari.* ac rurſus alijs literis ultimi Maji anno eodem datis [16]). *Credebam*, inquit, *jam prioribus meis te certiorem factum, omnes hic fere aſſentiri ijs motus regulis quæ a te Wrennioque traditæ ſunt. Nunc et hoc addo, Preſidi noſtro tantopere placere omnem in his tractandi demonſtrandique rationem, ut eam frequenti conſeſſu multim prædicaverit* [17]) *nemine quicquam contradicente* [18]).

In his demonſtrationibus principium ſeu poſtulatum adſumſi [19]) de qua mox videbimus quod cum ſit ab omnibus neceſſario concedendum, tamen ut in re nova non omnibus æque perſpicuum erat. Quod tunc primum expertus ſum cum id coram pariſiis geometris exponerem [20]). Idem vero à Brounckero non repugnanter receptum fuit [21]) uti neque poſtea à Walliſio qui illo uſus eſt in opera ingenti quod de motu adſcripſit [22]); ubi de percuſſu reſilientium corporum noſtris Wrennijque repertis conſentanea tradit [22]); quanquam et è ſuis principijs illa demon-

---

[9]) Voir toujours la note 17 de la p. 175. Il s'agit maintenant des „corpora elastica" de Wallis.

[10]) Savoir en 1669, lorsque les règles de Wallis furent publiées; comparez la p. 362 de notre T. VI.

[11]) Voir les p. 346—348 du T. VI.

[12]) Voir, p. 359 du T. VI, l'Appendice à la lettre d'Oldenburg du 14 février 1669.

[13]) On lit encore en marge (Portef. L, p. 37): „sed demonstrationes obscuriores et minus apparentibus consequentijs deductæ quam in hujusmodi novæ doctrinæ Elementis requiratur."

[14]) Voir les p. 334—343 du T. VI.

[15]) Leçon alternative: „magnopere".

[16]) Voir les p. 443—444 du T. VI.

[17]) Leçon alternative: „commemoraverit". On lit en marge (Portef. L, p. 37) l'expression même employée ici par Oldenburg: „un temoignage fort avantageux".

[18]) On lit encore en marge: „ut eam frequenti consessu plurimum commendandam dixerit" et de même „pluribus laudaverit" avec la leçon alternative: „extulerit".

[19]) Il s'agit du Principe de la relativité de Huygens. Consultez l'article 3 de la p. 336 du T. VI.

[20]) Comparez la p. 335 du T. VI. Il s'agit des discussions dans l'Académie du 4, 11 et 18 janvier 1668; voir la note 1 de la p. 182.

[21]) Voir plus haut.

[22]) Consultez l'ouvrage de 1671 mentionné dans la note 17 de la p. 175. On y trouve exposé le

ſtrare conetur. Ab eo tempore Pardieſius quoque Jeſuita vir non vulgaris ingenij libello exiguo idem argumentum tractavit [1]), in quibusdam longiſſime ab omnibus recedens [2]). At non paucis poſt annis, idem quoque a P. des Chales uſurpatum reperi in libello de Motu Locali inſcripto [3]) qui vel e Walliſij libro mutuari potuit [4]) vel ab ijs qui noſtras demonſtrationes Pariſijs præſentes audiverant [5]).

Eſt profecto in hujusmodi novis contemplationibus difficillimum certi quid

---

Principe de la relativité de Huygens dans le „Scholium" (p. 1007—1008 des „Opera") qui suit la „Prop. VIII" du „Cap. XI" et dans la „Prop. IV" du „Chap. XIII" (p. 1024 des „Opera"). Ensuite le Principe est régulièrement employé dans la dernière des démonstrations alternatives que Wallis ajoute à chacune des „Prop. V—X" du „Cap. XIII" (p. 1025—1031 des „Opera") qui contiennent les règles du choc des corps „elastica".

[1]) Voir le „Discours du mouvement local" d'Ignace Gaston Pardies, ouvrage de 1670, mentionné dans la note 1 de la p. 18 du T. VII. Pardies y applique le Principe de la relativité dans les articles XXII et XXIII où il arrive à la conclusion que les corps qui se choquent directement échangent leurs vitesses.

[2]) Dans les articles XVI—XXIII Pardies donne des règles du choc qui sont entièrement conformes à celles de Huygens pour les corps égaux. Ensuite dans l'article XXXI il prétend que „toutes ces règles sont véritables, soit que les corps soient égaux soit qu'ils ne le soient pas... si nous supposons que le corps frappé [considéré comme immobile] soit plus grand, pourvû que toutes ses parties soient bien unies ensemble, il faudra qu'il se meuve de la même vitesse que se meut le corps qui frappe... Si [dit-il] l'expérience nous fait voir le contraire, c'est que les mouvements des corps que nous voions, ne se font pas dans le vuide... mais qu'ils se meuvent dans un espace plein de quelque corps fluide, comme est l'air & quelque autre substance encore plus subtile." Enfin dans l'article XXXVI il conclut que dans le plein „les percussions des corps inégaux ne peuvent être réduites à une règle générale".

[3]) Il s'agit de l'ouvrage de 1682 de Claude François Milliet Deschales, mentionné dans la note 7 de la p. 352 du T. VIII. Le Principe en question y est appliqué plusieurs fois au Liv. V qui traite le choc des corps à ressort; voir les p. 400—427 de l'ouvrage mentionné.

Ajoutons qu'on lit encore sur une autre feuille (Portef. L, p. 10) à propos de l'ouvrage de Deschales: „le P. Dechales quoyqu'il se serve de nostre principe du vaisseau, n'a pas laissè de mettre des propositions fausses, comme quand il dit [p. 435, Prop. 19, Liv. 5], que la vitesse respective n'est pas la mesme toujours apres et devant le chocq. Item sa Prop. 13 du 5 liv. d'ou s'ensuit la 28e du mesme".

Or, la Prop. 13 mentionnée traite le même cas que la Prop. VIII de Huygens (voir la p. 53 qui précède) mais au lieu de faire rejaillir chacun des corps avec la vitesse avec laquelle il est arrivé, Dechales enseigne que „les nouvelles vitesses seront en raison doublée des premieres". Quant à la Prop. 28, elle dit que: „Le centre de gravité des corps qui se choquent n'est pas toûjours dans le mesme estat, devant & après le choc".

[4]) Au-dessus de ces deux derniers mots on lit: „discetur".

[5]) Voir la note 20 de la p. 205.

invenire quod fundamenti vice ſit in reliqua conſtructione [6]) et magna cautione opus ne veriſimilibus decipiamur quod ut manifeſtius pateat nonnihil de varijs aliorum principijs hic differemus priusquam ad noſtra progrediamur. Volebat Carteſius motus ſummam ſemel in rerum naturam introductam [7]), perpetuo eandem manere, adeoque id in corporum quoque durorum concurſu tenendum [8]). Colligitur autem corporum quotlibet motus ſumma ſi quantitates materiæ ſingulorum quæ rationem ponderis ſequuntur, in ipſorum celeritates ducantur, poſtquam numeris ſcilicet aut lineis tam ponderum quam celeritatum ratio expreſſa fuerit. Videbatur rationi apprime conſentaneum axioma nec difficulter a philoſophis accipiebatur cum tamen falſum eſſet. Alia autem præter hoc adſumebat Carteſius multo minus admittenda, veluti cum quantitatem reſiſtentiæ cum quantitate motus comparat, ex quo illud efficiebat ut corpus majus a minori impacto moveri non poſſet [9]). Pardieſius vero cum corpus quieſcens undique liberum, nihil quicquam motui reſiſtere recte ſtatuiſſet, putabat etiam quamcunque celeritatem æque facile in ipſum transmitti, atque idcirco totam accipere quæ eſſet in corpore impacto quantumlibet minore [2]); quod mirum eſt tali viro in mentem venire potuiſſe. Præſertim cum tam longe ab experimentis recederet. Quæcunque enim talia ſunt vel ex quibus ea conſequi neceſſe eſt ea merito ſuſpecta eſſe debent.

Ab his vero longe diverſus abit Mariottus, in libro de Percuſſione Gallica lingua conſcripto [10]). Ubi ſingula fere Theoremata non aliter quam totidem expe-

---

[6]) Leçon alternative: „substructione".

[7]) Leçon alternative: „inductam".

[8]) Consultez la note 2 de la p. 49.

[9]) Comparez la note 1 de la p. 38. Au lieu cité Descartes motive sa quatrième règle par la phrase: „quia corpus quiescens magis resistit magnæ celeritati quàm parvæ, idque pro ratione excessûs unius supra alteram; & idcirco semper major esset vis in C ad resistendum, quam in B ad impellendum".

[10]) Il s'agit de l'ouvrage: „Traitté de la Percussion ou chocq des Corps, dans lequel les principales Regles du mouvement, contraires à celles que Mr. Descartes, & quelques autres Modernes ont voulu establir, sont demonstrées par leurs veritables Causes. Par Mr. Mariotte, de l'Academie Royale des Sciences. A Paris, Chez Estienne Michallet, ruë S. Jacques, à l'Image S. Paul. M. DC. LXXIII. Avec Permission."

D'autres éditions parurent de cet ouvrage, dont la troisième, de 1679, fut reproduite p. 1—116 du T. I des „Œuvres de Mr. Mariotte, de l'Academie Royale des Sciences; divisées en deux Tomes, comprenant tous les Traitez de cet Auteur, tant ceux qui avoient déja paru séparément, que ceux qui n'avoient pas encore été publiez; Imprimées sur les Exemplaires les plus exacts & les plus complets; Revuës et corrigées de nouveau. A Leide, Chez Pierre van der Aa, Marchand Libraire, Imprimeur de l'Université & de la Ville. MDCCXVII."

Les règles du choc employées par Mariotte pour ses corps „à ressort" ne diffèrent pas de

rimentis confirmat, Theoremata autem pleraque ad corporum concurſum ſpectantia eadem ſunt quæ a nobis multo ante fuerant in lucem edita [1]), quæque in conſeſſu Eruditorum [2]) in Bibliotheca Regia adductis demonſtrationibus comprobaveram; quarum demonſtrationum vim videtur ille non ſatis intellexiſſe. Habuerat autem a nobis etiam experimenta illa quæ adducit [3]) de ſerie globulorum qui ab uno vel pluribus in recta linea percuſſi, totidem de ſerie illa ex parte oppoſita [4]) diſcedere cogunt [5]). Nec non machinam ipſam in qua pendentium globulorum mutuo colliſu experimenta peraguntur [6]) quorum, ſi tanti eſſet, teſtes citare poſſem eos qui de cœtu inſignium virorum qui tunc aderant hoc tempore ſuperſunt.

celles énoncées par Huygens dans son article dans le „Journal des Sçavans" du 18 mars 1669 (voir les p. 179—181). Ainsi les Prop. XVI, XVII et XIX de la 1e Partie du Traité de Mariotte (pp. 100, 107 et 115 de l'édition de 1673; 36, 38 et 40 du T. I des Œuvres) sont identiques à celles numérotées 1, 2 et 4 de la p. 179—180 du Tome présent; nommément la construction pour le cas général du choc direct contenue dans la Prop. XIX est la même que celle de Huygens et de Wren. À la Prop. 5 de Huygens (p. 180) correspondent les Prop. XXII et XXIII (pp. 128 et 131 de l'éd. de 1673; pp. 44—45 du T. I des „Œuvres") et l'on retrouve un cas particulier de la „loy admirable de la Nature", découverte par Huygens (p. 181) dans la Prop. IV de la 2e Partie du Traité de Mariotte (éd. de 1673, p. 193; („Œuvres", p. 62 du T. I); savoir le cas du choc direct de deux corps.

Ajoutons que Huygens n'est nommé nullepart dans le Traité.

1) Comparez la note 3 de la p. 202.

2) Il s'agit toujours des séances de l'Académie des Sciences de Janvier 1668 mentionnées dans la note 1 de la p. 182.

3) Leçon alternative: „adfert".

4) L. a.: „altera".

5) Comparez l'annotation 6.1 qu'on trouve à la p. 184, ainsi que le deuxième alinéa de la p. 211 qui suit.

6) On trouve la description de cette machine dans l'explication qui suit la Prop. I de la 1e Partie du Traité (éd. de 1673, p. 8—22; „Œuvres", p. 5—9 du T. I). La méthode suivie par Mariotte dans ses expériences ne diffère pas en principe de celle employée par Huygens et les savants anglais en 1661; voir la p. 173 du Tome présent.

APPENDICE [7])

AU PROJET INACHEVÉ D'UNE PRÉFACE POUR UN TRAITÉ SUR LE CHOC DES CORPS ET LA FORCE CENTRIFUGE.

[1689?] [8])

De motu ex collisione vel occursu corporum.

Mariotte dans sa 3 defin. [9]) distingue la vitesse respective de deux corps d'avec leur *vitesses propres* [10]). Je dis qu'il n'y a point de propre: au lieu de dire, *quelles que soient leur vitesses propres*, il devait dire, quelles que soient leur vitesses à l'egard de quelqu' autre corps.

Mariotte a tout pris de moy, comme peuvent attester ceux de l'Academie des Sciences [11]) mr. du Hamel, m. Gallois, et les registres [12]), la machine [13]), l'experience du ressort des boules de verre. l'experience d'une ou plusieurs boules poussees ensemble contre une rangee de boules pareilles [14]) les theoremes que j'avois publiè [15]). Il devroit avoir fait mention de moy. Je le luy dis un jour, et il ne sceut que respondre.

---

7) Cet Appendice occupe les p. 3 et 4 (Portef. L, p. 28) d'une feuille détachée de quatre pages.

8) Comparez le deuxième alinéa de la p. 210.

9) Voir sur le Traité de Mariotte en question la note 10 de la p. 207. On y lit à la p. 2 de l'édition de 1673 (comparez la p. 3 du T. I des „Œuvres"): „Vitesse respective de deux corps, est celle avec laquelle ils s'approchent, ou s'esloignent l'un de l'autre, quelles que soient leurs vistesses propres".

10) Huygens écrit en marge: „Ita omnes *vulgo*, et aussi Newton".

11) Comparez la dernière phrase de la p. 208.

12) Comparez l'annotation 12 de la p. 184, avec la note 11 de la p. 185.

13) Voir la note 6.

14) Voir la note 5.

15) Voir les p. 179—180 du Tome présent. Huygens ajoute en marge „Marquez les propositions".

Il veut de mesme que Wallis [1]) que les corps durs ſans reſſort ſuivent les mesmes loix dans la percuſſion que les corps mols. *Puisque* (dit il) *c'eſt le ſeul reſſort qui donne le mouvement de reflexion* [2]). C'eſt la la queſtion. les corps mols ſans reſſort en ſe rencontrant retardent peu a peu leur mouvement en paſſant par tous les degrez de lenteur, jusqu'au repos, et ainſi il eſt neceſſaire qu'ils ne reflechiſſent point parce qu'il n'y a rien qui leur donne un nouveau mouvement. Mais c'eſt autre choſe dans les corps durs, car leur viteſſe continue tousjours ſans eſtre interrompue ni diminuée, et partant il n'eſt pas eſtrange qu'ils rejaliſſent. S'il y a des atomes parfaitement durs comme il eſt croiable, (et mesme la matiere ſubtile de Descartes ſemble devoir eſtre telle) ces particules en se rencontrant demeureroient toutes collees enſemble et ne compoſeroient pas une matiere liquide comme elles font, a moins que les corps durs ne reflechiſſent point en ſe rencontrant. Il eſt vray que je ne crois pas que nous ayons des corps viſibles de pierre ni d'acier ni d'autre choſe qui ſoient ſans reſſort.

Une marque que je ſuis bien loin de me vouloir attribuer l'honneur des inventions d'autruy c'eſt que j'ay laiſſè paſſer plus de 18 ou 20 annees ſans me vindiquer ce qui m'appartient de ces regles de percuſſion; en quoy m^r. Oldenburgh ne m'avoit pas rendu juſtice comme il faloit [3]), et moins encore m^r. Wallis [4]).

Que cette theorie eſt de grande conſequence dans la phyſique, principalement a l'egard de la lumiere [5]).

Que des Cartes ne s'eſt nullement ſervi de ſes regles de percuſſion, ainſi quoyque fauſſes elles ne detruiſent rien dans le reſte de ſa phyſique.

Mariotte parle du Tonnerre [6]) mais ne rend pas raiſon du grondement qui

---

[1]) Comparez la note 17 de la p. 175.

[2]) Cette phrase se trouve au commencement de l'„Avertissement" qui suit la Prop. XIV de la 1e Partie du Traité de Mariotte (éd. de 1673, p. 88; „Œuvres", T. I, p. 28).

[3]) Voir les p. 173—178 qui précèdent. Cette polémique avec Oldenburg eut lieu en 1669.

[4]) Il s'agit de l'ouvrage cité dans la note 17 de la p. 175. Il est vrai que dans le „Scholium" qui suit la Prop. V du „Cap. XIII. De Elatere & Resilitione seu Reflexione" (p. 1026 des „Opera") Wallis reconnaît l'identité de ses règles pour le choc direct des corps élastiques avec celles de Wren et de Huygens, mais il fait suivre: „Id utique interest; quod, quæ illi vel postulant vel ex observatis nulla habita Elateris ratione supponunt; nos, Elateris ope, ex primis Principijs deducimus: phænomenis interim quæ nos inde ratiocinando colligimus, iisdem provenientibus quæ ex factis Experimentis observarunt ipsi. Ut inde minus dubitandum sit, (cum singuli, clam reliquis, à diversis principiis, & diversis methodis ad eadem phænomena pervenerimus,) quin in veritate phænomenum consentiamus omnes".

[5]) Comparez l'annotation 17 de la p. 184 qui précède.

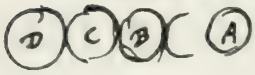
[6]) Dans l'édition de 1673 du Traité de Mariotte on trouve à commencer par la p. 215, un „Avertissement" qui débute ainsi: „On peut se servir des regles de la Percussion, expliquées dans les propositions precedentes, pour rendre raison de plusieurs effets naturels. Nous

dure ſouvent aſſez longtemps. Je dis qu'il vient de ce que la matiere s'allume tout a la fois dans une grande eſtendue d'eſpace, et parce que le ſon emploie du temps, il en met plus a venir des endroits eloignez ou il a eſtè produit que des proches, et ainſi on l'entend ſucceſſivement pendant quelque temps.

Sa demonſtration pag. 175 [7]) de pluſieurs boules qui choquent une rangee, ne vaut rien, par la raiſon que j'ay marquée a la marge [8]). Si on pouvait conſiderer ces boules contigues comme un peu diſtantes la demonſtration ſeroit aiſée, mais cela ne ſe doit point, et on peut ſans cela trouver la demonſtration par la conſideration du reſſort.

Dans le commencement que A commence d'enfoncer B, A avance plus viſte que le coſtè oppoſè de B, car autrement B ne ſeroit pas enfoncè par A, ſi ſon coſtè oppoſè avancoit autant que le coſtè frappè. de mesme le coſtè oppoſè c'eſt a dire le coſtè gauche de C avance moins viſte que le coſtè gauche de B. Et de mesme le coſtè gauche de D moins viſte que le coſtè gauche de C. Et partant le coſtè gauche de D avance beaucoup moins viſte que

[Fig 1.]



prendrons pour exemple les effets du Tonnerre". Or, la discussion de ces derniers effets s'étend jusqu'à la p. 226 de l'édition de 1673 et on la retrouve aux p. 69—72 du T. I des „Œuvres".

[7]) C'est la démonstration (éd. de 1673, p. 174—178; „Œuvres, T. I, p. 56—57) de la Prop. XXVIII de la 1e Partie du Traité. Mariotte commence par supposer qu'il y ait entre les boules en rangée „une petite distance comme d'un quart de ligne"; auquel cas il lui est facile d'expliquer les effets observés. Or, dit-il, le même doit arriver quand les boules se touchent „car par la consequence de la [Proposition] precedente" la boule qui vient d'être frappée commencera par retirer en arrière sa partie opposée à celle qui reçoit le choc et se separera un instant de la boule suivante, encore en repos.

C'est contre ce dernier raisonnement que Huygens s'oppose, comme on le verra dans la note suivante.

[8]) Voici ce qu'on lit en marge: „Il veut qu'elles plient comme un anneau et que le costè opposè se retire un peu d'abord. Il faudroit donc que par les coſtez elles s'etendiſſent ou s'èlargiſſent, ce que feroit qu'en mettant des boules a coſtè de celle qu'on frappe elles seroient chaſſees, ce qui n'arrive point."

Afin d'expliquer cette remarque, il suffira d'emprunter à la „Consequence" mentionnée dans la note précédente le passage suivant (éd. de 1673, p. 171—172; „Œuvres", T. I, p. 55): „Il s'ensuit que si une boule creuse à ressort est chocquée par une autre, directement; la partie opposée à celle qui est frappée, retourne un peu en arriere avant que de s'avancer; car l'effet doit estre semblable à celui d'un anneau à ressort: & mesme quand la boule chocquée seroit solide, il se doit faire un mouvement de fremissement ou tremblement en toutes ses parties, qui les fait approcher & esloigner de leur centre par une espece de vibration; & par consequent les boules dures à ressort comme celles de jaspe, de verre, & d'yvoire, doivent suivre la mesme Loy à peu près qu'un anneau de fer à ressort, lorsqu'elles sont chocquées directement par une autre; c'est à sçavoir que la partie opposée à celle qui est chocquée doit reculer un peu en arriere avant que de s'avancer".

le coſtè gauche de A dans la premiere impreſſion qu'il fait ſur B. mais pourtant ce coſtè gauche de D commence d'avancer auſſi toſt que A commence a faire plier B, mais il ſe paſſe du temps devant que D ait acquis toute la viteſſe de A, et ce temps doit eſtre d'autant plus long qu'il y a plus de boules contigues.

Car comme le coſtè droit de B s'aplatit devant ſon coſtè gauche, il s'enſuit que le premier ſe reſtitue auſſi devant le dernier. Par la mesme raiſon le coſtè droit de C ſe reſtitue devant ſon coſtè gauche et enſemble le coſtè droit de D. Mais par cette reſtitution la boule D acquiert ſon mouvement egal a celuy qu'avoit A. donc il paroit que ce mouvement de D vient d'autant plus tard apres le coup d'A ſur B, qu'il y a plus de boules.

DEUXIÈME PARTIE.[1])

PIÈCES ET FRAGMENTS CONCERNANT LA QUESTION DE L'EXISTENCE ET DE LA PERCEPTIBILITÉ DU „MOUVEMENT ABSOLU".

Non eſt mathematicè difficilis materia, ſed phyſicè aut hyperphyſicè [2]).

I.[3])

[?]

Cum corpora duo ut in ſe mutuo impingant efficimus, quæ nobiscum jam ante motu quodam communi et æquabili ferebantur, haud aliter illa ab occurſu vel

---

[1]) Cette Partie est empruntée à des feuilles détachées qui, en 1928, ont été numérotées et réunies dans un portefeuille L. Une seule Pièce (la troisième) est empruntée au Manuscrit F. Les dates des Pièces dont cette Partie est composée sont incertaines à l'exception de celles de la troisième (1688). Toutefois il paraît probable que ces Pièces à l'exception possible de la première et de la deuxième furent toutes composées après l'année 1687, lorsque la question de l'existence d'un espace absolu et immobile (comparez les notes 8 et 9 de la p. 193) fut remis à l'ordre du jour par le „Scholium" bien connu des „Principia" de Newton.

Divers passages, appartenant à ces Pièces, ont déjà été publiés par J. A. Schouten dans l'article: „Die relative und absolute Bewegung bei Huygens. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung", XXIX, 1920, p. 136—144.

[2]) Cette pensée, empruntée à la feuille (Portef. L, p. 5) qui nous a fourni aussi la Pièce VI, peut servir de devise aux Pièces qui suivent. Ajoutons que Huygens avait écrit primitivement: „metaphysicè" au lieu de „hyperphysicè".

[3]) La Pièce qui suit est empruntée pour la plus grande partie à un Manuscrit (Portef. L, p. 15

refilire vel conjuncta ferri, respectu nostri qui eodem communi motu deferimur, ac si omnibus adventitius ille motus abesset.

Veluti si quis in navi sedens quæ æquabili motu provehitur, duos æquales globulos ex ebore vel alia materia dura, inter se collidat, eos æquali quoque celeritate repercussum iri, vectoris hujus respectu, ipsarumque partium navis; prorsus eodem modo ac in navi quiescente, aut in terra posito contingeret.

Ac facile hoc ita se habere concedent, qui sciunt in navi quæ æquabili cursu fertur, cætera omnia quæ ad motum spectant eadem ratione evenire, atque in terra consistentibus. Neque ullo motu corporum aut repercussione quæ intra navem accidunt, deprehendi posse utrum ea pergat æqualiter an immota maneat. Uti quoque nihilo magis ex motu corporum cadentium aut projectorum, aut in se impingentium internosci posse, utrum Terra moveatur an quiescat. Nam qui hinc argumenta petierunt ad demonstrandum ejus quietem, eos jam diu Galileus alijque plurimi viri eruditi confutaverunt. Qui igitur Terram quiescere volunt, ijs experimenta ista in navi peracta veritatem adsumti Principij comprobabant. Qui vero Terram moveri statuunt, ut fere nunc omnes Astronomi ac Philosophi, ij dubitare nequeunt, quin perinde omnia eveniant in navi vectis, atque in Terra stantibus, cum sciant non magis hos quam illos quiescere, adeoque omnes motus de quibus hic agemus respective ad alia corpora accipiendos esse. Quid enim? an inquirere juberent quid fiat in motibus veris veraque quiete. Hoc quidem nemo exegit eorum qui de hisce percussionum legibus egerunt, sed quid nobis contingat in Terra versantibus quæsiverunt. quo omnis utilitas hujus investigationis continetur. Sed nec ultra quæri quicquam potest. Nam si quis hoc existimet non sufficere, is ostendat oportet quid sit in mundo quod verè moveatur aut verè quiescat. In quo frustra laborabit, neque unquam exitum inveniet [1]). Quinimo si diligenter inspiciamus motus naturam, inveniemus verum istum motum veramque quietem, quomodo plerique omnes intelligunt, non solum cognosci non posse, sed neque esse omnino in rerum natura. Quod paradoxon novum atque à veritate alienum permultis visum iri non dubito, quandoquidem omnes qui de motu egerunt, quorum quidem scripta videre mihi contigit [2]), vel ponunt hoc tanquam certissimum, vel silentio agnoscunt, quædam scilicet corpora verè quiescere, aut verè

---

et suiv.) où il n'y a presque pas de ratures et dont l'écriture est plus soignée que d'ordinaire. Comme tant d'autres elle devait faire partie d'une préface pour le Traité „De Motu" (voir la note 3 de la p. 215). Elle semble antérieure aux autres Pièces (avec l'exception possible de la Pièce II). Nous la reproduisons en entier.

[1]) Comparez la p. 142 de ce Tome.

[2]) On lit encore en marge pour être incorporé ici dans le texte: „(uno tantum Cartesio excepto qui aliquid amplius hic vidit sed quo tamen uti nescivit)". Consultez les

moveri, prout in ſpatio mundano locum eundem ſervant, vel alio permutant; quædam æſtimatione tantùm aliorum ita ſe habere quæ ut quieſcentia ſpectentur. Quo majus operæ pretium fore videtur, ſi communem hunc errorem evellere conemur. Neque tamen ab hac demonſtratione, quam prævideo non æque omnibus intelligendam, ſequentium Theorematum [3]) veritas pendebit, ſed maxime ab eo quod jam ſumſimus principio; tum ab alijs quibusdam nihilo minus certis quæ poſtmodo adferemus.

Qui itaque Tellurem hanc immobilem plane imaginantur, dicent corpus illud quod omnibus ſui partibus reſpectu Telluris eundem locum ſervat, vere quieſcere, moveri vero verè, quod vel totum, vel partibus ſuis, ejusdem reſpectu locum permutat. Quibus vero Tellus movetur, forſan dicent ſtellas, quas fixas vocamus, vera illa quiete frui. Utrique autem, ſi interrogentur quid ſit ſic vere quieſcere, non aliud quod reſpondeant habent, niſi hoc contingere cum corpus quodpiam atque omnes partes ejus, eundem locum ſervant in ſpatio mundi univerſi. Sed quoniam ſpatium hoc infinitè extenditur in omnem partem, nullis finibus circumſcriptum, nihil medium aut extremum habens; hoc enim apertius eſt quam ut probatione indigeat; fateantur neceſſe eſt, nihil eſſe unde certus locus illic definiri poſſit; neque etiam eſſe quo locus à loco differat, ejusdem ſpatij infiniti reſpectu. Nam cum ipſum immobile dicunt, quo et partes in ipſo immobiles inveniant, neſcio quem conceptum habeant hujus immobilitatis; ſed non meminerunt, hoc ipſum adhuc quæri, quid ſit eſſe immobile, adeoque in circulum quem vocant incidunt [4]). Viderunt puto, abſurdum fore, ſi dicerent ſpatium mundi infinitum moveri atque ita concluſerunt ipſum quieſcere. Cum potius cogitare debuiſſent, neque quietem neque motum ſpatio iſti convenire, ſed corporibus tantum; vel improprie ijs ſpatijs quæ à corpore occupantur, vel includuntur; veluti ſi ſpatium amphoræ una cum amphora moveri dicamus, aliorum corporum reſpectu.

Nulla igitur eſt [5]) mutatio loci reſpectu ſpatij mundani.

Conſtat igitur nihil obſtare quin ſtellas fixas inter ſe quieſcere dicamus ac

---

articles XXVII—XXXII de la „Pars secunda" des „Principia Philosophiæ" de Descartes de 1644 (voir les p. 55—58 du T. VIII (1905) de l'édition des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery).

[3]) Il s'agit sans doute des Théorèmes du Traité „De Motu" (voir les p. 29—91). La Pièce constitue donc le début ou devait du moins faire partie d'une préface pour ce Traité, augmenté probablement de celui sur la force centrifuge qui suit dans ce même Tome.

[4]) Comparez J. M. C. Duhamel, „Des méthodes dans les sciences de raisonnement, Quatrième partie, Application des méthodes générales à la science des forces", Paris, Gauthier-Villars, 1870, p. XVIII: „... peut-on attacher un sens au repos ou au mouvement *absolu?* Ceux qui en parlent supposent un espace sans bornes, dont tous les points ont une réalité, en quelque sorte *personnelle*, et auxquels ils attribuent, sans s'apercevoir du cercle vicieux, une immobilité absolue".

[5]) On trouve ici dans le Manuscrit: &c. et un signe de renvoi qu'on retrouve sur une autre

respectu mutuo, non autem aliam insuper quietem illis tribui posse quæ vera dicenda sit. Eademque ratio est in alijs corporibus quibuslibet, ut nimirum quiescere dici nequeant nisi unius vel plurium respectu quibuscum eundem positum eandemque servant distantiam. *nec moveri nisi aliorum item respectu quibuscum ista eadem commutant* [1]).

Quæ autem contra hæc adferri possint nonnulla [2]) mihi in mentem venerunt, quarum præcipua hic exponere placet. Quid si ponamus [3]), dicet aliquis, unicum tantum corpus in toto mundi spatio existere, hoc igitur moveri non poterit, quia nihil est ad quod ejus motus referatur? quo quid absurdius? Respondeo. neque quiescere illud posse, quia utrumque hoc quiescere et moveri respective tantum intelligi potest. In spatio autem infinito, si nullum præterea corpus extet, nihil est quò habeatur respectus. Si enim quæram qua in re consistat aut motus aut quies unici hujus corporis, non habent quod respondeant, nisi in hoc quod vel servabit vel mutabit locum suum in spatio mundi cum totum, tum partibus suis omnibus. Atqui si nihil est illius spatij respectu quo locus a loco differat, ut jam ante diximus, non erit utique nec loci mutatio [4]); ac rursus si non est illic unde locus idem esse dicatur, nec ullum *Ibi*, non erit requies in eodem loco; sed totum illud quiescere aut moveri nequaquam pertinebit ad corpus illud unicum [5]). Instabunt vero rursus, quidsi mecum pila A in mundo existat, ac præterea nihil, atque ego eam a me repellam, numquid durabit impressio in pila A, qua scilicet fiet ut con-

---

feuille après les mêmes mots „Nulla igitur est". C'est à cette feuille que nous empruntons le reste de la phrase.

[1]) Ici Huygens annota en marge, à propos de la phrase en italiques soulignée par lui: „non benè".

[2]) Leçon alternative: „non pauca".

[3]) Leçon alternative: „fingamus".

[4]) On lit ici en marge: „sed erit partium inter se diversa directio, unde motus circularis". Plus loin dans cette même Pièce Huygens reviendra sur cette remarque.

[5]) On rencontre ici un signe de renvoi qu'on retrouve sur une petite feuille (Portef. L, p. 16) attachée, probablement par Huygens lui-même, à celle dont nous empruntons le texte. Voici le contenu de cette petite feuille: „Ils diront que quoyqu'il n'y ait rien dans l'espace infini et vuide par ou designer la diversitè des lieux, il est pourtant certain que supposant les corps A et B distans de 3 p[ieds?] le lieu du corps A est different du lieu du corps B. Et qu'ainsi le corps A estant poussè vers le lieu ou est maintenant B, se mouvra. Je repons vous concevez les corps A et B et leur lieux comme immobiles devant le mouvement de A; non pas seulement entre eux mais aussi a l'egard de l'univers. Car si vous pouvez consentir qu'ils soient en mouvement, il se pourra que le corps A estant poussè et allant vers le lieu qu'occupe B, soit en repos, scavoir si A et B se mouvoient du

tinue æqualiter a me recedat? Quod ſi jam ego qui impuli in nihilum redigar, an non durabit etiam poſtea impreſſio in pila A facta? Si autem durat, ergo jam movebitur absque mei reſpectu aut alterius rei cujusquam, aut certe aliquid habebit pila A, quod non habebat antequam mea opera impelleretur. Reſpondeo impulſu pilæ A effectum eſſe ut exiſtat motus inter te atque illam, ſive ut reſpectu mutuo moveamini, non enim tunc tu magis quieſcere dici poteras quam ipſa pila A; neque enim ante impulſum uterque quieſcere dici poteratis niſi inter vos. Sicut igitur redacta ad nihilum pila A, non poteſt dici te moveri, per ante dicta ſic neque te ſublato dici poteſt moveri pila A. nec erit aliquid in illa quod non erat antequam impelleretur. In hoc enim errari ſolet, quod qualitatem aut vim impreſſam, aut impetum in corporibus exiſtere poſtquam impulſa fuerint, imaginamur, quorum virtute moveantur; adeo ut ſint qui exiſtiment violentia quadam affici corpora celerrimè [6]) mota eoque fieri poſſe ut glandes plumbeæ in medio curſu liqueſcant, quod profecto ſi fiat non propter motus velocitatem contingeret, ſed propter aëris accurſum atque attritum. Ex motu enim quamlibet intenſo corpora nihil accipiunt neque patiuntur præter hoc ipſum quod aliorum reſpectu diſtantiam aut poſitum immutent [7]).

Hoc porro ſemper ita ex æquo utrisque convenit, ut nunquam magis A moveatur reſpectu B, quam B reſpectu A. Unde etiam hoc conſequitur, ut ſi corpora A, B, mutuo reſpectu quieſcant, ſolaque tecum in mundo exiſtere ponantur, ſitque A millecuplo majus quam B, tamen ſive tu A ita impuleris ut certa celeritate à B diſcedat; ſive B impuleris ut eadem illa celeritate diſcedat ab A; idem prorſus (omiſſo tui reſpectu) effeceris; etſi hoc poſterius multo minori labore conſtiterit quam prius iſtud. Pleraque hæc mira videbuntur, ac forſan abſurda atque aliena ijs qui noviter in ea incident. At ſerio diligenterque perpendenti vera

---

commencement avec autant de vitesse vers le costè contraire. Mais vous dites qu'A se meut en allant vers B. Vous concevez donc une immobilitè a l'egard de l'espace mondain infini, ce qui est retourner a la fausse idée de cy devant.

Quelqu'un dira encore, nous ne pouvons pas peut estre scavoir en quoy consiste le mouvement, mais scavons seulement qu'un corps qui a receu de l'impulsion se meut. Je repons, cum Ideam motus non aliunde habeamus quam ex mutatione positus corporis alicujus, vel partium ejus (ut in motu circulari) ad alia corpora, nullum proinde motum imaginari possumus, quin etiam positus mutationem contingere concipiamus, quia non potest motus intelligi cui non conveniat idea. Et jam vidimus non sequi ut corpus quod impulsum est moveatur".

[6]) Leçon alternative: „pernicissimè".

[7]) Comparez la note 1 de la p. 228.

eſſe apparebit. Neque enim quicquam opponi poteſt quod non ex jam dictis facile explicetur. Sed jam ulterius obſcuram hanc motus naturam perveſtigare pergamus.

Binis corporibus inter ſe motis diſtantiamque mutantibus, non poteſt ex ſolo motu ipſorum cognoſci utrum e duobus impulſum fuerint [1]), an utraque. Neque item ſi 3 aut plura fuerint quæ ſic moventur. Ex ſolo inquam ipſorum motu, nam ſi ex. gr. cymbam in lacu progredi cernam non dubitabo utique cymbam aut hominis aut venti vi [2]) impulſam fuiſſe non autem Terræ totius motione id effectum.

Itaque quodlibet corpus ut immotum ſpectari poteſt, ad quod cæterorum motus ac celeritates referantur. ac propterea cum in ſequentibus dicemus hac illave celeritate corpora quædam ferri, hoc ita ſe habere reſpectu certorum quæ ut quieſcentia conſiderantur intelligendum erit. Quoniam verò nullam quietem corporum eſſe oſtendimus niſi inter ſe ac mutuo reſpectu, videndum jam eſt quænam corpora inter ſe quieſcant. Certe non alijs hoc convenit niſi quæ diſtantiam eandem poſitumque ſervant mutuo reſpectu. Sed non ideo quæcunque diſtantiam eandem poſitumque mutuo reſpectu ſervant, inter ſe quieſcunt.

Quod mirum [3]) rurſus videbitur, ſed ad explicandam motus circularis naturam ita contemplatione neceſſario ſtatuendum eſt ut mox patebit.

Sciendum itaque quieſcere inter ſe corpora, quæ cum nullo vinculo aut obice continentur quo minus ſingula liberè a ſe mutuo recedant, tamen ſitum diſtantiamque inter ſe eandem ſervant. Ut ſi globuli perfecta rotunditate in plana menſæ ſuperficie diſpoſiti, nusquam diſcedant, eos inter ſe quieſcere ac menſæ illius reſpectu dicemus; atque ipſius quoque menſæ partes tunc inter ſe quieſcere.

Quod ſi vero ita inter ſe quieſcentium reſpectu, corpus aliud liberè et ſine obſtaculo ullo moveatur, id lineam rectam eorundem reſpectu percurret, progreſſuque æquabili feretur. Atque hoc Principij loco habendum eſt, quod cum experientia manifeſto comprobat tum a plurimis ante nos ſumtum fuit quanquam hac ratione nititur, quod æque rationi conſentaneum ſit corpora mutuo reſpectu mota, ſi nullum occurrat impedimentum, moveri pergere neque in ullam partem declinare, quam inter ſe quieſcentia ſi nil aliud accidat perſeverare in quiete.

Ex hoc vero motu ad corpora inter ſe quieſcentia relato, intelligi ac definiri

---

[1]) Lisez: „fuerit".

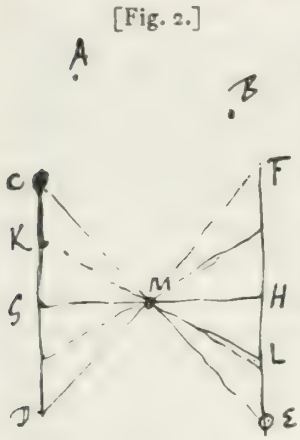
[2]) Leçon alternative: „opera".

[3]) Les mots „Quod mirum" se trouvent hors du texte tout en bas de la feuille (Portef. L, p. 17 verso) à laquelle nous avons emprunté ce qui précède; ils sont répétés sur la feuille (Portef. L, p. 19) dont nous reproduisons le contenu à partir d'ici.

demum poteſt quid ſit in linea recta libere et æquabiliter moveri adeo ut nec curſus rectus et æquabilis navigij, ſupra adductus explicando priore Aſſumpto noſtro, alia ratione talis cenſeri queat, quam partium terræ inter ſe quieſcentium reſpectu.

Quoniam vero poſitis corporibus inter ſe quieſcentibus, plura alia ipſorum reſpectu ſecundum diverſas lineas rectas moveri poſſunt, hæ lineæ tunc diverſæ motuum directiones dicentur [4]) ac tali duorum corporum motu, etſi ſingula æquabiliter feruntur fit tamen ſemper ut inæqualiter ad ſe mutuo illa accedant vel à ſe recedant. Ut ſi corporum A [Fig. 2] et B inter ſe quieſcentium reſpectu moveantur liberè et æque celeriter C quidem ſecundum directionem rectæ CD; E vero ſecundum directionem contrariam rectæ EF, ipſi CD parallelæ. Intelligatur autem recta GH utrique directioni perpendicularis, quæque diſtantiam CE mediam ſecet in puncto M; et dividantur bifariam CG in K, EH in L. Jam ſi, una parte temporis, corpus C pervenerit in K, ſimulque E in L, altera vero temporis parte ſimili corpus C peregerit ſpat. KG, ſimulque E ſpatium LH, utriusque æquabilis eſt motus, ſed mutatio diſtantiæ inter utrumque æqualibus temporibus inæqualis accidit quoniam majore exceſſu ſuperat CE rectam KL, quam hæc rectam GH, ut quivis facile demonſtrabit. Atque ita quo propius ad lineam GH accedunt corpora C, E, eò lentius inter ſe appropinquant, deinde vero cum ab ea recedunt creſcit continuè ipſorum mutuo reſpectu celeritas. Et facile apparet celeritates eorum in lineis directionis ſuæ, quantumlibet majores eſſe poſſe celeritate qua ad ſe invicem accedunt vel qua ſejunguntur, prout nempe propiora lineæ GH intelligentur [5]).

[Fig. 2.]



Imo directiones porro motuum celeritatesque corporum reſpectu mutuo certo cognoſci poſſunt præſentibus ijs corporibus quæ inter ſe quieſcunt, quoniam utræque reſpectu horum definiuntur. His vero ſublatis, etſi illa haud aliter quam

---

[4]) Ici se trouve un signe de renvoi, qu'on retrouve sur une petite feuille (Portef. L, p. 18) attachée, probablement par Huygens lui-même, à la plus grande à laquelle nous avons emprunté le texte qui précède. C'est à cette petite feuille que nous empruntons ce qui suit jusqu'à la fin de l'alinéa.

[5]) On lit encore au revers du petit papier: „Potest vero directio motus etiam corporis aut puncti alicujus respectu considerari quod ut quiescens spectatur".

prius moveri inter ſe pergant, difficilius eſt dicere quæ ſint eorum directiones, quæve in ijs celeritates æquabiles quæ utræque etiam diverſimodè explicari poſſunt quod nunc pluribus non perſequemur [1]).

Sed in corporibus colligatis ac circulariter motis, aut in partibus unius cujuspiam corporis, circa centrum converſi, cognoſcitur motus circularis vel relatu ad corpora quædam inter ſe quieſcentia, vel absque his etiam ex Vi Centrifuga. Velut ſi bina corpora filo eidem utrimque alligata ſint, ac circulariter moveantur cognoſcetur id ex tenſione fili. ac ſimiliter ſi rota quæpiam in orbem vertatur, patebit hoc e ponderibus in circumferentia ſuſpenſis ſi ea ab axe refugere cernentur et obliquis filis circumferri [2]) unde conſtabit non te ſpectatorem circa rotam immobilem circumduci, ſed illam in ſeſe verſari. At numerum quidem ac celeritatem circulationis intuitu corporum aliorum inter ſe quieſcentium definire licet. Sine ijs vero quò major eſt vis centrifuga eò quidem celeriores circuitus eſſe colligemus, ſed et quanta ſit celeritas et qui numerus converſionum ex Theorematibus noſtris de vi centrifuga [3]) diſcere licebit.

II [4]).

[?]

Sicut in Mechanicis operationibus aliquid impedimenti adfert materiæ imperfectio quod non ſatis levia aut dura ſint inſtrumenta, in demonſtrationibus autem

[1]) Si l'on donne p. e. au système des corps C et E [Fig. 2 de la p. 219] outre le mouvement qu'ils possèdent un mouvement de translation oblique uniforme, les vitesses résultantes des deux corps ne seront plus dirigées suivant des droites parallèles.

Ailleurs (Portef. L, p. 32) Huygens écrit: „après l'explication du mouvement circulaire, revenir aux diverſes directions des corps entre eux et leur eloignement inegal, quand mesme ils ne seroient que deux au monde".

[2]) Il y a ici un signe de renvoi qu'on retrouve en marge pour y indiquer les mots par lesquels la phrase est complétée.

[3]) Ces Théorèmes furent publiés sans démonstration p. 159—161 de l'„Horologium oscillatorium" de 1673. Plus loin dans ce Tome on trouve le Traité posthume „De Vi Centrifuga", et les Théorèmes en question (p. 255).

ut perfecta conſiderantur. Ita hic faciendum quoque, ut et duriſſima corpora fingamus et in eo loco librata ubi nihil motui eorum obſiſtere poſſit.

Quieſcere unumquodque dicitur reſpectu eorum à quibus eandem ſervat diſtantiam, ſimiliter moveri reſpectu eorum quibuſcum diſtantiam commutat.

Primus liber aut pars de æqualibus globis. Et de infinita percuſſionis potentia. Et quod æqualis in colliſis digrediendi celeritas et appropinquandi. ad ſingula unum axioma.

Æque multum motus remanere debere noſtrum eſſe principium poſſet ad reliqua ſed ita intellectum ut æque multum remaneat motus in eandem partem [5]). Facile oſtenditur ſecundum Carteſium non explicari poſſe.

Vacuum ſine extenſo corpore vacans facile cogitari poteſt. Ponemus tamen materiam ſed quæ nec juvet nec impediat motum. Hoc etiam noſtro aeri convenientius. Aerem parum tantum graviſſimis corporibus metallorum reſiſtere exemplis cadentium fit manifeſtum. Sed jam nihil officere ſupponemus. Parte ſecunda de gravitate, quod unumquodque eo difficilius movetur eoque conſtantius motum ſervat quo gravius eſt. Quod nullius nulla ſit extenſio captioſe dictum videtur [6]). Mihi videtur alia eſſe notio loci continentis quam corporis in eo contenti. Quid tamen cum omnes qualitates à corpore auferemus cogitatione? quid remanet præter extenſum?

Videtur corpus ſecundum Carteſium non differre à vacuo philoſophorum. Sane ſi nihil præter extenſionem ei tribuit, non video quomodo alia corpora illiſa repellet. Nam quod dimenſionum nullam penetrationem dari ait, ut vulgo dicitur, id frivolum eſt. Non erit item quo figuræ ab invicem diſcretæ ſint. Aut ſi motu ſuo ſatis ſeparatas exiſtimat, ſaltem non habebunt quo figuras ſuas conſervent niſi duritiem tribuamus. Videtur autem et ipſe Carteſius duritiem ijs tribuiſſe (licet non dicat) eo ipſo quod figuras proprias ſervare ſingulas particulas et alias pellere ſtatuat. Sed male eam non inſuperabilem ponit, cum comminus et deteri et ſphæricas reddi ſcribat [7]). Ponamus ergo duritiem inſuperabilem: aliquas videlicet

---

[4]) La Pièce est empruntée à la première et à la deuxième page d'une feuille détachée (Portef. L, p. 33).

[5]) Huygens a donc songé un moment à mettre en avant le principe de la conservation de la quantité de mouvement dans une direction donnée.

[6]) Comparez la note 7 de la p. 199.

[7]) Descartes „Les Principes de la Philosophie", III § 48 (T. IX des Œuvres publ. par Adam et Tannery, p. 126): „Comment toutes les parties du Ciel sont devenuës rondes".

materiæ partes [1]) ejusmodi figuras obtinere quas nullo modo amittere queant, reliquam vero materiam [2]) inter illas diffusam quæ nihil earum motui obsistere possit, cum tantum hoc habeat ut extensa sit [3]).

III [4]).

[1688] [5])

Omnis motus et quies corporum relativi sunt. Nec sine respectu mutuo corporum dici aut intelligi potest aliquid moveri aut quiescere.

nam ij errant qui spatia quædam immota ac fixa in mundo infinite extenso imaginantur cum ista immobilitas non nisi respectu rei quiescentis concipi possit [6]).

Sed partes corporis mutuo respectu moveri possunt qui motus vertiginis dicatur, manente earum distantia propter vinculum vel obicem. Propter vinculum ut in turbine vel in composito ex duobus corporibus fune connexis. Propter obicem ut in aqua in vase rotundo circumacta.

In hoc motu partes recedere conantur a se mutuo vel a puncto ipsarum respectu definito, idque eo majore vi quo major est motus ipsarum relativus. unde et de qualitate motus hujus respectivi judicium fieri potest, cum ex distantiæ mutatione non possit.

Corpora quæ mutuo respectu moventur ea vere moventur [7]).

Inter duo corpora motus producitur alterutrum impellendo. Idemque motus produci potest utrumvis è duobus impellatur. licet minori vi opus sit si quod e duobus minus est impellatur.

Corpus quodlibet celeritatem respectu aliorum, quæ ut quiescentia spectantur,

---

[1]) Les corps visibles et tangibles, p. e. des globes qui entrent en collision.

[2]) P. e. l'air.

[3]) C. à. d. dont la „moles" est négligeable; comparez le début de cette Pièce.

[4]) Cette Partie est empruntée à la p. 326 du Manuscrit F.

[5]) La p. 320 du Manuscrit porte la date du 27 mars 1688 et la p. 331 celle du 8 nov. 1688.

[6]) Huygens fait sans doute allusion au Scholium bien connu de Newton; voir la note 8 de la p. 193 de ce Tome. La première édition des „Principia" de Newton est de 1687.

[7]) Comparez l'Avertissement, p. 195, note 6.

acceptam continuat æquabiliter, et ſecundum rectam lineam eorundem illorum corporum reſpectu [8]).

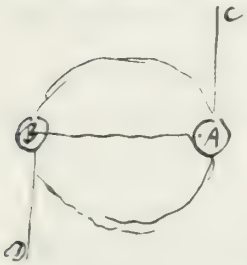
quietis non niſi relatione corporum [9]) ideam habemus.

IV [10]).

[?] [11])

Il faut donc ſçavoir que l'on connoit que des corps ſont en repos entre eux; lorsqu'eſtant libres a ſe mouvoir ſeparement et point liez ni detenus enſemble, ils gardent leur poſition entre eux. Comme ſi pluſieurs boules ſont poſees ſur une table bien unie et qu'elles demeurent chacune ſans mouvement dans leur place ſur la table, alors elles ſont en repos entre elles et a l'egard de cette table. J'ay dit qu'elles doivent eſtre libres a ſe mouvoir ſeparement parce qu'elles pourroient garder de mesme leur place eſtant liees enſemble ou attachees a la table et eſtre pourtant en mouvement entre elles ce qui peut paraitre etrange; mais c'eſt en quoy conſiſte la nature du mouvement circulaire, le quel exiſte lors que deux ou pluſieurs corps, ou bien les parties differentes d'un mesme corps ſont pouſſees a ſe mouvoir par des directions differentes, et que leur eloignement eſt empeſchè par le lien qui les unit enſemble de ſorte que c'eſt le mouvement reſpectif entre ces corps ou entre les parties d'un ſeul, avec changement continuel de direction [12]), mais avec perſeveration de diſtance à cauſe du lien.

[Fig. 3.]



Comme quand deux boules A et B tenant enſemble par le fil AB, et eſtant entre elles en repos; (ce qui ſe juge ſuivant ce qui a eſtè dit, par leur repos avec d'autres corps qui ſont libres au mouvement et qui gardent pourtant leur

[8]) Comparez les deux derniers alinéas de la p. 218.

[9]) Leçon alternative, au lieu de ces deux derniers mots: „relativam".

[10]) Le fragment que nous reproduisons ici est emprunté à la troisième et à la quatrième page d'une feuille détachée de quatre pages (Portef. L, p. 32).

[11]) Le „traité" de Newton est mentionné dans cette partie (voir p. 225 note 4), dans une note marginale.

[12]) En marge: „qui cognoscatur, nempe ex tensione fili. vel projectione impositorum".

poſition et diſtance). Si A eſt pouſſè vers C et B vers D, eſtant les lignes AC, BD perpend. à AB et dans un mesme plan et les impulſions egales, alors ces corps ſe mouvront dans une circumf. de cercle au diametre AB, s'entend à l'egard des corps parmi lesquels A et B repoſaient auparavant. Ainſi A et B auront du mouvement entre eux, c'eſt a dire au reſpect l'un de l'autre, ſans pourtant que leur poſition ou diſtance entre eux change [1]).

Sans qu'on puiſſe dire combien l'un et l'autre ont de ce mouvement qu'on apelle vulgò veritable, ni ſans qu'ils aient ce mouvement veritable du tout, comme n'eſtant qu'une chimere, et fondè ſur une fauſſe idée.

Il en eſt de mesme d'un ſeul corps par ex. d'une roue ou globe; ſi non que dans les parties d'un tel corps il y a des directions differentes de toutes manières, et non pas ſeulement par des lignes paralleles comme icy. Or ce mouvement circuculaire ſe connoit ou par rapport aux corps qui ſont aupres en repos entre eux et libres; ou par la vertu centrifuge qui cauſe la tenſion du fil qui lie 2 corps enſemble et ainſi leur mouvement circulaire ſe connoit quand mesme ces autres corps n'y ſeroient point. Ou bien quand il n'y a qu'un corps qui circule, elle cauſe la projection de quelques corps qu'on pourroit y placer deſſus, comme ſi c'eſtoit une table tournante, des boules qu'on mettroit deſſus hors qu'au centre, s'en fuiroient auſſi toſt et la quiteroient. Et dans de l'eau tournant dans un vaſe circulaire elle cauſe l'elevation de l'eau vers les bords.

On connoiſt par la que les fixes repoſent entre elles et n'ont point receu d'impulſion pour aller en rond, parce qu'elles s'ecarteroient à moins que d'eſtre fichees dans une ſphère ſolide comme autrefois quelques uns ont cru. Par conſequent la Terre l'a receue. Ce qu'on connoit d'un autre maniere par les horloges c'eſt a dire qu'elle rejette plus fort vers l'Equin [2]).

Or dans la circulation de 2 corps liez par le fil AB on connoit qu'ils ont receu

---

[1]) En marge: „mouvement circulaire est changement de direction sans changer de distance. le mouvement des corps tournants circulairement consiste en changement continuel de direction".

Cette définition paraît être générale et applicable aussi dans le cas considéré dans le troisième alinéa de la page 224, où le corps tournant existe seul dans l'espace. Attendu que dans ce cas le „mouvement circulaire se connoit" par „la tension du fil", il s'ensuit que suivant Huygens (qui cependant déclare dans cette même Pièce que le „mouvement veritable" est „une chimère") les „changements de direction" ont dans l'espace vide un caractère absolu. Par le mot „direction" il faut entendre la direction d'un *mouvement*, conformément à la définition de d'Alembert dans l'„Encyclopédie méthodique" I, 1784, p. 536: „Direction (Méch.) est en général la ligne droite suivant laquelle un corps se meut ou est censé se mouvoir".

[2]) L équinoctial ou équateur.

impulſion qui a produit leur mouvement ou direction reſpective entre eux; mais on ne peut pas connoitre à les conſiderer ſeuls s'ils ont eſte pouſſez egalement, ou ſi l'un ſeulement. Car ſi on avoit pouſſè le ſeul A, le mouvement circulaire et la tenſion du fil ſe feroit enſuivie de mesme, quoyque le cercle auroit eu alors un mouvement progreſſif a l'egard des autres corps en repos.

que j'ay donc montrè comme dans le mouvement circulaire auſſi bien qu'au mouvement libre et droit il n'y a rien que de relatif. de ſorte que c'eſt tout ce qu'il y a à connoiſtre au mouvement, et auſſi tout ce qu'on a beſoin de connoitre [3]. mais comme j'ay deſia dit ceux qui feroient ſcrupule de conſentir à ce raiſonnement, n'ont que faire de s'embaraſſer l'eſprit, et doivent ſeulement tenir ce qui a eſtè poſè touchant le mouvement dans le vaiſſeau, ſcavoir que les repercuſſions des corps s'y font tout de mesme qu'a ceux qui ſont à terre. hoc enim exemplum ût captu facillimum in demonſtrationibus quæ ſequuntur frequenter adhibebimus [4].

Ils diront, nous ne pouvons pas ſcavoir peut eſtre en quoy conſiſte le mouvement, mais ſcavons ſeulement qu'un corps qui a receu de l'impulſion ſe meut. Reſpondeo cum Ideam motus non aliunde habeamus quam ex mutatione poſitus corporis alicujus vel partium ejus (ut in motu circulari) ad alia corpora, nullum idcirco motum imaginari poſſumus quin iſtam poſitus mutationem contingere concipiamus, quoniam non poteſt motus concipi cui non conveniat idea motus.

---

[3]) On trouve la même opinion dans l'ouvrage de Duhamel, cité dans la note 4 de la p. 215. Il écrit (p. 291): „Lorsque nous avons reconnu la présence d'une force accompagnant le déplacement d'un point, ce déplacement était relatif; lorsque nous avons démontré, par exemple, qu'un point qui décrivait un cercle d'un mouvement uniforme était sollicité par une force constante dirigée vers le centre, il s'agissait d'un cercle relatif et d'un mouvement relatif. La force centrifuge qui en résultait si le cercle était matériel, pressait ce cercle, lié au système, par suite du mouvement relatif qui était le seul auquel les équations s'appliquaient. Cette conséquence reconnue expérimentalement, et autres semblables, ne pourraient donc être invoquées pour prouver l'existence d'un prétendu mouvement absolu, dont on ne peut même donner une définition."

[4]) En marge: Mr. Newton dit qu'il a escrit tout son traitè pour connoitre le vray mouvement.

Le scholium bien connu de Newton (voir la note 8 de la p. 193 de ce Tome) se termine par les mots: „Motus autem veros ex eorum causis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere, & contra ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causas & effectus, docebitur fusius in sequentibus. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui".

V [1]).

[?] [1])

Vulgò exiſtimant verum quendam motum eſſe qui relativo opponatur. Borellus [2]), Mariotte [3]). an Pardies [4]). Newton. an Walliſius [5])?
me in circulari motu diu credidiſſe κριτήριον exiſtere veri motus.

Qui verum motum absque aliorum corporum reſpectu [6]) ſibi imaginantur viderunt non poſſe in corporibus liberis ſimpliciter motis motum diſcerni vel dijudicari, cum in ipſo ſpatio infinito quod ſibi immobile fingunt, nihil inveniat ſenſus unde judicium ejusmodi exoriatur. Sed in corporibus circulariter motis putarant κριτηριον veri motus haberi.
Conſideratio motus terræ an non hic verus ſit dicendus.

motus circulationis eſt motus relativus in rectis parallelis, mutata continuè directione, et manente diſtantia propter vinculum.

---

[1]) La Pièce est empruntée à la première, à la troisième et à la quatrième page d'une feuille détachée (Portef. L, p. 10 et 11); il y est fait mention des „Principia" de Newton, publiés en 1687.

[2]) G. A. Borelli dans son livre „De Vi Percussionis" de 1667 (voir p. 106 note 4 du Tome VI) écrit p. 3 et 4: „Transitus motus localis aut fit ab uno ad alium locum spatij mundani, aut in spatio relativo alicuius continentis vasis, ille appellabitur motus realis, & physicus, hic vero vocabitur motus relativus, licet multoties situm non mutet in loco, vel spatio universi, finge enim nautam à prora ad puppim navis ambulare, & interea navim totam à fluminis cursu æquali velocitate contrario motu ferri, constat nautam duobus motibus contrarijs agitatum inter se æqualibus proprio nempe, & ipsius navis semper in eodem situ spatii mundani consistere, tunc quidem negari non potest vere moveri licet ab uno ad alium locum universi non transferatur".

Le cas du matelot se promenant sur un vaisseau (ἐκ τῆς πρώρας εἰς πρύμναν) avec une vitesse égale et contraire à celle du vaisseau avait déjà été considéré dans l'antiquité par le philosophe sceptique Sextus Empiricus (ed. H. Mutschmann, Vol. II „Adversus dogmaticos". Lipsiæ, Teubner, 1914, p. 314—315). Sextus conclut, comme Borelli, que l'homme (ou plutôt un bâton qu'il porte) est certainement en mouvement quoiqu'il ne sorte en aucune façon du lieu où il se trouve (δύναται οὖν τι κινεῖσθαι μεταβατικῶς ὃ οὔτε καθ' ὁλότητα οὔτε κατὰ μέρος ἐκβαίνει τοῦ ἐν ᾧ ἔστι τόπου).

Huygens fait observer ailleurs (Portef. L p. 8) qu'apparemment Borelli prend ici la terre immobile par rapport au „spatium mundanum": „Borellus... pag. 3 verum realem ac physicum motum vocat cum transfertur corpus ab uno ad alium locum spatij mundani. Relativum qui in spatio relativo alicujus continentis vasis. mun-

motus circularis in uno corpore eſt motus reſpectivus partium, manente diſtantia propter vinculum.

dato corpore uno vel pluribus conjunctis [7]) quæ circa centrum aliquod moveantur, poteſt colligi, ex vi centrifuga, quantam celeritatem circularem acceperint. ſed et hæc relativa eſt inter illa corpora vel inter unius partes. non tamen cognoſcetur quantum veri motus partibus ſingulis inſit, hoc eſt reſpectu ſpatij, ut fingunt, immoti. nam et illorum arbitrio, quod circulariter movetur ſimul et recto motu totum, ſive ex pluribus junctum progredi poteſt quo itaque et partes feruntur. qui rectus motus quatenus ſit verus, nullo ſigno diſcerni poſſe fatentur. Itaque tantummodo hoc cognoſcetur quanta ſit circularis motio, hoc eſt quanta ſit relativa conjunctorum, vel partium unius corporis. non cognoſcetur etiam poſitis duobus conjunctis utrum eorum impreſſionem ab impellente acceperit, aut quantam ſingula.

[Fig. 4.]

Quærentibus quid ſit motus, hoc unum occurrit corpora moveri dici cum eorum inter ſe, vel ad alia quævis ſitus ac diſtantia mutatur. quieſcere cum ſervant inter

---

danum locum seu spatium pag. 4 vocat quod respectu terræ definitum est ac immotum. Ergo terra ipsi quiescit."

En comparant l'observation de Huygens avec le texte de Borelli on constate de nouveau (voir la note 6 de la p. 195) l'ambiguité des expressions „motus verus" et „vere moveri".

Notons encore que dans son ouvrage „Theoricæ Mediceorum Planetarum" de 1666 (ouvrage nommé à la p. 105 du Tome VI) Borelli parle au contraire, à la p. 6, d'un „mundanum spatium" par rapport auquel les étoiles fixes sont en repos, et cela comme d'un espace généralement adopté („Rursus omnes planetæ tres habent periodos, quorum prima dicitur restitutionis in eodem situ universi, seu mundani spatij, quæ quidem respectu fixorum syderum considerari solet").

[3]) Comparez la p. 209, premier alinéa.

[4]) I. G. Pardies „Discours du mouvement local" (1670); voir notre T. VII, p. 18, note 1. Dans le recueil „Oeuvres de mathématiques, contenant les élemens de géometrie, un discours du mouvement local, etc. par le P. I. G. Pardies S. J. Amsterdam, chez Pierre de Coup, 1725", on lit (chap. XIX du Discours nommé): „J'apelle vitesse absolue, celle qui se considère dans un corps comparé avec l'espace dans lequel il se meut; & vitesse respective celle qui se considére dans deux corps comparez ensemble, par laquelle vitesse ces deux corps s'aprochent ou s'éloignent mutuellement l'un de l'autre". Notons que Pardies, en employant le terme „vitesse absolue", ne songe apparemment pas à une vitesse de la terre par rapport à l'espace, puisqu'il dit dans la Préface de sa Statique qui est „une suite" du „Discours du Mouvement local" (p. 109 de l'édition nommée) que la Mécanique „affermit inébranlablement la terre sous nos pieds" et que „c'est elle qui donne le branle à tous les Cieux".

[5]) Comparez la note 22 de la p. 205 de ce Tome. Wallis ne parle point d'un mouvement „vrai" ou d'un mouvement „relatif". Il se contente de dire (p. 3008 de l'ouvrage cité): „Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terra positos, sive cum terra junctim ferantur omnia communi motu, sive una cum Terra quiescant".

[6]) Leçon alternative: „intuitu".

[7]) Leçon alternative: „cohærentibus".

ſe et ad alia ſitum et diſtantiam. Nihil adhuc aliud de motu concipimus. Jam quomodo ſpatium immotum concipere te dicis cum nihil aliud de quiete cognoſcas quam hoc ut relativa ſit ad alia corpora?

ſpatij quieſcentis hanc ideam habent, ut ſi a foco ad feneſtram accedam, manere dicant ſpatium juxta focum, è quo exceſſi, ſed nimirum cubiculi reſpectu.

Fruſtra inquiritur quis ſit verus motus iſte, cui bono enim? Noſtri vero principij, nempe motum non alium quam relativum eſſe, utilitas et conſequentiæ inſignes ſunt. Velut quod conceſſo corpus quieſcens perſeverare in quiete niſi ab alio pellatur, hinc ſequitur neceſſario, corpus libere motum pergere moveri eadem celeritate niſi ab alio impediatur. nihil enim intereſt inter ſimul libere moveri et ſimul quieſcere.

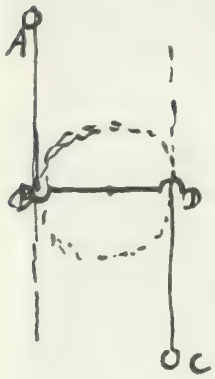
Corpus ex nova impreſſione novum motum concipere exiſtimant, etiam nullius alterius corporis reſpectu; inque ipſo motu violentum quid ineſſe putant, adeo quidem ut rapiditate ſumma vel diſperdi ac diſſolvi corpora poſſint [1]). at mihi nihil efficit in corpore quantacunque impreſſio, niſi ut ſitum ac poſitum ejus mutet aliorum relatione.

poſito definito numero fixarum inter ſe quieſcentium, oportet illis incertum eſſe, utrum maximo motu recto omnes una abripiantur, an quieſcant.

ſpatium mundanum infinite extenſum quieſcere concipiunt. nempe ſpatium abſque corporis ullius conceptu. Tale vero ſpatium non eſt ſubſtantia ſed nihil continet. Ergo illud nihil quieſcet.

moveatur corpus A in recta AB; corpus vero C in linea CD ipſi AB parallela [2]), hæc corpora inter ſe ac mutuo reſpectu moveri cognoſcimus. hoc tamen fatemini non cognoſci quatenus utrumque eorum vere moveatur. hoc eſt ſpatij mundani reſpectu.

[Fig. 5.]



Ponamus jam filum BD utrique AB, CD perpendiculare, atque eo loci poſitum, ut eodem momento A incidat in B, et C in D; ſintque unci quidam in B et D, quibus hæreant corpora utraque, quo fit ut rectus eorum motus in circularem vertatur quem tenſione ſua filum BD manifeſtum reddet [3]).

Cum igitur, antequam in uncos iſtos corpora A et B inciderent, ignoraretur quantum vero motu moverentur, nunc poſtquam inciderunt, hoc ſciemus ac definiemus quantum reſpectu ſpatij illius infiniti et immoti concitentur. Hoc certe dici non poteſt. Recte vero rem perpendenti manet tantum motus

[1]) Comparez les pages où Galilée dans son „Saggiatore" (Ed. Nazionale, VI, p. 337 et suiv.) polémise contre l'idée qu'il peut arriver „ch'una freccia fredda, tirata coll' arco, s'infuochi" et autres fantaisies de ce genre. Il est vrai que souvent les auteurs anciens ou contemporains de Galilée, qui discutent de pareils phénomènes, parlent hypothétiquement de l'„attrizion dell' aria" (p. 340).

reſpectivus qui fuit antea, nihilque aliud accidit niſi quod cum antea eſſet in lineis rectis parallelis [2]), nunc ſit in partibus circumferentiæ oppoſitis quæ ſimiliter inter ſe parallelæ dici poſſunt, diſtantia vero corporum quæ prius mutabatur continuè, nunc invariatum maneat propter vinculum. Ergo et in circulari ejusmodi motu nihil quoque niſi reſpectivus motus cognoſcitur, ſicut in motu ſolutorum. Idemque de corporis cujusvis unius circulari motu ſuper axem putandum eſt; in quo motus reſpectivus partium inter ſe atque etiam reſpectu centri cognoſcitur. quomodo autem ſe habeat ad ſpatium infinitum, nec apparet neque etiam reſpectum aliquem ad hoc habet. Si dicunt jam certo cognoſci vero circulari motu corpora AB moveri. Reſpondebo et antea cum in lineis rectis ferebantur verum inter ea motum [4]) me agnoviſſe, ſed debebas dicere quantum reſpectu ſpatij mundi moveantur.

VI [5]).

[?]

Cum itaque veriores ejusmodi communicati motus leges exquirere cepiſſem, ſubijt in primis cogitare quænam eſſent illa corpora quæ quieſcere aut moveri ſtatuebam. Pridem inquam credidi ſine dubitatione ulla, circumferri in ſeipſa Terram hanc diei ſpatio ac præterea circa ſolem quotannis. Ergo lapis ille quem quieſcere dico maximo tamen ac celerrimo motu eoque duplice abripitur, nec niſi eorum, quæ Terræ adhærent meique ſedentis aut ſtantis reſpectu, quieſcit...

Pergebam tamen mecum inquirere nunquidnam inter veros motus ac relativos [6]) intereſſet. Videbam vulgo omnibus qui de motu ſcripſere hæc diverſa dici, alium nempe motum corporis verum ac proprium alium eſſe reſpectu alterius cujuspiam. Motum verum ac Phyſicum eſſe cum transfertur corpus ab uno ad

---

[2]) Comparez toutefois sur le parallélisme des mouvements des deux corps la note 1 de la p. 220.

[3]) Leçon alternative: „prodet".

[4]) Comparez la Pièce III, p. 222, où il est dit: „Corpora quæ mutuo respectu moventur ea vere moventur".

[5]) La Pièce est empruntée aux deux premières pages de la feuille détachée, mentionnée à la p. 213 note 2.

[6]) Leçon alternative: „eos qui referuntur ad aliud".

alium locum ſpatij mundani. Itaque inquam locos iſtos tanquam revera immotos concipiunt. quid autem revera immobile eſſe dicemus, cum adhuc quid ſit verus motus quæramus? Nempe fortaſſe ſtellas fixas ac centrum ſolis vere quieſcere dicemus nos qui Copernici ſententiam ſequimur. at illæ quidem inter ſe, altera alterius omniumque reſpectu quieſcent, cum autem poſitæ ſint in ſpatio mundi infinite undiquaque extenſi (hoc enim nemo paulum intelligens negare poteſt [1])) cujusnam corporis alteriusve rei reſpectu omnes una quieſcere dicent? Spatij dicent mundani immoti. Putemus Cometam quempiam recta via per planetarum aut ſtellarum ſpatia ferri [2]) quemadmodum Keplero viſum eſt. numquid æque fixæ ſtellæ illius reſpectu atque ille ipſarum moveri dicendæ?

itaque in hoc tota quæſtio vertitur an ſpatium mundi infinitè extenſi, immotum ſit ac dici et intelligi poſſit. Viſum eſt autem mihi falſam hanc eſſe notionem. unde enim ideam immoti hauſimus niſi a quiete relativa corporum inter ſe? [3])

motus nempe ut volunt eſt tranſlatio e ſpatio mundano in aliud. quies mora in eodem ſpatio. Cujus rei? nempe corporis. cum igitur motus et quies non niſi corpori conveniant, quomodó jam immobilitatem ſpatio tribuunt, et quidem in infinitum undique extenſo. nam nec tranſlatio nec quies eſt niſi ſubſtantiæ alicujus. quomodo igitur conveniet quies ſpatio vacuo in quo nihil exiſtit?

VII [4]).

[?] [5])

In motu libero præſentibus corporibus inter ſe quieſcentibus certo cognoſcuntur directiones et in his celeritates per quas mutatio diſtantiæ explicetur et horum opera etiam circulantium celeritas definitur. Illis ſublatis corporibus, difficilius

---

[1]) Comparez cependant les p. 190 note 1 et 191 note 10 (opinions d'Aristote et de Galilée).

[2]) Voir la p. 210 du Tome V.

[3]) Comparez J. M. C. Duhamel (ouvrage cité dans la note 4 de la p. 215), p. XVIII: „... les hommes n'aperçoivent que des repos ou des mouvements relatifs, et ne pourraient arriver que par extension à rêver un repos ou un mouvement absolu... Abandonnons... cette fausse notion".

[4]) La Pièce est empruntée à la deuxième et à la troisième page d'une feuille détachée (Portef. L, p. 20 et 21).

[5]) On voit apparaître ici la distinction entre le *poid* d'un corps et sa *masse*, sans doute sous l'influence des „Principia" de Newton.

hoc cognoſcitur in liberis ſed motus circularis duorum vel plurium vinculo conjunctorum, vel partium unius corporis, deprehenditur ex vi centrifuga. contra eos qui verum motum hunc eſſe volunt. dico non eſſe niſi reſpectivum. non enim potes dicere centrum oſcillationis quieſcere in mundo, ſed etiam reſpective tantum ad alia corpora.

an centrum gravitatis non melius dicatur centrum potentiæ cum gravitas tollatur.

auferre gravitatem [5]) verſus terram cogitatione, quod non tollit molem [5]) et materiam reſiſtentiamque. tunc directio diverſa æquè in æthere [6]) atque ſuper menſa. Terra ipſa tollatur.

Exiſtimant omnes qui de motu egerunt, quorum quidem ſcripta videre mihi contigit, eſſe motum quendam verum, alium vero apparentem, qui æſtimatur reſpectu aliorum corporum quæ ut quieſcentia conſiderantur. verum eſſe cenſent, cum corpus locum mutat in ſpatio mundano quod immobile eſſe ſtatuunt. Ego autem contra nullum alium eſſe motum corporum arbitror quam mutuo reſpectu. Hunc eſſe verum. Illum autem quem iſti verum dicunt, non ſolum cognoſci non poſſe, ſed neque omnino eſſe in rerum natura.

Hoc ſpatium ita ſolum abſque ullo corpore conſideratum, quomodo quieſcere intelligi poſſit non video. Cum quies et motus non ſit niſi corporum, et utriusque idea ab his ſolis exorta ſit. Nam ſi ſpatij quies aut motus eſſe aliquid dici poteſt, illius ſpatij erunt, quod à corpore occupatur, vel quod a corpore includitur, ut ſi amphoræ ſpatium una cum amphora quieſcere aut moveri dicamus. At ſpatio illi infinito et inani neque motus neque quietis idea aut appellatio convenit.

---

[6]) C'est la seule fois qu'on rencontre le mot „æther" dans les Pièces concernant la question du „mouvement absolu". Ailleurs (voir p. e. le „Traité de la Lumière", publié en 1690), Huygens appelle „éther" ou „matière éthérée" la matière fine composée de „particules" dans un état d'„agitation rapide" qui remplit l'espace. Ici (quoique le sens *littéral* puisse être le même que dans le „Traité de la Lumière") le mot „æther" semble désigner le „spatium inane" (dernier alinéa de cette Pièce) lui-même. Dans l'absence de la terre une direction (c. à. d. la direction d'un mouvement, comparez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 224) peut être déterminée „æque... atque super mensa", c. à. d. de la même manière qu'au-dessus d'une table (comparez les trois derniers alinéas de la p. 218 et les deux premiers alinéas de la p. 219); il s'agit donc de directions par rapport à un groupe de corps libres immobiles entre eux.

VIII[1]).

[?]

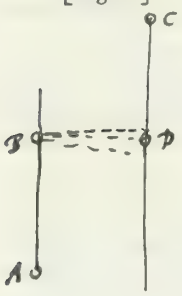
Motus inter corpora relativus tantum eſt.

Is producitur impreſſione in alterum eorum vel in utrumque ſed effecto jam motu non poteſt cognoſci in quodnam eorum impreſſio facta ſit. Imo idem prorſus utravis impreſſione effectum eſt.

Motus verus et ſimplex unius alicujus totius corporis nullo modo concipi poteſt quid ſit, nec differt a quiete ejus corporis.

Diu putavi in circulari motu haberi veri motus κριτηριον ex vi centrifuga. Etenim ad cæteras quidem apparentias idem fit ſive orbis aut rota quæpiam me juxta adſtante circumrotetur, ſive ſtante orbe illo ego per ambitum ejus circumferar, ſed ſi lapis ad circumferentiam ponatur projicietur circumeunte orbe, ex quo verè tunc et nulla ad aliud relatione eam moveri et circumgyrari judicari exiſtimabam. Sed is effectus hoc tantummodo declarat impreſſione in circumferentiam facta partes rotæ motu relativo ad ſe invicem in partes diverſas impulſas fuiſſe. Ut motus circularis ſit relativus partium in partes contrarias concitatarum ſed cohibitus propter vinculum aut connexum. an autem corpora duo inter ſe relative moveri poſſunt quorum eadem manet diſtantia? Ita ſane dum diſtantiæ incrementum inhibetur. contrarius vero motus relativus per circumferentiam viget.

[Fig. 6.]



poteſt cognoſci an regula libere et tota in unam partem moveatur (vel quieſcat nam idem eſt) an partes ejus contrariorum motuum impreſſionem acceperint. corpus A per rectam ſeu ſecundum regulam AB moveatur. corpus C per rectam parallelam CD. cum A accedit ad B et C ad D, moventur utique mutuo reſpectu, et tamen diſtantiam pauxillum et veluti nihil mutant. Sic in circulari motu colligatorum res ſe habet.

Plerique verum corporis motum ſtatuunt cum ex loco certo ac

---

[1]) La Pièce est empruntée à la première page d'une feuille détachée (Portef. L, p. 24),

[2]) Descartes „Les Principes de la Philosophie", II § 29 (T. IX des Œuvres publ. par Adam et Tannery, p. 78): „... nous ne sçaurions conceuoir que le corps AB soit transporté du voisinage du corps CD, que nous ne sçachions aussi que le corps CD est transporté du voisinage du corps AB, & qu'il faut tout autant d'action pour l'vn que pour l'autre".

fixo in ſpatio mundano transfertur. malè. nam cum infinite ſpatium undique extenſum ſit quæ poteſt eſſe definitio aut immobilitas loci? Stellas affixas, in Copernicano ſyſtemate forſan revera quieſcentes dicent. Sint ſane inter ſe immotæ ſed omnes ſimul ſumtæ cujus alterius corporis reſpectu quieſcere dicentur, vel qua in re different a celerrime motis in partem aliquam? nec quieſcere igitur corpus nec moveri in infinito ſpatio dici poteſt, ideoque quies et motus tantum relativa ſunt.

Recte ſatis Carteſius artic. 29 part. ſecundæ. niſi quod eandem vim et actionem requiri dicit ſive ut AB transferatur ex vicinia CD ſive ut hoc ex illius vicinia [2]). quod tunc quidem verum cum AB æquale CD, alias haudquaquam. male etiam quod immediate contingentium reſpectu motum corporis definit [3]). quidni enim etiam longiſſime diſſitorum? [4])

---

[3]) „Les Principes de la Philosophie", II § 25 (T. IX des Œuvres publ. par Adam et Tannery, p. 76): „... si, au lieu de nous arrester à ce qui n'a point d'autre fondement que l'vsage ordinaire, nous desirons sçavoir ce que c'est que le mouuement selon la verité, nous dirons, afin de luy attribuer vne nature qui soit determinée, qu'il est *le transport d'vne partie de la matiere ou d'vn corps, du voisinage de ceux qui le touchent immediatement, et que nous considerons comme en repos, dans le voisinage de quelques autres*".

[4]) On peut p. e. définir la rotation de la terre par rapport aux étoiles fixes. Voir la p. 326 de ce Tome, note 4, troisième alinéa.

Comparez J. M. C. Duhamel (ouvrage cité dans la note 4 de la p. 215), p. XIX: „Le système des étoiles est le plus considérable et le moins variable qu'il soit donné à l'homme de connaître: c'est à ce système, que l'on peut sans inconvénient considérer comme immuable, qu'il est convenable de rapporter les grands mouvements, comme ceux de la terre et des planètes".

DE VI CENTRIFUGA.

Avertiſſement.

Dans l'Avertiſſement précédent (p. 189—200) nous avons parlé à pluſieurs repriſes des idées émiſes par Huygens dans le cours de ſa vie ſur le mouvement circulaire et la force centrifuge, en connexion avec ſa conception du monde et de l'eſpace. On a vu, tant dans cet Avertiſſement que dans les pages écrites par Huygens lui-même vers la fin de ſa vie (p. 213—233 de ce Tome) que les différents philoſophes qui s'intéreſſaient aux queſtions cosmiques, avaient des opinions diverſes ſur la nature, abſolue ou relative, du mouvement. Nous aurions pu ajouter que les discuſſions ſur la nature de l'eſpace et des queſtions qui s'y rattachent continuèrent après la mort de Huygens [1]), qu'aujourd'hui encore, dans la première moitié du vingtième ſiècle, la queſtion de l'exiſtence ou de la non-exiſtence du mouvement abſolu a été vivement débattue et que dans ce débat le problème de la nature de la force centrifuge qui cauſe p. e. l'aplatiſſement de la terre et la variation de la gravité à ſa ſurface joue un certain rôle. Cette dernière

[1]) Voir p. e. quelques écrits de Leibniz d'une part et de Clarke, ami de Newton, d'autre part dans le „Recueil [par Des Maizeaux] de diverses Pièces, sur la Philosophie, la Religion naturelle, l'Histoire, les Mathématiques &c.", seconde édition, à Amsterdam, chez François Changuion, MDCCXL. Mais ici la discussion, quoique vouée en partie à la question du „mouvement absolu", n'a pas un caractère exclusivement scientifique.

queſtion a intéreſſé Huygens depuis 1659 juſqu'à la fin de ſa vie. Dans le Manuſcrit „De Vi Centrifuga", la variation de la gravité due à la rotation de la terre eſt mentionnée une ſeule fois, au § 4 (Appendice I, p. 304); parmi les Appendices ultérieurs auſſi on en trouvera un (Appendice VI, p. 323—326), où ce ſujet eſt entamé, les recherches plus minutieuſes ſur ce ſujet étant réſervées pour un des Tomes ſuivants.

Le préſent Traité, écrit déjà en 1659, n'a jamais été publié par Huygens; il n'a paru qu'en 1703, huit ans après ſa mort, dans les „Opuſcula poſtuma", par les ſoins des profeſſeurs de Volder et Fullenius, à qui Huygens dans ſon teſtament avait légué cette tâche. Il eſt vrai qu'il n'avait nommé expreſſément comme devant être publiés que la „Dioptrica", le Traité „De Motu Corporum ex Percuſſione" et le Traité „De Formandis Poliendiſque Vitris", mais les éditeurs nommés des „Opuscula poſtuma" diſent avec raiſon, à la deuxième page de leur préface, qu'ils ont cru agir dans l'eſprit de l'auteur en y ajoutant quelques autres traités parmi leſquels celui „De Vi Centrifuga".

Les éditeurs ont interverti l'ordre des propoſitions et incorporé dans le Traité quelques-unes de celles publiées par Huygens en 1673 à la fin de ſon „Horologium oſcillatorium" [1]) avec des démonſtrations rédigées par eux-mêmes. Une ſeule Propoſition, la dix-ſeptième et dernière (p. 299), a été rédigée par eux, mais la démonſtration eſt de Huygens. Nous avons jugé à-propos de laiſſer au Traité la forme que les éditeurs lui ont donnée, mais nous avons mis entre crochets leurs additions au Traité primitif. Les notes indiquent en outre le texte primitif là où les éditeurs y ont apporté des modifications, peu importantes d'ailleurs.

Voici la liſte complète des additions:

1) Les mots „Propoſitio I", „Propoſitio II", etc. juſqu'à la dernière „Propoſitio XVII";
2) Les mots „Lemma I" et „Lemma II" avant la Prop. VII;
3) L'énoncé de chacune des ſix Prop. VII, XII, XIII, XIV, XV et XVI, emprunté à l'„Horologium oſcillatorium", et la démonſtration, rédigée par les éditeurs, de chacune de ces Propoſitions, excepté la dernière.
4) L'énoncé de la Prop. XVII.

---

[1]) Nous avons reproduit les treize Propositions de l'„Horologium oscillatorium" dans l'Appendice III qui suit (p. 315—318).

Le Manuſcrit de Huygens (voir p. 254, note 1) débute par les paragraphes que nous avons réunis dans l'Appendice I (p. 302—311). Tous ces paragraphes font défaut dans le Traité tel qu'il a été publié par les éditeurs, excepté le § 9 qu'ils ont intercalé dans le Traité ſous le nom de „Lemma I" avant la Prop. VII (p. 281).

L'interverſion de l'ordre des propoſitions par les éditeurs avait pour but, comme ils le diſent dans leur préface, de rendre le Traité plus conforme à l'enſemble des Propoſitions publiées dans l'„Horologium oſcillatorium". En effet, comme les notes aux p. 315—318 l'indiquent, toutes les Propoſitions de l'„Horologium oſcillatorium" (la rédaction, il eſt vrai, eſt quelquefois un peu différente) ſe retrouvent dans le même ordre dans le Traité „De Vi Centrifuga"; excepté dans le cas des Prop. II et III qui ont échangé leurs places. Le Traité contient de plus les Prop. VI, IX, XI et XVII.

Il ſemble que, dans leurs démonſtrations des Prop. VII, XII, XIII, XIV et XV, les éditeurs ſe ſoient inſpirés des raiſonnements de Huygens que contenait le Manuſcrit A; voir à ce propos les pp. 320, note 1, 321, quatrième et cinquième alinéas de la note 4 de la p. 320, et 325, note 6. C'eſt peut-être aux pages enlevées au Manuſcrit A, mentionnées dans ces notes, qu'ils font alluſion dans leur préface lorsqu'ils diſent qu'ils ont démontré les Propoſitions nommées „ex fundamentis ab Ill. Hugenio poſitis". Mais, comme on peut le voir dans l'Appendice V (p. 320) pour le cas de la démonſtration de la Propoſition XII — la ſeule des démonſtrations que contenait le Manuſcrit A, dont une partie ait été conſervée — ils ont donné à ces démonſtrations la forme qui leur paraiſſait convenable: ils ont rendu la démonſtration de la Prop. XII moins excluſivement géométrique en y introduiſant l'expreſſion $\sqrt{2}$. Leurs démonſtrations des Prop. XIII et XIV ont également un caractère moitié géométrique moitié algébrique, tandis que toutes les démonſtrations de Huygens que le Traité contient ſont excluſivement géométriques [2]).

D'où eſt venue à Huygens l'idée d'examiner à fond la nature du mouvement circulaire? La tradition, l'obſervation, et la mécanique pratique l'y ont amené. La

[2]) Dans le § 15 du Manuscrit (voir la p. 309) le raisonnement de Huygens a une forme algébrique. Ce § n'était donc probablement pas destiné à être publié sous cette forme.

rotation apparente de la voûte céleſte [1]) a, depuis Platon et Ariſtote, et bien avant eux, conduit les penſeurs à voir dans le mouvement circulaire uniforme quelque choſe de fort remarquable. Quoique Huygens, grâce à Archimède, à Descartes, à Galilée et à ſon éducation entière auſſi bien qu'à la tournure positive de ſon eſprit, ſoit bien éloigné de toute vénération pour les idées ſcolaſtiques, il n'y a pourtant pour lui comme pour Ariſtote guère que deux ſortes de mouvements naturels: le mouvement droit et le mouvement circulaire [2]). Dès lors, examiner la nature du mouvement droit et du mouvement circulaire, c'eſt pour ainſi dire examiner généralement la nature du mouvement. Galilée lui auſſi, quoiqu'il ait découvert la nature parabolique de la courbe décrite par un objet lancé en l'air, ne parle pas du mouvement curviligne en général et ſe borne presque toujours à conſidérer le mouvement rectiligne et le mouvement circulaire uniforme: on a remarqué qu'il évite de faire mention de la nature elliptique des orbites des planètes, découverte par Kepler, quoiqu'il connaiſſe fort bien ſes ouvrages et que ſes diſciples ne s'impoſent pas la même reſtriction [3]). Ce ſont ſurtout Galilée et Descartes qui, avant Huygens, ont émis des idées juſtes et fécondes ſur la rotation. Avant eux Kepler dans ſon „Epitome Aſtronomiæ Copernicanæ" réfute brièvement l'opinion de ceux qui penſent que, ſi la terre tournait, les objets mobiles ſeraient lancés en l'air: il dit qu'il y a entre la terre et une roue tournante cette différence que dans le premier cas les objets ſont pour ainſi dire attachés à la terre par une vertu attractive [4]), mais il ne cherche nullement à déterminer la grandeur

---

[1]) Quand on ne songe qu'à la mesure du temps, sujet qui préoccupait Huygens depuis quelques années avant 1659, il n'y a aucune différence sensible entre un mouvement circulaire de la voûte céleste d'une part et la rotation de la terre de l'autre. En écrivant les paroles citées à la p. 194, note 5, Huygens pensait peut-être avant tout à la mesure du temps.

[2]) Dans le „Discours de la Cause de la Pesanteur", publié en 1690, Huygens écrit: „À regarder simplement les corps, sans cette qualité qu'on appelle pesanteur, leur mouvement est naturellement ou droit ou circulaire. Le premier leur apartenant lors qu'ils se meuvent sans empeschement: l'autre quand ils sont retenus autour de quelque centre, ou qu'ils tournent sur leur centre mesme". Ajoutons, pour éviter tout malentendu, que Huygens ne songe nullement à faire, comme Aristote, une distinction entre les mouvements naturels (κατὰ φύσιν) et les mouvements violents ou contre-nature (παρὰ φύσιν); d'ailleurs chez Huygens le terme „mouvement droit" désigne le mouvement rectiligne uniforme, tandis que chez Aristote le mouvement rectiligne accéléré des corps qui tombent est un mouvement naturel.

[3]) L. Olschki, „Galilei und seine Zeit", Halle (Saale), Max Niemeyer Verlag, 1927, p. 354—357.

[4]) J. Kepler, „Epitome Astronomiæ Copernicanæ", Lib. I, § 7, p. 137 de l'édition nommée à la p. 192, note 1: „Lapides virtute attractoria ad terram sunt alligati".

de la „vertu" centrifuge résultant de la rotation. Galilée va plus loin. Il part comme Kepler de la considération de la terre tournante, et il enseigne que la grande vitesse linéaire qu'un objet à la surface du globe terrestre acquiert en vertu du mouvement diurne peut parfaitement ne pas suffire pour lancer cet objet en l'air parce que la cause de la projection („causa della proiezione" ou „dello scagliamento") devient moindre, pour une même vitesse linéaire, à mesure que le rayon de la circonférence décrite s'accroît [5]). La figure de Galilée qu'on trouve dans la „Giornata seconda" du „Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" [6]) ressemble beaucoup à la Fig. 4 de la p. 306 de ce Tome. Galilée considère, comme Huygens au § 8 à la page nommée, deux objets décrivant des circonférences concentriques avec des vitesses linéaires égales; et il indique dans la figure pour chacun des deux objets (ce qui aurait également dû être indiqué dans la figure de Huygens) l'écart de la tangente correspondant à la courbe décrite dans un temps déterminé assez court [7]). Il prétend ensuite que les forces (*centripètes*) qui font dévier les mobiles de la tangente sont d'autant plus grandes que les écarts de la tangente sont plus considérables [8]). Ceci s'accorde parfaitement avec la théorie de Huygens. Galilée est allé aussi loin qu'on pouvait aller sans donner une définition précise de la „forza" centripète ou centrifuge [9]).

Après Galilée, Descartes, que Huygens nomme à ce propos dans son Discours de la Cause de la Pesanteur (voir la note 4 qui commence à la p. 327), parle à plusieurs reprises du mouvement d'une pierre dans une fronde. Après avoir

---

[5]) Edizione Nazionale, VII, p. 238.

[6]) Edizione Nazionale, VII, p. 242.

[7]) Dans la Fig. 11 de la p. 275 de ce Tome FE est l'„écart de la tangente". Le mobile qui tourne dans la circonférence parcourt l'arc BF dans le même temps dans lequel il aurait parcouru (abstraction faite de la pesanteur) la droite BE s'il avait quitté la circonférence au point B. Le point E ne peut être considéré, en parlant strictement, comme situé sur le prolongement du rayon AF que lorsque l'arc BF et la longueur BE qui lui est égale sont infiniment petits.

[8]) Edizione Nazionale, VII, p. 243 „... a deviare un mobile dal moto dove egli ha impeto, non ci vuol egli maggior forza o minore, secondo che la deviazione ha da esser maggiore o minore? cioè, secondochè nella deviazione egli dovrà nell' istesso tempo passar maggiore o minore spazio?"

Un peu plus loin (p. 244) on trouve cependant la proposition inexacte que pour deux roues de rayons inégaux qui tournent avec la même vitesse angulaire les forces centrifuges sont égales. C'est sans doute à cette erreur que Huygens fait allusion dans les paroles citées dans la note 3 de la p. 251 qui suit.

[9]) Huygens considère surtout la force *centrifuge*, Galilée au contraire la force *centripète* (sans se servir de ce terme; comparez la note précédente). Voir sur ce sujet la suite du présent Avertissement (p. 246 et suiv.).

établi „la premiere loy de la nature: Que chaque chose demeure en l'estat, qu'elle est, pendant que rien ne le change", Descartes dit: „La seconde loy que je remarque en la nature, est que chaque partie de la matiere, en son particulier, ne tend jamais à continuer de se mouuoir suiuant des lignes courbes, mais suiuant des lignes droites... tout corps qui est meu en rond, tend sans cesse à s'esloigner du cercle qu'il décrit. Et nous le pouuons mesme sentir de la main, etc." [1]). Plus loin il considère aussi une figure analogue à la figure nommée de Galilée et dit à propos de la pierre tournante que „si, au lieu de considerer toute la force de son agitation, nous prenons garde seulement à l'vne de ses parties, dont l'effet est empesché par la fonde [2]), & que nous la distinguions de l'autre partie, dont l'effet n'est point ainsi empesché", nous dirons que la pierre „fait seulement effort pour s'éloigner du centre" suivant le prolongement du rayon [3]). Ici, c'est bien la force *centrifuge* dont il est question. Ailleurs il s'exprime comme suit: „sçachant que l'vne des parties de son inclination, à sçavoir celle qui la porte suivant le cercle... n'est nullement empeschée par cette fronde, vous verrez bien qu'elle ne trouve de resistance que pour l'autre partie... et par consequent, qu'elle ne tend, c'est à dire qu'elle ne fait effort, que pour s'éloigner directement du centre [4])". Ici la force centripète, elle aussi, est mentionnée sous le nom de „resistance". Et dire que la pierre „fait tendre la corde" [5]), n'est ce pas aussi indiquer qu'il y a une force dans chacun des deux sens?

Mais ce n'est pas seulement grâce à l'observation du mouvement diurne et aux écrits de ses prédécesseurs sur la mécanique céleste ou terrestre que Huygens s'intéresse au mouvement circulaire; avant la composition du Traité „De Vi Centrifuga" il songe déjà à la construction d'horloges à pendule conique. Son invention de l'horloge à pendule ordinaire a été octroyée en 1657 [6]). On trouve dans le Manuscrit A un projet d'horloge à pendule conique datant du 5 octobre 1659 [7]);

---

[1]) „Les Principes de la Philosophie", II, §§ 37 et 39 (T. IX de l'édition d'Adam et Tannery, p. 84 et p. 86).

[2]) Fonde (lat. funda), forme ancienne du mot „fronde".

[3]) Même ouvrage, III, § 57 (T. IX de l'édition d'Adam et Tannery, p. 131).

[4]) „Le Monde", chapitre XIII (T. XI de la même édition, p. 85).

[5]) Même ouvrage, chapitre VII (Même Tome, p. 44).

[6]) Voir la p. 237 du Tome II.

[7]) Manuscrit A, p. 175: „Inventum die 5 Oct. 1659". Dans une lettre à son père (T. VII, p. 391) Huygens dit avoir inventé l'horloge à pendule conique en 1658.

il eſt vrai que rien n'indique (ce qui pourtant n'eſt pas impoſſible [8])) que l'auteur de ce projet ait obſervé en octobre 1659 [9]) la marche d'un pendule tel que le pendule deſſiné; il n'en eſt pas moins certain que Huygens s'intéreſſe auſſi au mouvement circulaire en ſa qualité d'homme pratique, d'inventeur d'inſtruments capables de meſurer le temps le plus exactement poſſible.

Réſumons maintenant brièvement le contenu du Traité tel qu'il a été publié par les éditeurs de Volder et Fullenius en 1703 et réédité d'abord par 's Graveſande dans les „Opera reliqua", Vol. II, de 1728, enſuite par nous; ſans cependant exclure de cet aperçu la partie du Manuſcrit publiée par nous dans l'Appendice I.

L'expérience fait voir d'une part que les corps libres tombent d'un mouvement uniformément accéléré, d'autre part qu'un corps ſuſpendu à un fil exerce une traction ſur ce fil et ſur la main qui le tient. On peut donc dire qu'un corps exerce une traction ou force ſur un fil qui le retient lorsque ce corps a une tendance à ſe mouvoir dans la direction du prolongement du fil d'un mouvement uniformément accéléré; et l'on peut admettre que la force exercée eſt la même pour des corps égaux [10]) ayant une tendance à ſe mouvoir avec la même accélération [11]), ne fût-ce que durant un temps infiniment petit [12]).

Or, ce qui détermine la tenſion du fil et la force éprouvée par celui qui le tient, ce n'eſt pas néceſſairement la tendance au mouvement intégral que prendrait le mobile s'il était délivré de toute entrave; ce qui importe c'eſt la tendance au mouvement accéléré *par rapport au fil tendu.* Ainſi dans le cas d'un objet placé ſur un plan incliné (parfaitement liſſe) et retenu par un fil parallèle à ce plan [13]),

---

[8]) Comparez les notes 2 et 5 de l'Appendice IV qui suit (p. 319): le 15 nov. 1659 Huygens dit avoir déterminé la valeur de la constante g „ex motu conico penduli".

[9]) Dans la „Correspondance" de Huygens (nos. T. I—X) la construction d'une horloge à pendule conique n'est mentionnée que vers la fin de 1667. Le 4 déc. 1667 (voir la p. 167 du du T. VI) Huygens écrit à son frère Lodewijk: „Ie suis maintenant apres a faire construire une autre maniere d'horloges, ou mesme deux autres, dont l'un est avec un pendule qui tourne en rond", et le 12 oct. 1668 (voir la p. 267 du même Tome) au frère Constantijn: „I'en ay ici une du mouvement circulaire de ma nouvelle invention qui va assez bien, et sans bruit".

[10]) „Mobilia æqualia"; voir p. e. la Prop. I à la p. 267.

[11]) P. 259, premier alinéa.

[12]) Huygens parle généralement d'un temps très petit ou d'un temps arbitrairement petit, et de même, s'il y a lieu, d'un espace très petit ou arbitrairement petit. Une seule fois cependant (p. 277, l. 20) on rencontre l'expression plus moderne „infinitè parva".

[13]) P. 305, § 5.

le mouvement accéléré qui importe eſt celui que prendrait l'objet ſi le fil était rompu mais que le plan demeurait en place; ſi l'accélération de ce mouvement le long du plan eſt p. e. le quart de celle d'un corps tombant verticalement, la main qui tient le fil éprouvera une force égale à un quart du poids du corps. De même la grandeur de la force éprouvée par un homme attaché à une roue tournante près du bord [1]) et tenant en main un fil très court auquel un corps eſt attaché, dépendra du mouvement uniformément accéléré [2]) que le corps acquerrait au tout premier moment *dans la direction du fil*, ſi le fil était rompu (dans ce dernier cas on fait abſtraction de la peſanteur). Il eſt vrai que la direction du fil n'eſt pas invariable pour un ſpectateur qui ne participe pas à la rotation, mais pour l'homme attaché à la roue le fil eſt conſtamment dirigé ſuivant le prolongement du rayon correſpondant à l'endroit qu'il occupe ſur la roue, et lorsque le fil eſt rompu il voit au tout premier moment l'objet s'éloigner d'un mouvement accéléré *en reſtant ſur le prolongement du rayon* [2]); c'eſt donc bien dans la direction de ce prolongement qu'il doit ſentir une traction lorsque le fil n'eſt pas encore rompu [3]). Le même raiſonnement eſt applicable au cas où l'objet tournant eſt attaché par un fil non pas à un point près du bord d'une roue, mais au centre de la rotation lui-même. Or, on ſait que les eſpaces parcourus dans des temps égaux ſont entre eux comme les accélérations; le rapport de la force centrifuge à la force de la gravité ſera donc égal à celui de l'écart très petit ou plutôt infiniment petit de la tangente au chemin parcouru dans le même temps par le corps lorsqu'il tombe librement [4]). Voilà pour la grandeur abſolue de la force centrifuge. En comparant entre eux les différents écarts de la tangente pour différents mobiles dans des temps égaux, on trouve les rapports des forces centrifuges correſpondantes, ce que l'on peut faire même avant d'avoir déterminé la grandeur abſolue d'une d'elles [5]).

---

[1]) P. 261, l. 4.

[2]) Ce mouvement peut en effet être considéré comme uniformément accéléré au tout premier moment; voir le troisième alinéa de la p. 265.

[3]) Deuxième alinéa de la p. 265.

[4]) Voir à la p. 275 la Prop. V, d'après laquelle la force centrifuge (comparez la note 1 de la p. 274) est égale à la force de la gravité, lorsque l'écart de la tangente (FE) est égal à l'espace que le corps parcourrait en tombant librement (évidemment avec une vitesse initiale nulle) durant le même temps dans lequel il parcourt l'arc BF correspondant à l'écart FE.

[5]) Prop. I—IV (p. 267—275), et §§ 5—8 (p. 305—306). Dans la partie du Manuscrit publiée dans l'Appendice I qui suit, la grandeur absolue de la force centrifuge est indiquée dans le § 1

En lisant les énoncés de la Prop. V. (p. 275) et du § 1 (p. 303) on verra que Huygens n'a pas eu l'intention de déterminer la grandeur de la force centrifuge par une formule algébrique, mais que notre formule

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

(voir la note 8 de la p. 303) correspond à ses énoncés, si l'on consent à adopter l'expression mg pour la force de la gravité, c. à. d. à appeler m le rapport de cette force à l'accélération de la pesanteur.

On peut regarder la Prop. VI (p. 277) comme une application de la Proposition précédente.

La Prop. VII (p. 281) considère l'isochronisme des révolutions d'un mobile parcourant diverses circonférences de cercle horizontales à l'intérieur d'un conoide parabolique ou paraboloide de révolution à axe vertical [6]).

Dans les Prop. IX—XV (p. 287—295) Huygens et les éditeurs considèrent le mouvement des pendules coniques.

Enfin, les Prop. XVI et XVII (p. 295—301) traitent la tension que le fil d'un pendule simple éprouve pendant le mouvement grâce à l'existence de la forcecentrifuge.

Inutile de dire que toutes ces Propositions peuvent être démontrées plus facilement en partant de la formule $F = \frac{mv^2}{r}$.

La terminologie de Huygens, quoiqu'il s'exprime fort clairement, n'est pas absolument constante. Le mot „*gravitas*" indique parfois la force de la gravité (le poids), p. e. dans le Lemma I de la p. 281, parfois aussi la „*quantitas solida*" (la masse), p. e. à la p. 267, l. 13. Une force ne s'appelle pas seulement „*vis*", mais aussi „*potentia*" (p. e. dans le Lemma II de la p. 281); il parle de l'„*impetus* circulationis" (p. 307, l. 19), du „*conatus* centrifugus" (p. e. p. 297, avant-dernière ligne). Généralement un corps exerce une force lorsqu'il a une tendance

(p. 303) qui précède la détermination du rapport des forces centrifuges dans les cas spéciaux. Ce § 1, autrement que la Prop. V, est un énoncé sans démonstration.

[6]) Huygens a sans doute cherché les conditions de l'isochronisme du mouvement circulaire dans le but d'en faire une application dans la construction d'horloges à pendule conique; comparez aussi le § 14 de la p. 308.

(„conatus") au mouvement, mais qu'un fil ou autre entrave l'empêche de ſe mouvoir dans le ſens de cette tendance. Huygens dit pluſieurs fois que la force ou tendance centrifuge eſt du même genre que la force ou tendance de la gravité (p. e. p. 297, l. 7 d'en bas „proinde ſimilem"; p. 277, l. 25 „æqualem plane"; dans ce dernier cas, autrement que dans le premier, les grandeurs des deux forces ſont les mêmes). Comme la „gravitas" (poids), le „conatus" en général eſt donc conſidéré comme une grandeur proportionnelle à la „quantitas ſolida". Ainſi que nous l'avons dit, le „conatus centrifugus" ou „vis centrifuga" doit être pris pour un objet (ou point matériel) tournant autour d'un centre „reſpectu radii in quo ſitus eſt" (p. 265, l. 5).

Les raiſonnements de Huygens (et des éditeurs) dans le Traité „De Vi Centrifuga" paraiſſent ſi impeccables qu'après la lecture du Traité on eſt tenté de ſe demander comment il eſt poſſible que dans des temps plus modernes pluſieurs ſavants ont vu une difficulté logique dans le ſujet qui nous occupe. C'eſt pourquoi nous donnerons la parole à H. Hertz pour expoſer cette difficulté qui eſt cependant bien réelle.

„Wir ſchwingen einen Stein an einer Schnur im Kreiſe herum; wir üben dabei bewuſſtermaſſen eine Kraft auf den Stein aus; dieſe Kraft lenkt den Stein beſtändig von der geraden Bahn ab... Nun aber verlangt das dritte Geſetz [la troiſième loi de Newton d'après laquelle l'action eſt égale à la réaction [1])] eine Gegenkraft zu der Kraft, welche von unſerer Hand auf den Stein ausgeübt wird. Auf die Frage nach dieſer Gegenkraft lautet die jedem geläufige Antwort: es wirke der Stein auf die Hand zurück infolge der Schwungkraft, und dieſe Schwungkraft ſei der von uns ausgeübten Kraft in der That genau entgegengeſetzt gleich. Iſt nun dieſe Aufdrücksweiſe zuläſſig?... In unſeren Bewegungsgeſetzen [que Huygens ne connaiſſait pas encore] war die Kraft die *vor* der Bewegung vorhandene Urſache der Bewegung [c'eſt en effet la conception de Newton, exprimée dans les deux premières lois]. Dürfen wir, ohne unſere Begriffe zu verwirren, jetzt auf

[1]) Les trois „Axiomata sive Leges Motus" de Newton sont (texte de l'édition originale):

1) Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare,

2) Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur,

3) Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

einmal von Kräften reden, welche erſt durch die Bewegung entſtehen, welche eine Folge der Bewegung ſind? [c'eſt la conception de Galilée, de Descartes et de Huygens, antérieure aux „Principia" de Newton]... es bleibt uns nichts übrig als zu erläutern: die Bezeichnung der Schwungkraft als einer Kraft ſei eine uneigentliche... Aber wo bleiben alsdann die Anſprüche des dritten Geſetzes, welches eine Kraft fordert, die der tote Stein auf die Hand ausübt und welches durch eine wirkliche Kraft, nicht durch einen bloſſen Namen befriedigt ſein will" [2]).

On voit que cette difficulté logique n'exiſtait pas encore lorsque Huygens écrivit ſon Traité. Elle apparaît lorsqu'on part des lois de Newton. Il eſt vrai que cette difficulté ne doit pas nous empêcher de nous ſervir du ſyſtème de Newton. Hertz lui même ajoute [3]): Wir haben in dieſen Ausführungen die Zuläſſigkeit des betrachteten Bildes ſo ſtark verdächtigt, dass es ſcheinen muss, als ſei es unſere Abſicht die Zuläſſigkeit zu beſtreiten und ſchlieſſlich zu verneinen. Soweit geht indes unſere Abſicht und unſere Ueberzeugung nicht". Cependant il y voit des „logiſchen Unbeſtimmtheiten" qui „wirklich beſtehen" [3]).

On peut préſenter la théorie claſſique de la force centrifuge ſous diverſes formes, au fond peu différentes. On peut ſoutenir que, ſuivant le principe de d'Alembert, tout problème de dynamique peut être réduit à un problème de ſtatique en introduiſant des forces fictives. Un cycliſte qui parcourt dans une poſition oblique une courbe de l'arène eſt ſollicité, peut-on dire, par deux forces, la peſanteur et la réaction du ſol. La résultante de ces deux forces eſt une force centripète. Aucune autre force n'agit ſur le cycliſte: il n'eſt pas en équilibre. Mais ce cas réel peut être réduit à un problème d'équilibre en ajoutant une troiſième force fictive aux deux forces réelles; cette force fictive eſt la „force centrifuge".

Quelle que ſoit la valeur de cette conception, ce n'eſt pas la conception de Huygens pour qui, nous l'avons dit, la force centrifuge eſt une force du même genre que la force de la gravité.

Peut-on concilier Huygens et „d'Alembert"? [4]) Cela paraît difficile à première

---

[2]) „Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt", von Heinrich Hertz, Leipzig 1894. J. A. Barth, p. 6—7.

[3]) Page 9.

[4]) Ni Newton ni d'Alembert ne se sert de l'expression „force fictive", qui est plus moderne. On trouve ce terme pour la première fois, croyons-nous, à la p. 46 et suiv. du „Traité de la

vue, et cependant *en principe* la chose est bien simple. Une force peut être réelle et fictive en même temps, réelle pour un observateur, fictive pour un autre observateur placé dans d'autres conditions. En disant que la force centrifuge est une force fictive, nous nous sommes placés au point de vue du spectateur qui ne participe pas au mouvement. Mais pour le spectateur de Huygens, attaché à la roue tournante, la force centrifuge est une force réelle. C'est environ ce qu'Einstein dit dans les paroles suivantes: „Ein exzentrisch auf der Kreisscheibe... sitzender Beobachter empfindet eine Kraft, die in radialer Richtung nach aussen wirkt, und welche von einem relativ zum ursprünglichen Bezugskörper [par rapport auquel le cercle tourne] ruhenden Beobachter als Trägheitswirkung (Zentrifugalkraft) gedeutet wird" [1]).

Dans les jours de Galilée, de Descartes, de Huygens et de Newton, et même dans ceux de d'Alembert et de Lagrange, personne n'avait encore dit clairement que pour parler sans ambiguité des mouvements des corps et des forces qui les accompagnent, il faut commencer par dire quel est le mouvement du spectateur qui observe le mouvement des corps, par rapport à ces corps. On a cependant remarqué (un ou deux ans *avant* l'apparition du relativisme moderne [2]), détail qui n'est pas sans importance, puisqu'*après* l'apparition de cette théorie, toute tentative pour attribuer des idées relativistes de quelque valeur à Huygens pourrait s'expliquer par une certaine partialité pour le relativisme moderne — et nulle faute n'est plus grave pour un historien, ni plus difficile à éviter, que celle d'attribuer à des auteurs anciens des idées modernes dont ils n'ont eu aucune connaissance) on a remarqué, disons-nous, que Huygens dans son Traité „De Vi Centrifuga" est guidé, pour ainsi dire, par le principe de la relativité du mouvement; c'est ce que F. Hausdorff, éditeur de la traduction allemande du Traité „De Vi Centrifuga" (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 138, Leipzig, W. Engelmann, 1903) exprime dans les termes suivants: „Huygens lässt sich auch [3]) hier [il s'agit de la dernière phrase du premier alinéa de la p. 261

Mécanique des Corps solides et du Calcul de l'Effet des machines" par G. Coriolis, Paris, Carilian-Goewry et V. Dalmont, 1844. Coriolis admet le mouvement absolu.

[1]) Sammlung Vieweg, Heft 38, „Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie", gemeinverständlich, von A. Einstein, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig (Zwölfte Auflage, 1921), p. 54.

[2]) Qui eut cependant de nombreux précurseurs. Voir p. e. l'ouvrage de J. M. C. Duhamel, cité à la p. 215, note 4, à la p. 225, note 3, à la p. 230, note 3 et à la p. 233, note 4.

de ce Tome: «unde hunc conatum ineſſe plumbo rectè dicemus»] von dem Princip der *relativen Bewegung* leiten, und es ſcheint, dass bei dieſer Auffaſſung die Centrifugalkraft frei von den Dunkelheiten bleibt, die ihr verſchiedentlich (z. B. von Hertz [4]) «Die Prinzipien der Mechanik» S. 7) nachgeſagt werden. Es handelt ſich um die relative Bewegung der auf der Tangente weiterfliegenden Kugel gegen den auf dem Kreiſe mit gleicher Geſchwindigkeit weiter rotirenden Beobachter" [5]).

En effet, conſidéré en lui-même, le Traité „De Vi Centrifuga" — perſonne que nous ſachions n'a jamais dit le contraire — eſt „frei von Dunkelheiten".

Quoi d'étonnant ſi plus tard (voir les Pièces qui précèdent, p. 213—233) Huygens — après avoir longtemps conſidéré la rotation comme un mouvement „vrai" ou „abſolu" — revient avec inſiſtance (quoique ſans pouvoir développer le moins du monde un ſyſtème relativiſte conſéquent) ſur la relativité du mouvement [6])?

Dans ſon „Horologium oſcillatorium" (p. 157 de l'édition originale) Huygens ſe contente de dire, au ſujet de la publication de la démonſtration des treize Théorèmes ſur la force centrifuge imprimées à la fin de cet ouvrage, que cette démonſtration eſt „in aliud tempus dilata". Newton, à qui Huygens avait fait préſent d'un exemplaire de l'„Horologium oſcillatorium" écrit à Oldenburg: „I am glad, we are to exſpect another diſcours of y^e *Vis centrifuga*, wch ſpeculation may prove of good uſe in natural Philoſophy and Aſtronomy, as well as Mechanicks" [7]). Cependant, comme nous l'avons dit, durant la vie de Huygens le Traité eſt reſté inédit [8]).

---

[3]) C'est-à-dire: comme dans le Traité „De Motu Corporum ex Percussione".

[4]) Remarquons que Hertz n'a probablement pas lu le Traité „De Vi Centrifuga" de Huygens. Dans l'ouvrage nommé il ne fait mention (à la p. 5) que d'Archimède, de Galilée, de Newton, de d'Alembert et de Lagrange.

[5]) P. 73 de l'édition nommée.

[6]) En donnant au mouvement relatif, lui aussi, le nom de „motus verus".

[7]) Lettre de Newton à Oldenburg du 3 juillet 1673; voir la p. 326 du Tome VII.

[8]) En 1667 déjà Huygens avait annoncé dans une lettre au prince Léopold de Médicis son intention de faire paraître „quandoque" ses lois de la percussion des corps „ut et his cognata de vi qua tendunt a centro quæ in orbem vertuntur, de qua vir idem Clarissimus [Borelli]

À défaut du Traité, les treize Théorèmes, quoique dépourvus de démonſtrations, ont eu une influence notable: c'eſt par ces Théorèmes, paraît-il, que Newton a appris à connaître la meſure exacte de la force centrifuge [1]). Voici ce que Huygens obſerve lui-même à ce ſujet à la p. 28 du Manuſcrit G (nous citons ce paſſage en entier): „Je m'eſtonne que M^r. Newton ſur une hypotheſe ſi peu probable et ſi hardie, ſe ſoit donnè la peine de baſtir tant de Theoremes et comme une theorie entiere des actions des corps celeſtes. Je dis ſon hypotheſe qui eſt que toutes les petites particules des divers corps s'attirent mutuellement, et cela en raiſon double reciproque des diſtances. Il a pu eſtre conduit a ſa theorie des orbites elliptiques par le livre de Borelli du mouvement des ſatellites de Jupiter, qui conſidere auſſi la diminution de peſanteur par l'eloignement (quoyqu'il n'en remarque pas la proportion) et taſche de trouver les orbes elliptiques par la force centrifuge qui contrebalance la peſanteur [2]), mais il n'a pas ſceu penetrer les vrais fondements comme Newton qui a eu l'avantage de connoitre la meſure de la force centrifuge par les Theoremes que j'en ay donnèz" [3]). Newton lui-même fait mention des Théorèmes en queſtion dans le Scholium qui ſuit la Prop. IV.

---

egit in Theoricis Mediceorum" (T. VI, p. 162). Voir sur l'ouvrage de Borelli la note 2 de la page suivante.

En 1669 Huygens envoye à Oldenburg „ut adserventur in Actis Societatis Regiæ" les anagrammes de quelques Propositions sur la force centrifuge (T. VI, p. 487).

[1]) Voir à ce propos les p. 69—73, Anmerkung 16, de l'ouvrage de J. Bosscha: „Christian Huygens. Rede am 200ten Gedächtnistage seines Lebensendes, aus dem Holländischen übersetzt von Th. H. W. Engelmann" (Leipzig, W. Engelmann, 1895), et les p. 118—129 du livre de F. Rosenberger: „Isaac Newton und seine physikalischen Principien, ein Hauptstück aus der Entwickelungsgeschichte der modernen Physik" (Leipzig, J. A. Barth, 1895). Fl. Cajori dans son article: „Newton's Twenty Years Delay in Announcing the Law of Gravitation" dans le Recueil „Sir Isaac Newton 1727—1927, a Bicentenary Evaluation of His Work" (Baltimore, The Williams & Wilkins Company, 1928) arrive à la conclusion (p. 186) que „Newton's delay of about twenty years in announcing the law of gravitation was due to theoretical difficulties involved in the earth-moon test", mais il ne fait pas mention du problème historique de la découverte de la mesure exacte de la force centrifuge et ne pose donc pas la question de savoir si Newton dans son calcul de 1666 a dû avoir des difficultés sous ce rapport, comme le pensent Bosscha et Rosenberger. Il est évident que pour pouvoir calculer exactement l'attraction exercée par la terre sur la lune, connaissant le mouvement de cette dernière dans son orbite à peu près circulaire, Newton aurait dû avoir des connaissances théoriques sur le mouvement équivalant à la connaissance de la valeur absolue de la force centrifuge. Dans le même Recueil G. D. Birkhoff dans son article „Newton's Philosophy of Gravitation, etc." attribue (à la p. 59) une influence prépondérante aux théorèmes de Huygens de 1673 sur la découverte de la loi de la gravitation universelle.

Theor. IV. à la p. 43 de l'édition originale des „Philoſophiæ naturalis Principia mathematica".

On trouve dans les Manuſcrits pluſieurs calculs effectués par Huygens, après l'apparition des „Principia" de Newton, ſur la grandeur de la force centrifuge à la ſurface du ſoleil ou de la planète Jupiter, comparée à la grandeur de la gravité en ces lieux. Elles trouveront une place dans un des Tomes ſuivants.

---

[2]) Borelli, „Theoricæ Mediceorum Planetarum" (voir ce T. p. 227, dernier alinéa de la note 2 de la p. 226), p. 47: „... supponentes id, quòd videtur non posse negari, quòd scilicet planetæ quemdam habeant naturalem appetitum se uniendi cum mundano globo, quem circumeunt, quodque reuera contendant omni conatu ipsi appropinquare, planetæ videlicet soli, Medicea verò sydera Iovi. Certum est insuper quòd motus circularis mobili impetum tribuit se remouendi à centro eiusmodi reuolutionis, quemadmodum experimur in rotæ, seu fundæ gyro, quo lapis acquirit impetum recedendi à centro suæ reuolutionis; supponamus igitur planetam niti Soli ipsi appropinquare, quoniam interim ob circularem motum impetum acquirit se se amouendi ab eodem centro solari, hinc est, quod dum æquales euadunt vires contrariæ (altera enim ab altera compensatur) neque vicinior, neque remotior fieri potest ab ipso Sole vltra certum, ac determinatum spatium, ideoque planeta libratus apparebit, etc."

Avant Borelli, Plutarque avait dit (voir à la p. 260, la note 8 de la p. 259 de notre T. X): „... la lune ne se meut point selon le mouvement de sa pesanteur, estant son inclination deboutée et empeschée par la violence de la revolution circulaire" (traduction d'Amyot).

[3]) A la p. 2 du recueil „Anecdota" (voir sur ce Manuscrit la note 4 de la p. 8 de notre T. XV) Huygens écrit encore à propos de ces Théorèmes: „De vi centrifuga extant, sed non demonstrata... Galileus deceptus (comparez le deuxième alinéa de la note 8 de la p. 241). Newtonus applicuit feliciter ad motus ellipticos Planetarum. Hinc quanti sit hæc vis centrifugæ cognitio apparet".

CHRISTIANUS HUGENIUS

DE

VI CENTRIFUGA.

CHRISTIAAN HUYGENS

SUR LA

FORCE CENTRIFUGE[1].

La gravité eſt la tendance à choir: ſi l'on admet qu'en vertu de cette tendance les corps pondérables qui tombent ſoit verticalement ſoit en ſuivant des plans inclinés ſe meuvent avec une accélération telle qu'en des temps égaux d'égales viteſſes viennent s'ajouter à la viteſſe acquiſe, on peut en ſe baſant là-deſſus démontrer rigoureuſement que les eſpaces parcourus en des temps différents par des corps partant du repos ſont entre eux comme les carrés des temps. Or, ce réſultat eſt en parfait accord avec l'expérience. Il s'enſuit que l'hypothèſe énoncée eſt correcte. Les expériences de Galilée [3]), de Riccioli [4]), ainſi que les nôtres, montrent ce parfait accord; à ceci près que la réſiſtance de l'air cauſe un petit écart, d'autant moindre toutefois que les corps poſſèdent plus de gravité par rapport à la grandeur de leur ſurface et que nos expériences portent ſur des eſpaces plus courts. Il eſt donc parfaitement croyable que ſi la réſiſtance de l'air n'y faiſait pas obſtacle la même loi ſerait rigoureuſement obſervée même dans des espaces très vaſtes. Mais maintenant, de même qu'il réſulte de la réſiſtance de l'air qu'un

---

[1]) Le texte latin du présent Traité est à peu près conforme à celui qui occupe les p. 401—428 des „Opuscula postuma" de 1703 (voir la note 1 de la p. XII de notre T. XIII). Nous possédons le Manuscrit, écrit de la main de Huygens, auquel ce dernier texte a été emprunté sauf des changements d'interponction et quelques autres changements, des additions et des omissions. Nous rétablirons en partie l'interponction de Huygens et nous rendrons compte dans les notes des changements et des omissions s'ils ne sont pas entièrement insignifiants; quant aux additions, parfois très considérables (voir la page 238 de l'Avertissement qui précède), nous les mettrons entre crochets.

Le Manuscrit de Huygens que nous venons de mentionner fait partie d'un assemblage de feuilles détachées dont les pages ont été numérotées par Huygens de 1 à 28. La première de ces pages a été datée par Huygens le 21 oct. 1659. Nous en reproduisons le contenu ainsi que celui des autres qui, comme elle, sont étrangères au présent Traité dans l'Appendice I. On y verra que les théorèmes qu'elle contient indiquent que la théorie de la force centrifuge

CHRISTIANUS HUGENIUS

DE

VI CENTRIFUGA[1].

GRAVITAS eſt conatus deſcendendi [2]). Ponendo itaque gravia cadentia ſive ad perpendiculum ſive in planis inclinatis moveri ea acceleratione, ut temporibus æqualibus æqualia accreſcant celeritatis momenta, certiſſimè inde demonſtrari poteſt ſpatia diverſis temporibus è quiete peracta eſſe inter ſe, ſicut temporum quadrata. Hoc autem experientiæ exactè convenit. Ergo recte illud aſſumptum eſſe conſtat. Exactè convenire experimenta Galilei [3]) Riccioli [4]), noſtra comprobant; niſi quod aëris reſiſtentia pauxillum quid aberrare facit, ſed hoc eo minus quo corpora plus gravitatis pro ſuperficiei magnitudine continent, quoque in minoribus ſpatiis periculum facimus. Unde credibile omnino eſt niſi aëris reſiſtentia obeſſet etiam in vaſtiſſi-

---

se trouvait déjà dans un état très avancé. Le même fait est prouvé par quelques annotations dans le Manuscrit A (voir sur ce Manuscrit la p. 4 de notre T. XV); consultez à ce sujet l'Appendice V qui suit. Nous croyons donc pouvoir dater en substance de 1659 le présent Traité.

Outre l'édition de 1703 il en existe une réimpression, qui occupe les p. 107—134 du T. II des „Opera reliqua" de 1728, ouvrage mentionné à la p. II de la Préface de notre T. I.

[2]) Cette phrase, ajoutée (ainsi que le mot „itaque" de la phrase suivante) par une autre main, fut empruntée à une autre feuille que le reste de cette page. On y lit de la main de Huygens: „Gravitas est conatus descendendi. Descendunt vero gravia motu accelerato secundum numeros impares ab unitate 1, 3, 5, 7". Après quoi Huygens fait suivre: „Itaque cum grave", etc. (voir le deuxième alinéa de la p. 257).

[3]) Il s'agit de la „Giornata terza" des „Discorsi e dimostrazioni mathematiche intorno à due nuoue scienze" de 1638, voir les p. 212—213 du T. VIII (1898) de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei".

[4]) Voir les p. 381—397 du „T. I, Pars Post. Liber IX, Caput XVI" de l'„Almagestum novum", ouvrage de 1651 cité dans la note 7 de la p. 402 de notre T. I.

globe en liège atteint bientôt un point à partir duquel il ſe meut, en continuant à tomber, avec une viteſſe uniforme (ce qui eſt néceſſairement également vrai pour un globe en plomb ſi petit qu'il a par rapport à ſa gravité autant de ſurface que le globe de liège, c'eſt-à-dire, dont le diamètre eſt à celui du globe de liège dans un rapport égal à celui de la gravité ſpécifique du liège à celle du plomb, comme je l'ai démontré ailleurs [1]): de même auſſi j'eſtime à propos d'un globe en plomb arbitrairement grand que, s'il continue à tomber à travers de l'air, il parviendra enfin lui auſſi à un état de mouvement uniforme, bien entendu après avoir parcouru un eſpace énorme, de ſorte que la loi de l'accélération ne ſera pas valable dans ce cas, et que par conſéquent cette loi ne ſera en réalité jamais obſervée avec une préciſion abſolue. Ce n'eſt pas là pourtant une raiſon pour conſidérer la ſpéculation de Galilée ſur ce mouvement comme peu importante et peu utile, pas plus ma foi que toute la mécanique qui traite des poids parce qu'on a coutume d'y admettre à tort que les corps pondérables tendent à tomber ſuivant des lignes parallèles entre elles, tandis qu'en réalité ces lignes convergent vers le centre de la terre. D'ailleurs pour la démonſtration des théorèmes que nous traiterons ici, il ſuffit que pour des eſpaces arbitrairement petits l'accélération à partir du point de repos croiſſe ſuivant les nombres impairs 1, 3, 5, 7, comme Galilée l'a établi [3]).

[Fig. 1.]

Ainſi lorsqu'un corps pondérable eſt ſuspendu à un fil [Fig. 1], le fil éprouve une traction pour cette raiſon que le corps pondérable tend à s'éloigner dans la direction du fil d'un mouvement accéléré de cette espèce.

Or, par un mouvement accéléré ſuivant la progreſſion enoncée un eſpace plus ou moins grand peut être parcouru dans le même temps comme lorsqu'un corps pondérable eſt maintenu ſur un plan incliné AB [Fig. 2] par un fil CD parallèle à ce plan. En effet, dans ce cas auſſi le corps tend à ſuivre une ligne DC d'un mouvement ſemblablement accéléré, mais non pas de telle façon qu'il parcourt en un certain laps de temps un chemin égal à celui qu'il parcourrait en ce même temps s'il avait été détaché d'un fil vertical. Il s'enſuit qu'on ſent dans ce cas un moindre effort: d'autant moindre par rapport à cet autre dans la direction verticale que le corps parcourrait moins d'espace ſur le plan incliné que dans la direction verticale durant le même temps.

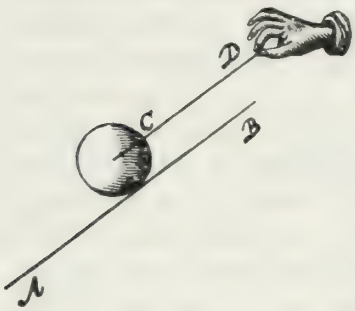
[1]) Huygens n'a jamais publié cette démonstration; on la trouve à la p. 85 du Manuscrit A et nous la reproduisons plus loin dans ce Tome (Travaux divers de Statique et de Dynamique de 1659 à 1666, Deuxième Partie, Dynamique, I). Consultez d'ailleurs sa lettre à Moray du 16 septembre 1661, p. 320—321 du T. III, où l'on voit que Huygens en 1661 avait vérifié le résultat de son calcul par l'expérience.

[2]) Un tel trait indique, ici et dans la suite, la fin d'une page de l'édition de 1703 des „Opuscula postuma".

mis ſpatiis eandem rationem perfectiſſimè obſervatum iri. Nunc autem, ſicut ex illa fit ut ſphæra ex ſubere brevi eo perveniat unde æquabili deinceps celeritate decidere pergat; quod de plumbea etiam neceſſario verum eſt, minuta adeo ut pro gravitate ſua tantam ſuperficiem habeat quantam ſuberea, hoc eſt, cujus diameter ſit ad diametrum illius, ſicut gravitas ſpecifica ſuberis ad gravitatem plumbi, ut alias oſtendi [1]): ita de plumbea quoque quantumvis magna exiſtimo, ſi per aerem cadere pergat, perventuram quoque tandem ad æquabilem
p. 402. motum, poſt | [2]) immenſum videlicet ſpatium peractum. adeo ut accelerationis ratio hìc locum non ſit habitura, ac proinde revera nunquam præciſione exquiſitiſſima ſervetur. Veruntamen non propterea parum egregia atque utilis Galilei de hoc motu ſpeculatio cenſenda eſt, non magis hercle quam mechanica omnis quæ circa pondera verſatur quod falſo in illa præſumi ſoleat gravia parallelis inter ſe lineis deſcendere conari quæ revera ad centrum terræ vergunt. Cæterum ad illorum demonſtrationem, quæ nos hic tractabimus, ſufficit in minimis quamlibet ſpatijs à quietis puncto accelerationem creſcere ſecundum impares numeros 1, 3, 5, 7, ut Galileus ſtatuit [3]).

Itaque [4]) cum grave ex filo ſuſpenſum eſt [Fig. 1], ideo trahitur filum, quoniam grave conatur recedere ſecundum lineam fili motu accelerato ejuſmodi.

[Fig. 2.]



Poteſt autem motu ſecundum dictam progreſſionem accelerato majus minuſve ſpatium eodem tempore confici. velut cum in plano inclinato AB [Fig. 2] grave ſuſtinetur filo CD ipſi plano æquidiſtanti. Nam & hic conatur grave progredi per lineam DC motu ſimiliter accelerato, ſed non ut tantundem ſpatii percurrat certa temporis particula, quantum percurreret eadem particula ſi à filo perpendiculari dimiſſum eſſet. Unde & minor conatus hic ſentitur, qui nempe tanto minor eſt altero illo conatu perpendiculari, quanto minus ſpatium eodem tempore in plano inclinato quam in perpendiculari grave tranſiturum eſſet [5]).

---

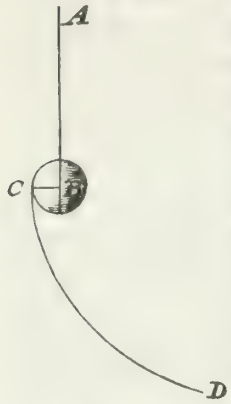
[3]) Voir (p. 210 du T. VIII de l'édition nationale) le „Corollarium I" du „Theorema II, Propositio II" de la „Giornata terza" des „Discorsi".

[4]) Comparez la note 2 de la p. 255.

[5]) On lit encore dans le Manuscrit: „nam quanto minus spatium eodem tempore globus idem C in plano inclinato BA percursurus est quam in perpendiculari, tanto levius attrahere filum CD, quam illud unde perpendiculariter sustinetur, ostensum est".

Nous admettons en outre que toutes les fois que deux corps de poids égaux ſont l'un et l'autre retenus par un fil et qu'ils poſſèdent la tendance de s'éloigner dans la direction du fil d'un même mouvement accéléré, par lequel ils parcourraient des chemins égaux dans le même temps, l'on ſent auſſi la même traction de ces fils ſoit vers le bas ſoit vers le haut ſoit dans toute autre direction où ils ſont tirés, ſans qu'il faſſe aucune différence de quelle cauſe cette tendance provient, pourvu qu'elle ſoit là. Or, la même tendance exiſte lorsque, ſi l'on met les corps en liberté, autrement dit ſi l'on ne tient pas leur tendance en échec, un même mouvement aura lieu. Et ceci ne doit être appliqué qu'au mouvement initial, en prenant un laps de temps auſſi petit que poſſible. En effet, ſi par exemple le globe B [Fig. 3] eſt ſuſpendu au fil AB et touche latéralement la ſurface concave CD, mais de telle manière que la droite menée du centre B de la ſphère au point de contact ſoit perpendiculaire tant au fil AB qu'à la tangente à la courbe, nous ſavons que le globe n'eſt nullement ſupporté par la ſurface CD mais qu'il tire la corde AB avec autant de force que s'il ne touchait pas la ſurface CD mais qu'il était librement ſuſpendu. Néanmoins s'il eſt détaché de la corde et qu'il tombe, il ne deſcendra pas de la même manière que s'il quittait la corde après avoir été librement ſuſpendu; mais précipité ſur la ſurface CD il n'obſervera pas même exactement la proportion de l'accélération indiquée par les nombres impairs 1, 3, 5, 7. Il apparaît donc qu'il ne faut pas avoir égard à ce qui arrivera au corps quelque temps après ſa ſéparation de la corde, mais qu'il faut conſidérer un laps de temps auſſi petit que poſſible après le commencement du mouvement, ſi nous voulons déterminer la force de la tendance au mouvement. Or, le globe B commence dans ce cas à ſe mouvoir après la ſéparation de la corde comme s'il était tombé verticalement, parce qu'au commencement il a cette inclination au mouvement qui eſt ſelon la droite AB, puisque celle-ci eſt parallèle à la tangente à la courbe en C. Voyons maintenant dans le cas de corps liés à un fil ou à une roue qui tourne, de quelle nature et de quelle grandeur eſt la tendance qui les porte à s'éloigner du centre.

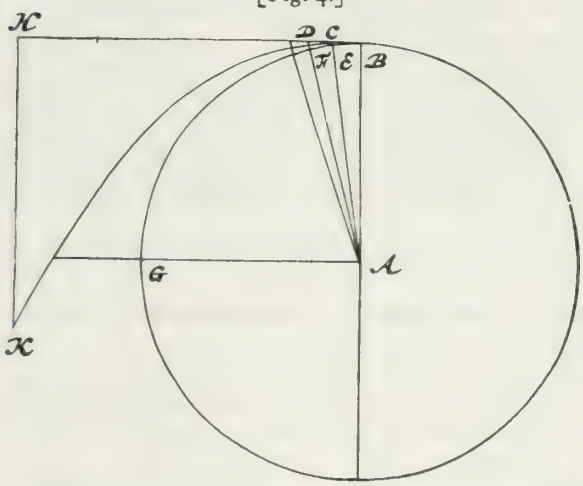
[Fig. 3.]



Suppoſons la roue BG [Fig. 4] qui tourne autour de ſon centre A parallèle au plan de l'horizon; un globule lié à la circonférence poſſède, lorsqu'il a atteint le point B, la tendance de continuer ſon mouvement ſuivant la droite BH qui touche la roue en B; en effet, s'il eſt détaché en cet endroit de la roue et qu'il s'envole, il prendra le chemin droit BH et ne le quittera pas à moins qu'il ne ſoit tiré en bas par la force de la gravité ou que ſon cours ne ſoit entravé par la rencontre d'un autre corps. Mais ce qui paraît à première vue difficile à comprendre, c'eſt pourquoi le fil AB eſt ſi fortement tendu alors que le globe a la tendance de ſe mouvoir

Porro quoties duo corpora æqualis ponderis unum quodque filo retinetur, ſi conatum habeant eodem motu accelerato, & quo ſpatia æqualia eodem tempore peractura ſint, ſecundum extenſionem fili recedendi: Æqualem quoque attractionem iſtorum filorum ſentiri ponimus, ſive deorſum ſive ſurſum ſive quamcunque
p. 403. in| partem trahantur. Neque referre qua ex cauſa conatus ejuſmodi oriatur, dummodo adſit. Adeſt autem idem conatus, ſi data facultate ſeu non inhibito conatu, idem circa motum continget. Idque in initio motus tantum ſpectandum eſt, accepta parte temporis quamlibet exigua. Nam ex. gr. ſi globus B [Fig. 3] pendeat a filo AB, tangat autem a latere ſuperficiem cavam CD, verum ita ut quæ a centro ſphæræ B ad contactum ducitur ſit & filo AB & tangenti curvam perpendicularis [1]), ſcimus jam globum neutiquam à ſuperficie CD ſuſtineri, ſed æque valide trahere funem AB ac ſi planum CD non tangeret ſed libere ſuſpenſus eſſet. Attamen ſi à fune ſeparetur decidatque, non deſcendet eodem modo, ac ſi libere ſuſpenſus fune excidiſſet, ſed per ſuperficiem CD devolutus ne quidem accelerationis proportionem ſecundum numeros impares 1, 3, 5, 7 accurate ſervabit. Itaque apparet non illud reſpiciendum quid aliquandiu poſt ſeparationem à fune gravi futurum ſit, ſed quamlibet minimam temporis particulam ab incepto motu conſiderandam, ſi vim conatus determinare velimus. Incipit autem hîc globus B, poſt ſeparationem à fune, ita moveri, quemadmodum ſi perpendiculariter decidiſſet, quoniam initio eam determinationem motus habet quæ eſt ſecundum rectam AB, quoniam hæc tangenti curvam in C parallela eſt. Nunc videamus quis quantusque conatus ſit corporibus filo vel rotæ quæ circumgyratur alligatis, ut à centro recedant.

[Fig. 4.]



Sit rota BG [Fig. 4] quæ circa A centrum convertatur, horizontis plano æquidiſtans. globulus ad circumferentiam ligatus, ubi ad B punctum venerit, conatum habet pergendi ſecundum rectam BH, quæ rotam in B contingit: nam, ſi hic ab rota ſeparetur avoletque rectam viam BH inſiſtet, nec relinquet eam niſi vi gravitatis deorſum| trahatur, vel
p. 404. occurſu alterius corporis curſus ejus impediatur. Hoc vero primo intuitu difficile intellectu

[1]) Au lieu de la phrase précédente on lit dans le Manuscrit: „ut quæ a contactu ad sphæram ducitur sit ipsi AB perpend.laris". Le changement a été apporté par les éditeurs des „Opuscula postuma".

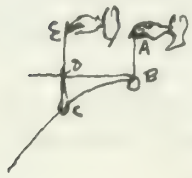
ſuivant la droite BH qui eſt perpendiculaire à AB. Mais tout s'expliquera par les conſidérations ſuivantes. Suppoſons cette roue très grande de ſorte qu'elle emporte facilement avec elle un homme placé ſur elle en B près de ſa circonférence, mais attaché de ſorte qu'il ne peut pas être lancé dehors lui-même; et que cet homme tienne de ſa main un fil à l'autre bout duquel ſoit attaché une balle en plomb [2]). Eh bien, le fil ſera tendu de la même manière, et tout auſſi fortement par la force de la rotation, ſoit qu'il ſoit tenu de cette manière, ſoit qu'il ſe prolonge juſqu'en A et qu'il ſoit attaché là; quant à la cauſe de ſa tenſion, on pourra maintenant mieux en juger. Prenons des arcs égaux BE, EF, petits par rapport à la circonférence entière, par exemple des centièmes parties ou de plus petites encore. L'homme attaché à la roue de qui nous avons parlé, parcourt donc ces arcs en des temps égaux, tandis que le plomb, s'il était abandonné à lui-même, parcourrait les droites, égales à ces arcs, BC et CD, dont les extrémités C et D ne tombent, il eſt vrai, pas préciſément ſur les droites qui relient le centre A aux points E et F, mais s'en écartent extrêmement peu dans la direction vers B. Il appert maintenant que lorſque l'homme ſera parvenu juſqu'en E, le plomb ſera en C s'il a été lâché au point B, tandis que, lorſque l'homme aura atteint le point F, le plomb ſera en D; nous dirons donc à bon droit que le plomb a cette tendance [3]).

Que ſi les points C et D [4]) étaient ſur les prolongements des droites AE et AF, il ſerait certain que le plomb tend à s'éloigner de l'homme ſuivant la droite même qui émanant du centre paſſe par l'endroit qu'il occupe; et cela de telle façon que pendant le premier laps de temps il s'éloignerait de lui à une diſtance EC, et qu'après le deuxième il ſe trouverait à une diſtance FD. Or ces diſtances EC, FD etc. croiſſent de la même manière que la ſérie des carrés depuis l'unité: 1, 4, 9, 16 etc. En effet, elles s'accordent d'autant plus exactement avec cette ſérie que les particules BE, EF ſont priſes plus petites: elles doivent par conſéquent être conſidérées comme n'en différant abſolument pas au tout premier commencement. Il eſt donc évident que la tendance qui exiſte en ce cas ſera tout-à-fait

[1]) Au lieu des deux derniers mots, intercalés par les éditeurs des „Opuscula postuma", on lit dans le Manuscrit: „superstantem".

[2]) On doit se représenter la longueur de ce fil comme très petite, lorsque la main de l'homme se trouve très près du bord de la roue.

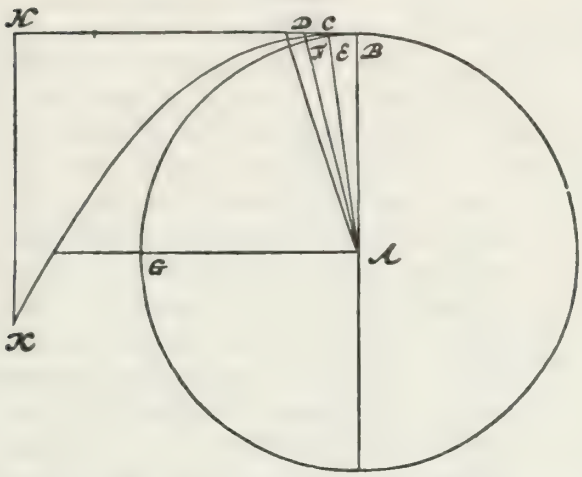
[3]) Savoir la tendance à s'éloigner successivement par les distances EC et FD. Or, pour rendre cette conclusion encore plus évidente Huygens écrivit en marge l'annotation suivante:



„non respiciendum quomodo a filo ſeparari conetur ſitum AB servante, sed quomodo àb eodem moveri pergente recessurum sit. Quod exemplo globuli ex filo suspensi quod quis æquabili motu horizontali defert clarum fiet. hoc enim ſi ſeparetur à filo in B parabolam describet BC quæ ad rectos angulos occurrit AB. Verum tamen conatum integrum gravitatis

videtur, cur adeo tendatur filum AB, cum globus conetur ire ſecundum BH rectam quæ ad AB perpendicularis eſt. Sed omnia hoc modo clara fient. Cogitemus maximam quampiam rotam hanc eſſe, ut hominem prope circumferentiam ei inſiſtentem [1]) in B, facile una ſecum deferat; verum ita affixum ut ne excuti ipſe poſſit; teneat autem manu ſua filum cum alligata ad caput alterum fili glande plumbea [2]). Eodem igitur modo & æque valide filum tendetur ex vi vertiginis, ſive ita contineatur, ſive filum idem ad centrum uſque A porrigatur, ibique deligatum ſit: ratio autem ob quam tenditur manifeſtius jam percipi poterit. Sumantur arcus æquales BE, EF, exigui ratione totius circumferentiæ, puta partes centeſimæ vel minores etiam. Hoſce igitur arcus is quem diximus homo æqualibus temporibus pertranſit rotæ affixus, plumbum autem iiſdem temporibus decurreret, ſi dimitteretur, per rectas BC, CD dictis arcubus æquales, quarum termini C, D, non quidem in eas rectas incidunt omnino, quæ ex centro A per puncta E, F, ducuntur, ſed minimum quid verſus B ab iis lineis diſtant. Apparet jam, ubi homo pervenerit in E, plumbum futurum in C, ſi in B puncto dimiſſum fuiſſet, ubi autem ad F ille pervenerit, futurum in D. unde hunc conatum ineſſe plumbo rectè dicemus [3]).

[Fig. 4.]



Quod ſi jam puncta C, D [4]) eſſent in rectis AE, AF productis, certum eſſet conari plumbum recedere ab homine per ipſam lineam quæ à centro per locum ejus ducitur; & quidem ita ut prima temporis parte removeatur ab eo ſpatio EC, ſecunda autem parte temporis diſtet ſpatio FD. Hæc autem ſpatia EC, FD & *p.* 405. cætera | deinceps ita creſcunt ut quadratorum ſeries ab unitate 1, 4, 9, 16 &c. nam tanto ſanè exactius hanc ſeriem referunt quanto minores particulæ BE, EF acceptæ fuerint, ideoque in ipſo initio tanquam nihil differrent conſideranda ſunt.

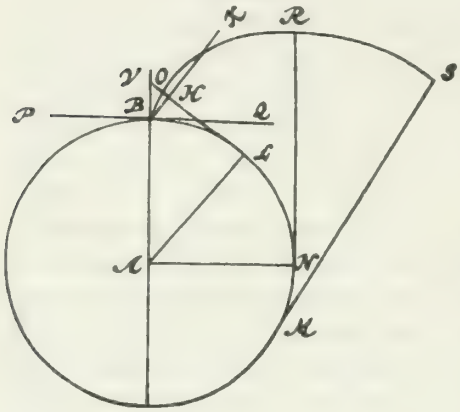
---

manus sentit. Quoniam respectu manus moveri pergentis descendere conatur globus secundum extensionem fili, nam ubi manus pervenerit in E, globus a filo separatus esset spatio DC. Et plane rectam lineam percurreret respectu manus motae licet respectu quiescentis parabolam percurrat".

[4]) Savoir les points choisis plus haut de sorte que BC = arc BE et BD = arc BF.

ſemblable à celle qu'on ſent lorſque le globe eſt tenu en ſuſpenſion à un fil, parce que dans ce dernier cas auſſi le corps tend à s'éloigner ſuivant la direction même du fil d'un mouvement ſemblablement accéléré; de ſorte qu'à la fin du premier laps de temps le corps aura parcouru la petite diſtance 1, après deux laps de temps 4 petites diſtances, après trois 9 petites diſtances, etc. Ainſi en ſerait-il donc ſi les points C et D ſe trouvaient ſur le prolongement des droites AE et AF. Mais maintenant comme ces points s'écartent un peu des droites nommées dans la direction de B, il s'enſuit que le globe tend à s'éloigner de l'homme non pas ſuivant la ligne droite qui part du centre A, mais ſuivant une certaine courbe qui touche cette droite à l'endroit où l'homme ſe trouve. En effet, ſi au point B un plan PQ [Fig. 5] touche la roue, plan que nous ſuppoſons attaché à la roue et tournant avec elle, le globe B, s'il ſe détache de la roue ou du plan nommé, décrira par rapport à ce plan et au point B, lesquels continuent leur mouvement, une courbe BRS qui touchera en B le prolongement du rayon AB animé du même mouvement. Si nous voulons décrire cette courbe, il ſuffira d'enrouler un fil quelconque ſur la circonférence BNM et de mouvoir ſon extrémité B vers RS de telle manière que la partie qui a quitté la circonférence BNM reſte toujours tendue, car par ce mouvement le fil décrira de ſon extrémité la dite ligne BRS, ce qu'il eſt facile de démontrer. Or, cette ligne poſſédera la propriété ſuivante : en quelque point, tel que N, de la circonférence qu'on mène une tangente à la circonférence coupant la courbe en R, cette droite NR ſera égale à l'arc NB; ce qui eſt évident d'après la genèſe de la courbe. Il s'agit maintenant de démontrer que la courbe et la droite AB ſe touchent au point B. Soit NR une tangente à la circonférence parallèle à AB. Il eſt certain que la partie BR de la courbe eſt ſituée toute entière entre les droites parallèles AB et NR, car ſi l'on y prend un point quelconque tel que O et qu'on fait paſſer par ce point la tangente à la circonférence VOL, LO ſera égale à l'arc LB et par ſuite plus petite que la tangente du même arc qui eſt LV : par conſéquent il eſt néceſſaire que le point O tombe entre V et L; et la même choſe peut être démontrée pour un point quelconque ſitué ſur BR.

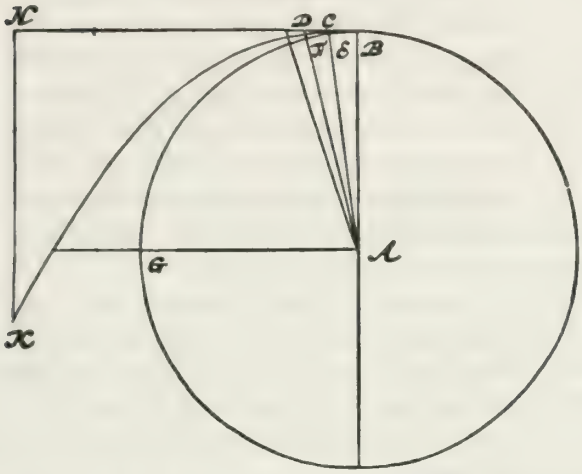
[Fig. 5.]



Si l'on dit maintenant que la droite BV ne touche pas la courbe BR en B, on pourra donc tracer à partir de B une certaine droite BK faiſant avec BV un ſi petit angle qu'elle ne coupe pas la courbe BR; ſoit BK cette droite. Tirons le rayon AL parallèle à BK et ſoit LH perpendiculaire à cette même droite BK et

Itaque ſimilem planè conatum hunc fore conſtat illi qui ſentitur cum globus filo ſuſpenſus tenetur, quoniam tunc quoque conatur recedere ſecundum lineam ipſius fili, motu ſimiliter accelerato; ut nempe prima temporis parte exacta peregerit ſpatiolum 1, duabus temporis partibus ſpatiola 4, tribus 9 &c. Sic igitur ſe res haberet ſi puncta C, D, eſſent in rectis AE, AF productis. Nunc autem quia parum verſus B à prædictis lineis recedunt, contingit inde ut globus non per rectam lineam è centro A venientem conetur ab homine recedere ſed per curvam quandam quæ rectam illam tangit eo loco ubi homo conſiſtit. Nempe ſi rotam contingat in B [Fig. 5] planum PQ, quod ei ſit affixum atque una cum ipſa circumferatur, globus B, ſi a rota ſeu plano dicto ſeparetur, deſcribet reſpectu ejuſdem plani punctique B porro moveri pergentium curvam BRS, quæ radium AB una tranſlatum productumque tanget in B. quam curvam ſi deſcribere velimus, tantum filum aliquod circumferentiæ BNM circumponendum eſt, ejuſque caput B ducendum verſus RS, ita ut ſemper extenſa maneat pars ea quæ circumferentiam BNM reliquit; hoc enim motu, extremo ſui puncto, dictam lineam BRS deſcribet; quod facile eſt oſtendere. Erit autem hæc lineæ proprietas, ut ſi ad quodlibet circumferentiæ punctum, ut N, ducatur tangens circumferentiam quæ occurrat curvæ in R, hæc ipſa NR æqualis ſit arcui NB; quod ex ortu perſpicuum eſt. Tangere autem ſe mutuo curvam rectamque AB in puncto B eſt oſten-
p. 406. dendum. Sit NR tangens circumferentiæ, | parallela AB. Conſtat [1]) curvæ partem BR totam intra rectas parallelas AB, NR jacere, nam ſi quodvis in ea punctum ut O ſumatur, per quod tangens ad circumferentiam ducatur VOL, erit LO æqualis arcui LB ideoque minor tangente ejuſdem arcus, quæ eſt LV: unde punctum O inter V & L cadere neceſſe eſt. atque idem de quocunque puncto in BR accepto oſtendi poteſt.

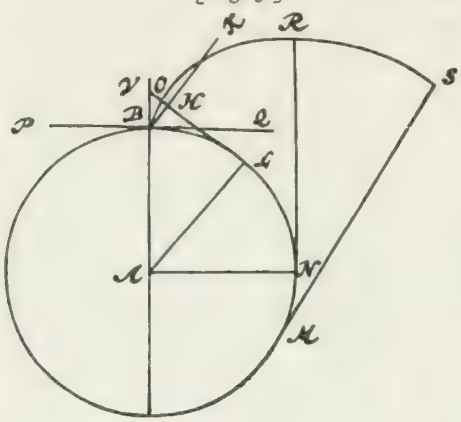
[Fig. 4.]



Jam vero ſi curvam BR dicatur non tangere recta BV in B, ergo poterit duci ex B recta quæpiam BK tam exiguo angulo ſuper BV inclinata ut curvam BR non ſecet. ſit ea BK. Ducatur AL radius parallelus BK, ſitque LH ad eandem BK perpendicularis. ideoque & ad AL. Eſt igitur LH æqualis ſinui arcui BL ideoque

[1]) Le Manuscrit intercale „jam".

[Fig. 5.]



par conſéquent auſſi à AL. LH eſt donc égale au ſinus de l'arc BL et par ſuite moindre que cet arc. Mais la droite LHO compriſe entre le point de contact L et la courbe BR eſt égale à ce même arc. Une certaine partie de la courbe BR ſur laquelle ſe trouve le point O tombera donc à l'intérieur de l'angle VBK quelque petit qu'on ſuppoſe cet angle. D'où il eſt évident que la droite BK coupe la courbe et encore que, par ſuite, BV la touche au point B.

Comme le globe qui tourne avec la roue tend donc à décrire une courbe par rapport au rayon ſur lequel il eſt ſitué, ſavoir une courbe telle qu'elle touche le rayon, il apparaît qu'en vertu de cette tendance le fil auquel le globe eſt lié ne doit pas être tendu d'autre façon que ſi le globe avait la tendance de ſe mouvoir ſuivant le prolongement même du rayon.

Or, les diſtances que le globe parcourrait ſur la dite courbe dans des temps croiſſant par portions égales, ſont auſſi entre elles comme la ſérie des carrés depuis l'unité 1, 4, 9, 16 etc., bien entendu ſi nous portons nos regards ſur le commencement du mouvement et ſur des eſpaces très-petits; ce que la figure ci-jointe [Fig. 6] fait voir, où BE, EF, FM ſont pris comme arcs égaux ſur la circonférence de la roue, et où BK, KL, LN ſont des droites ſituées ſur la tangente BS égales aux dits arcs; tandis qu' EC, FD et MS ſont des lignes provenant du centre. Par conſéquent dans cette figure ſi le globe fût détaché en B de la roue tournante, au moment où le point B ſerait parvenu en E le globe ſerait en K et aurait parcouru la petite partie EK de la courbe décrite plus haut; mais à la fin du deuxième temps, lorſque B ſerait venu en F, le globe ſe trouverait en L et aurait alors parcouru la partie FL de la courbe. Et de même lorſque B ſerait venu en M, le globe aurait décrit la partie MN de la courbe. Or, ces parties de la ligne courbe doivent être conſidérées, immédiatement après la ſéparation du globe de la roue, comme identiques avec les droites EC, FD et MS qu'elles touchent; parce que les arcs peuvent à partir du point B être pris ſi menus que la petite différence qui exiſte entre les

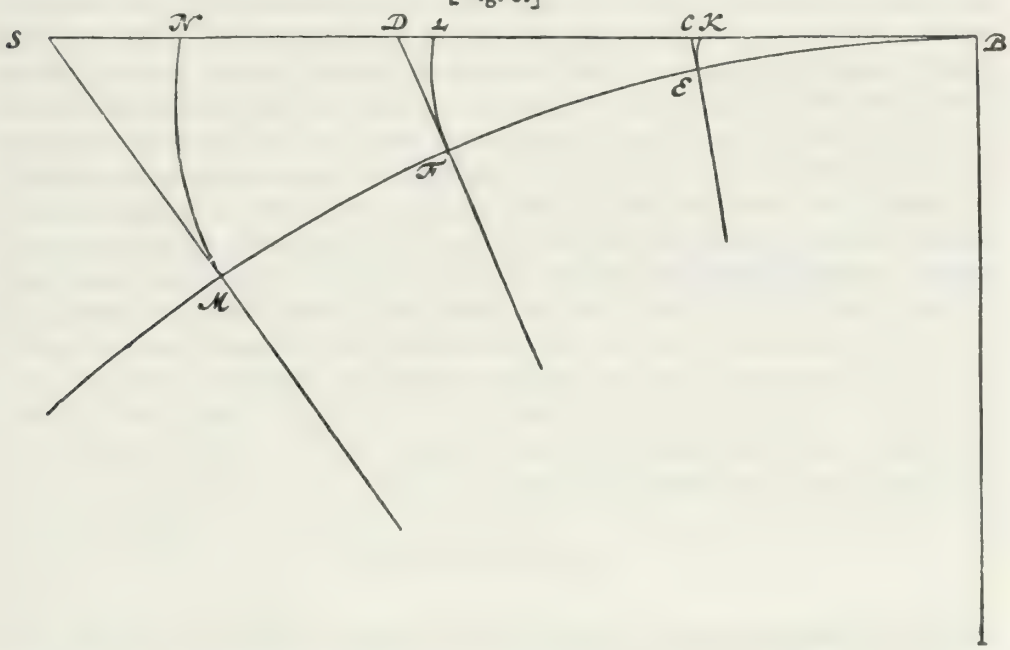
[1]) On trouve encore en marge: „vel sic, si BV non est tangens in B. Sit ergo BK tangens. Probetur deinde non esse. Ergo sola BV tangens erit."

hoc arcu minor. Æqualis autem eidem arcui eſt recta LHO inter contactum L & curvam BR intercepta. Itaque pars aliqua curvæ BR in qua eſt punctum O cadet intra angulum VBK, quamtumvis exiguus eſſe ponatur. Unde manifeſtum eſt rectam BK ſecare curvam, ideoque BV demum tangere eam in B [1]).

Cum itaque globus cum rota circumactus curvam deſcribere conetur reſpectu radii in quo ſitus eſt, ac talem quidem quæ radium contingat, apparet conatu hoc filum cui alligatus eſt, non ſecus tendi debere quam ſi ſecundum ipſum radium productum globus ire conetur.

Sunt autem & ſpatia quæ in dicta curva globus peracturus eſſet temporibus æqualiter creſcentibus, ſicut ſeries quadratorum ab unitate 1, 4, 9, 16, &c. ſi videlicet principium motus ſpatiaque minima attendamus; quod appoſita figura [Fig. 6] oſtendit, ubi arcus æquales in circumferentia rotæ accepti ſunt BE, EF, FM; &

[Fig. 6.]



in tangente BS rectæ dictis arcubus æquales BK, KL, LN; lineæ vero ex centro ſunt EC, FD, MS. Hic itaque ſi globus à circumeunte rota divelleretur in B; tum
p. 407. ubi | punctum B perveniſſet in E globus eſſet in K, particulamque curvæ ſupra deſcriptæ percurriſſet EK. poſt ſecundum vero tempus exactum cum B veniſſet in F, globus in L reperiretur, jamque curvæ partem FL percurriſſet. Similiterque cum B veniſſet in M, globus peregiſſet curvæ portionem MN. Hæ vero curvæ lineæ partes tanquam eædem cum rectis EC, FD, MS, quas contingunt, in principio ſeparationis globi ab rota, conſiderandæ ſunt. quoniam tam parvi arcus à

droites et ces courbes aura à leur longueur un rapport plus petit que tout rapport imaginable.

Par conſéquent les eſpaces EK, FL et MN doivent être conſidérés eux auſſi comme croiſſants ſuivant la ſérie des carrés depuis l'unité 1, 4, 9, 16. Et ainſi la force exercée par le globe attaché à la roue tournante ne ſera pas autre que s'il tendait à ſe mouvoir ſuivant la droite qui relie le centre à lui, et cela d'un mouvement accéléré par lequel il parcourrait en des temps égaux des diſtances qui croiſſent ſuivant les nombres 1, 3, 5, 7, etc. En effet, il ſuffit que cette progreſſion ſoit obſervée au commencement; car quand même il ſe mouvrait plus tard ſelon n'importe quelle autre loi ou par n'importe quel mouvement, ceci ne ferait aucune différence pour la tendance qui exiſte avant le commencement du mouvement. Mais cette tendance dont nous avons parlé eſt abſolument ſemblable à celle avec laquelle les corps pondérables ſuſpendus à un fil aſpirent à deſcendre. D'où nous conclurons auſſi que les forces centrifuges de corps mobiles inégaux, mais mus ſuivant des circonférences égales et avec la même viteſſe ſont entre elles comme les gravités ou quantités ſolides de ces corps. En effet, comme tous les corps pondérables tendent à tomber avec la même viteſſe et d'un mouvement accéléré identique, mais que cette tendance des corps a d'autant plus de force qu'ils ſont plus grands, il en doit être auſſi de même pour ceux qui tendent à s'éloigner d'un centre et dont la tendance, à ce que nous avons démontré, eſt parfaitement ſemblable à celle qui réſulte de la gravité. Mais tandis que la tendance à tomber eſt toujours la même pour un même globe toutes les fois qu'on le ſuſpend à un fil, celle d'un globe tournant avec une roue eſt au contraire plus petite ou plus grande ſelon que la roue tournera plus lentement ou plus rapidement. Reſte à examiner la grandeur ou quantité de chaque tendance pour diverſes viteſſes de la roue. Nous nous demanderons d'abord avec quelle viteſſe il faut faire tourner la roue propoſée pour que le globe tende ſon fil avec la même force que lorsqu'il y eſt verticalement ſuſpendu [1]).

Proposition I [2]).

Lorsque deux mobiles égaux parcourent en des temps égaux des circonférences inégales, la force centrifuge correſpondant à la plus grande circonférence ſera à celle de la plus petite circonférence dans un rapport égal à celui des circonférences elles-mêmes ou de leurs diamètres [3]).

---

[1]) C'était donc primitivement l'intention de Huygens d'aborder immédiatement le problème résolu dans la Prop. V (p. 275), mais il n'a pas donné suite à ce projet, intercalant d'autres Propositions.

puncto B accipi possunt ut differentiola quæ est inter rectas curvasque hasce, minorem rationem habeat ad ipsarum longitudinem, quavis ratione imaginabili.

Proinde igitur & spatia EK, FL, MN tanquam crescentia secundum seriem quadratorum ab unitate 1, 4, 9, 16, spectanda sunt. Atque ita conatus globi in circumeunte rota retenti haud alius erit, ac si secundum rectam quæ ex centro per ipsum ducitur progredi contenderet, idque motu accelerato quo æqualibus temporibus crescentia percurreret spatia secundum numeros 1, 3, 5, 7, &c. sufficit enim initio hanc progressionem observari; nam licet postea qualibet alia ratione vel motu feratur id ad conatum qui est ante inceptum motum nihil prorsus attinet. Is autem quem diximus planè similis conatus est ei quo gravia ex filo pendentia deorsum pergere nituntur. Unde etiam concludemus vires centrifugas mobilium inæqualium sed in circulis æqualibus æquali velocitate latorum esse inter se sicut mobilium gravitates, seu quantitates solidas. Sicut enim gravia omnia eadem celeritate conantur deorsum labi motuque similiter accelerato; tanto autem amplius momenti habet hic eorum conatus quanto majora fuerint; ita in iis quoque, quæ a centro tendere nituntur, evenire debet, quorum conatus plane
p. 408. similis | est ostensus conatui, qui est ex gravitate. Cum autem ejusdem globi idem semper sit conatus ad descendendum quoties ex filo suspenditur; contra verò globi in rota circumacti minor majorve conatus prout tardius celeriusve rota versabitur; superest ut magnitudinem seu quantitatem conatus cujusque in diversis rotæ celeritatibus inquiramus. Et primo quidem illud investigabimus, qua celeritate rotam propositam circumagi necesse sit ut æquè validè filum suum globus intendat, atque cum perpendiculariter ab illo est suspensus [1]).

[Propositio I.] [2])

Si mobilia duo æqualia æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri [3]).

---

[2]) La numération des Propositions et l'ordre dans lequel elles se suivent est l'œuvre des éditeurs des „Opuscula postuma". En effet, dans le Manuscrit la Prop. II de notre texte précédait la Prop. I. La raison de ce changement, comme les éditeurs le disent dans leur Préface, c'est qu'ils ont cru bien faire en suivant dans l'ordre (et même quelquefois dans la rédaction) des Propositions, autant que possible, les „Theoremata" sur la force centrifuge ajoutés par Huygens sans démonstrations vers la fin de son „Horologium oscillatorium"; ces „Theoremata" sont reproduits dans l'Appendice III qui suit (p. 315).

[3]) Dans le Manuscrit cette Proposition se lit comme il suit: „Si mobile idem æqualibus temporibus circulos inæquales percurrat, erit vis centrifuga in majori ad eam quæ in minori, sicut diameter circuli majoris ad minoris diametrum." Le changement a été apporté par les éditeurs des „Opuscula postuma"; comparez la note 2.

Conſidérons des circonférences ayant AB et AC [Fig. 7] pour rayons, ſuivant lesquelles deux mobiles égaux tournent en des temps égaux. Prenons ſur l'une et l'autre de très petits arcs ſemblables, BD et CE et ſur les tangentes aux points B et C les diſtances BF et CG égales chacune à l'arc correſpondant. Le mobile qui tourne ſuivant la circonférence BD a donc une tendance à s'éloigner du centre dans la direction de ſon fil d'un mouvement naturellement accéléré et à parcourir de ce mouvement l'eſpace DF en un certain laps de temps; quant à celui qui parcourt la circonférence CE, il a bien une tendance ſemblable à s'éloigner du centre, mais telle qu'en vertu de cette tendance il parcourrait dans le même temps l'eſpace EG. Par conſéquent dans le cas de la plus grande circonférence le fil eſt tendu d'autant plus fortement que dans celui de la plus petite que DF eſt plus grand que EG. Or, il apparaît que FD eſt à GE comme BF à CG, c'eſt-à-dire comme BA à AC. La force centrifuge correſpondant à la plus grande circonférence ſera donc à celle de la plus petite comme ces circonférences elles-mêmes ou leurs diamètres. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition II.

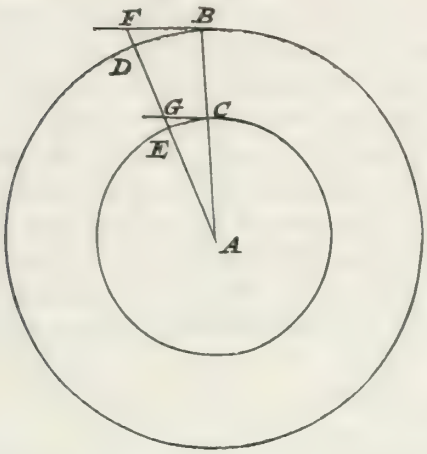
Lorsque des mobiles égaux tournent dans les mêmes ou d'égales circonférences ou roues avec des viteſſes différentes mais l'un et l'autre d'un mouvement uniforme, la force centrifuge du plus rapide ſera à celle du plus lent dans un rapport égal à celui des carrés des viteſſes. C'eſt-à-dire ſi les fils par lesquels les mobiles ſont retenus paſſent de haut en bas par le centre de la roue et qu'ils portent des poids par lesquels la force centrifuge des mobiles eſt tenue en échec et exactement équilibrée, ces poids ſeront entre eux comme les carrés des viteſſes.

Soit donné un cercle à centre A et rayon AB, ſuivant la circonférence duquel ſe meuve d'abord un mobile plus lent avec une viteſſe que repréſente la ligne N, enſuite un autre avec une plus grande viteſſe déſignée par O. Si l'on prend maintenant de très petits arcs BE et BF qui ſoient entre eux comme N eſt à O,

[1]) Cette phrase se lit dans la rédaction de Huygens: „Sint circuli quorum radij AB, AC per quos mobile idem æqualibus temporibus circumferatur."

Sint circuli quorum radii AB [Fig. 7], AC, per quos duo mobilia æqualia æqualibus temporibus circumferantur [1]). Accipiantur in utroque arcus minimi ſimiles BD, CE, & in tangentibus ad puncta B & C ſumantur BF, CG ſingulæ ſuis arcubus æquales. Mobile itaque in circulo BD circumlatum conatum habet recedendi a centro ſecundum extenſionem fili ſui motu accelerato naturaliter eoque motu permeandi ſpatium DF, certa temporis parte: in circulo autem CE circumiens ſimilem quidem habet à centro recedendi conatum, ſed quo parte illa temporis eadem conficiat ſpatium EG. Itaque quanto major eſt DF quam EG, tanto majore vi trahitur filum in majori circulo quam in minori; patet autem eſſe FD ad GE ſicut BF ad CG, hoc eſt, ut BA ad AC. Erit ergo vis centrifuga in majori circumferentia, | ad eam
p. 409.
quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri. Quod erat demonſtrandum [2]).

[Fig. 7.]



[Propositio II.]

Si mobilia æqualia in iiſdem ſive æqualibus circulis rotiſve gyrentur celeritatibus inæqualibus, verum utraque motu æquabili; erit vis recedendi à centro celerioris ad vim tardioris in duplicata ratione celeritatum. Hoc eſt, ſi fila quibus illa retinentur, per centrum rotæ deorſum educantur, ſuſtineantque pondera, quibus vis mobilium centrifuga inhibeatur, atque exacte adæquetur, erunt hæc pondera inter ſe, ſicut velocitatum quadrata.

Sit circulus cujus centrum A [Fig. 8] radius AB, in cujus circumferentia feratur primum mobile tardius [3]) celeritate, quam repræſentet linea N, deinde alterum celeritate majori, quæ ſit O. Sumtis jam arcubus minimis BE, BF, qui ſint inter ſe, ut N ad O, conſtat eadem temporis parte, qua mobile tardius

---

[2]) Dans le Manuscrit on trouve, au lieu des deux dernières phrases: „Ergo &c."

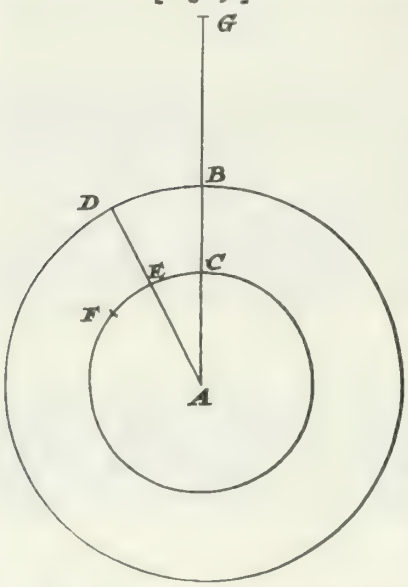
[3]) Dans le Manuscrit on lit „mobile tardius primum" au lieu de „primum mobile tardius".

il eſt évident que dans le même laps de temps pendant lequel le mobile le plus lent parcourra l'arc BE, le plus rapide parcourra l'arc BF. Suppoſons égales aux arcs BE et BF reſpectivement les droites BC et BD faisant partie de la tangente. Eh bien, il eſt établi que chacun des deux mobiles a une tendance à s'éloigner du centre dans la direction de ſon fil d'un mouvement accéléré; mais d'un mouvement tel que le mobile qui tourne le plus lentement, s'écarterait du point de la circonférence ſur lequel il eſt placé d'un eſpace égal à EC, celui qui eſt plus rapide au contraire d'un eſpace FD dans le même temps. Le mobile plus rapide tire donc d'autant plus fortement que le mobile plus lent, que DF eſt plus grand que CE. Mais puisque nous avons pris des arcs BE et BF très petits, le rapport DF : CE doit être eſtimé égal à $DB^2 : CB^2$, comme nous l'avons expliqué un peu plus haut [1]); et comme DB eſt à BC, ainſi l'arc FB eſt à BE, c. à. d. dans le rapport O : N. Par conſéquent on aura $FD : EC = O^2 : N^2$; $O^2 : N^2$ ſera donc auſſi le rapport de la force centrifuge du mobile plus rapide à la force du mobile plus lent. C. Q. F. D.

Proposition III.

Lorsque deux mobiles égaux ſe meuvent avec la même viteſſe ſuivant des circonférences inégales, leurs forces centrifuges ſeront inverſement proportionnelles aux diamètres, de ſorte que dans le cas de la plus petite circonférence la force nommée eſt la plus grande.

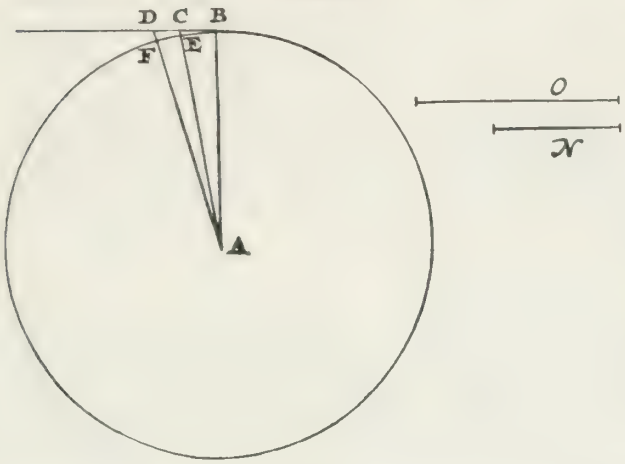
[Fig. 9.]



Soient donnés autour du même centre A [Fig. 9] des cercles inégaux à rayons AB et AC; des mobiles égaux ſe meuvent ſur leurs circonférences avec une viteſſe égale, c'eſt-à-dire que dans le temps où ſur la plus grande circonférence un certain arc BD eſt parcouru, un arc CF égal à BD eſt parcouru ſur la plus petite circonférence. Je dis que la force centrifuge du mobile qui circule ſur la circonférence BD ſera à celle que poſſède celui qui tourne ſur la circonférence CF comme le rayon AC eſt à AB. Tirons le rayon AD qui coupe la plus petite circonférence en E; et ſoit AG troiſième proportionnelle aux deux longueurs AC et AB. Imaginons-nous en outre qu'un certain mobile égal à l'un et l'autre des deux tourne ſur la circonférence CF avec une viteſſe telle qu'il parcoure l'arc CE dans le même temps dans lequel les deux autres décrivent les

abſolvet arcum BE, illud quod celerius eſt percurſurum arcum BF; ſint arcubus BE, BF ſingulis æquales in tangente poſitæ BC, BD. Itaque & conſtat utrique mobili ineſſe conatum recedendi a centro ſecundum extenſionem fili ſui motu accelerato; ſed quo motu mobile, quod tardius fertur, receſſurum ſit à puncto circumferentiæ, cui incumbit, quantum eſt ſpatium EC; illud vero quod celerius eſt, tempore æquali per ſpatium FD. Quanto igitur major eſt DF quam CE, tanto validius trahit mobile celerius tardiore. At quoniam arcus BE, BF minimos ſumſimus, eadem cenſenda eſt ratio DF ad CE, quæ quadrati DB ad CB, ſecundum ea quæ paulo ante explicavimus [1]; eſtque ut DB ad BC ita arcus FB ad BE, hoc eſt, ita O ad N; ergo erit ut quadratum O ad quadratum N, ita FD ad EC, atque ita proinde vis centrifuga celerioris mobilis ad vim tardioris. Q. E. D.

[Fig. 8.]



p. 410.

[Propositio III.]

Si duo mobilia æqualia in circulis inæqualibus æquali velocitate ferantur, erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum, ita ut in minori circumferentia dicta vis major exiſtat.

Sunto circa idem centrum A [Fig. 9] circuli inæquales, quorum radii AB, AC; & ferantur in circumferentiis eorum mobilia æqualia celeritate æquali, hoc eſt, ut quo tempore in majori circumferentia percurritur arcus aliquis BD, eodem tempore in minori percurratur arcus CF ipſi BD æqualis longitudine. Dico vim centrifugam mobilis quod in circumferentia BD circumfertur, fore ad eam quam habet circumlatum in circumferentia CF ſicut radius AC ad AB. Ducatur radius AD ſecans minorem circumferentiam in E; & ſit duabus AC, AB tertia proportionalis AG. Porro intelligatur mobile quoddam utrivis duorum æquale circumferri in circumferentia CF ea celeritate, ut eodem tempore abſolvat arcum CE, quo duo alia arcus BD & CF. Illius igitur aſſumti mobilis celeritas ad celeritatem

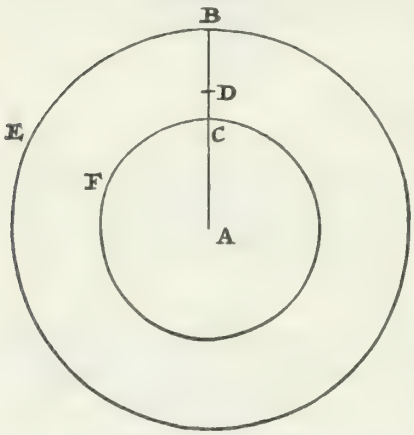
[1]) Comparez les pp. 265 et 267. Le même théorème a déjà été appliqué à la p. 261.

arcs BD et CF. La viteſſe de ce mobile ſuppoſé ſera donc à celle de l'un et l'autre de ceux-là comme l'arc CE eſt à l'arc BD, c. à d. dans le rapport AC : AB. Or la force centrifuge du mobile qui parcourt l'arc BD ſera à la force du mobile ſuppoſé
* Prop. I. qui en même temps parcourt l'arc CE, comme BA eſt à AC *. Mais la force centrifuge du mobile ſuppoſé ſera à la force de celui qui en même temps parcourt l'arc
* Prop. II. CF dans un rapport égal à $AC^2 : AB^2$ *, en d'autres termes, ce rapport ſera égal à AC : AG, parce que nous avons fait voir que leurs viteſſes ſont dans le rapport AC : : AB. En combinant les deux proportions on trouvera donc que la force centrifuge du mobile qui parcourt l'arc BD eſt à la force de celui qui pendant le même temps parcourt l'arc égal CF, comme BA eſt à AG, c'eſt-à-dire comme AC eſt à AB; ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IV.

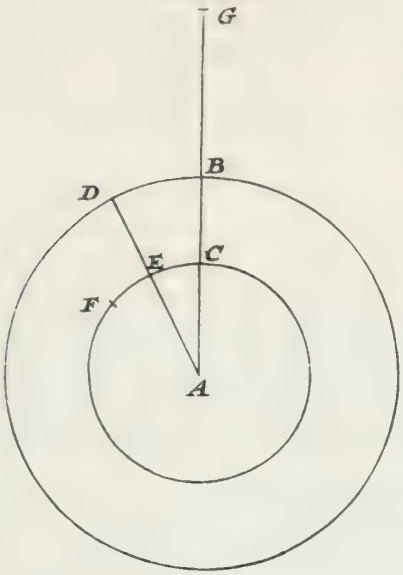
Lorſque deux mobiles égaux, décrivant des circonférences inégales, ont une force centrifuge égale, le temps de révolution dans la plus grande circonférence ſera au temps de révolution dans la plus petite dans un rapport égal à la racine carrée du rapport des diamètres.

[Fig 10.]



Soient données des circonférences inégales BE et CF [Fig. 10] autour du même centre A, à rayons AB et AC, et ſuppoſons que ſur chacune d'elles circule un mobile de telle manière que la force centrifuge ſoit la même pour les deux; je dis que le temps dans lequel la circonférence du cercle BE eſt parcourue eſt au temps dans lequel la circonférence CF eſt parcourue dans un rapport égal à la racine carrée du rapport AB : AC, c'eſt-à-dire, comme BA eſt à AD, moyenne proportionnelle entre AB et AC. En effet, ſi l'on imagine un troiſième mobile égal aux deux autres, qui parcoure la circonférence CF dans le même temps dans lequel l'un des deux parcourt la circonférence BE, la
* Prop. I. force centrifuge du mobile ſuppoſé ſera à celle de ce dernier comme AC eſt à AB *. Or, les forces centrifuges des deux premiers mobiles ſont par hypothèſe égales; la force centrifuge du mobile ſuppoſé ſera donc à la force de celui qui par hypothèſe parcourt la circonférence CF comme AC eſt à AB; et les forces centrifuges des mobiles qui ſe meuvent ſur la même circonférence ſont dans un rapport égal
* Prop. II. au carré du rapport des viteſſes *. La viteſſe du mobile ſuppoſé ſera donc à celle du mobile qui par hypothèſe tournait déjà ſur la circonférence CF, comme AC eſt à

[Fig. 9.]



alterutrius horum erit, ut arcus CE ad arcum BD, hoc eſt, ut AC ad AB. Erit autem vis centrifuga mobilis, quod arcum BD percurrit, ad vim mobilis aſſumti, quod eodem tempore percurrit arcum CE, ut BA ad AC*. * [Prop. I.]
Sed vis centrifuga aſſumti mobilis erit ad vim ejus, quod eodem tempore percurrit arcum CF, in duplicata ratione AC ad AB*, hoc * [Prop. II.]
eſt, erit eadem quæ AC ad AG, quoniam celeritates eorum oſtendimus eſſe, ut AC ad AB. Ex æqua|li igitur erit vis centrifuga mobilis quod percurrit arcum BD
p. 411. ad vim ejus quod eodem tempore percurrit arcum æqualem CF, ut BA ad AG, hoc eſt, ut AC ad AB; quod erat demonſtrandum.

[Propositio IV.]

Si mobilia duo æqualia in circumferentiis inæqualibus circumlata vim centrifugam æqualem habuerint, erit tempus circuitus in majori circumferentia ad tempus circuitus in minori in ſubduplicata ratione diametrorum.

Sunto circuli inæquales BE, CF [Fig. 10] circa idem centrum A, quorum radii AB, AC; & in utroque mobile gyretur, ita ut eadem ſit utrobique vis centrifuga; dico tempus quo circumferentia circuli BE percurritur, eſſe ad tempus, quo percurritur circumferentia CF, in ſubduplicata ratione AB ad AC, hoc eſt, ſicut BA ad AD mediam proportionalem inter AB, AC. Si enim tertium mobile intelligatur aliis iſtis æquale, quod eodem tempore percurrat circumferentiam CF, quo alterum abſolvit circumferentiam BE, erit aſſumti mobilis vis centrifuga ad vim hujus ut AC ad AB *. Ponuntur autem * [Prop. I.]
mobilium duorum priorum vires centrifugæ æquales; ergo aſſumti mobilis vis centrifuga erit etiam ad vim ejus, quod in circumferentia CF currere poſitum eſt, ut AC ad AB; ſunt autem vires centrifugæ eorum quæ in eadem circumferentia moventur in duplicata ratione velocitatum *. Ergo velocitas aſſumti mobilis erit * [Prop. II.]
ad velocitatem ejus, quod primo poſitum eſt revolvi in circumferentia CF, ſicut AC ad AD, vel ut AD ad AB. Velocitatibus autem contraria ratione reſpon-
p. 412. dent tempora lationum per eandem circumferentiam; ergo tempus cir|cuitus

AD ou AD à AB. Mais les temps de révolution, dans la même circonférence, ſont inverſement proportionnels aux viteſſes; par conſéquent le temps de révolution du mobile ſuppoſé, auquel eſt égal par hypothèſe le temps de révolution du mobile parcourant la circonférence BE, ſera au temps de révolution du mobile qui, à ce que nous avons dit, parcourait dès le commencement la circonférence CF comme AB eſt à AD. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition V.

Lorsqu'un mobile décrit une circonférence de cercle avec la viteſſe qu'il acquiert en tombant d'une hauteur égale à la quatrième partie du diamètre, il aura une tendance à s'éloigner du centre égale à ſa gravité, c'eſt-à-dire il tirera le fil par lequel il eſt retenu avec la même force que lorsqu'il y eſt ſuſpendu[1]).

Soit donné un cercle [Fig. 11] à centre A et à rayon AB, parallèle à l'horizon, ſur la circonférence duquel ſe meuve un mobile d'un mouvement uniforme, avec une viteſſe égale à celle qu'il acquerrait en tombant verticalement d'une hauteur égale à la moitié de AB, c'eſt-à-dire à CB; je dis que la corde par laquelle le mobile eſt retenu ſera tendue avec la même force que s'il était librement ſuſpendu à cette même corde.

Soit BD une tangente à la circonférence, égale au rayon AB.

Puisque le mobile décrit par hypothèſe la circonférence de cercle avec la viteſſe qu'il acquiert en tombant de la hauteur CB, c'eſt-à-dire avec laquelle il parcourrait d'un mouvement uniforme, dans le même temps dans lequel il a parcouru CB en tombant, un eſpace BD double de BC, il s'enſuit que ſi on le détache au point B, il parcourra dans le temps nommé ledit eſpace BD d'un mouvement uniforme. Conſidérons une très petite partie BE de cette longueur BD et tirons par le centre la droite EAH coupant la circonférence en F. Soit en outre, comme le carré de DB eſt au carré de BE, ainſi BC à CG en longueur. Par conſéquent ſi le

[1]) Il s'agit de démontrer que, BE étant infiniment petit, le temps nécessaire pour parcourir FE d'un mouvement uniformément accéléré, avec l'accélération g, est égal au temps qu'emploie le mobile à parcourir l'arc BF, ou bien la droite BE, avec la vitesse donnée.

Voici la marche de la démonstration :

(1) Le mobile a par hypothèse une vitesse v telle qu'il peut parcourir une distance BD d'un mouvement uniforme dans le même temps dans lequel il a pu tomber d'une hauteur CB (chute qui lui donne la vitesse v).

(2) Il s'ensuit que le temps dans lequel le mobile peut parcourir BE avec la même vitesse v est égal au temps dans lequel il peut tomber d'une hauteur $CG = BC\left(\frac{BE}{BD}\right)^2$.

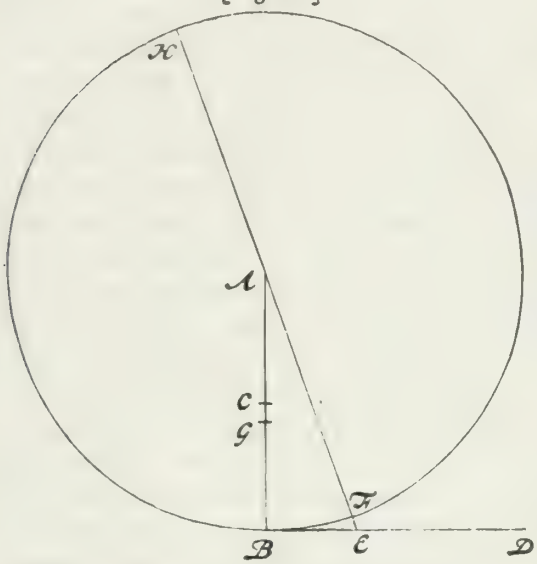
aſſumti mobilis, cui æquale eſt ex hypotheſi tempus circuitus mobilis euntis per peripheriam BE, erit ad tempus circuitus mobilis quod in circumferentia CF initio ferri dictum eſt, ut AB ad AD. Quod erat demonſtrandum.

[Propositio V.]

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis, habebit conatum à centro recedendi æqualem ſuæ gravitati, hoc eſt, æque validè filum, quo retinetur, trahet, atque cum ex illo ſuſpenſum eſt [1]).

Eſto circulus centro A [Fig. 11] radio AB horizonti parallelus, in cujus circumferentia feratur mobile æquabili motu, velocitate autem, quantam acquireret cadens perpendiculariter ex altitudine æquali dimidiæ AB, quæ ſit CB; dico vi centrifuga æquè validè tractum iri funem, quo mobile detinetur, ac ſi liberè ex eodem fune ſuſpenſum eſſet.

[Fig. 11.]



Sit circuli tangens BD æqualis radio AB.

Quoniam igitur mobile currit in circumferentia circuli ea celeritate, quam acquirit cadens ex altitudine CB, hoc eſt, qua tranſiret motu æquabili ſpatium BD ipſius BC duplum æquali tempore, quo decidit per CB; ſequitur, ſi in B dimittatur, percurſurum dicto tempore dictum ſpatium BD æquabili motu. Accipiatur ipſius BD pars minima quæpiam BE, & ducatur per centrum recta EAH ſecans circumferentiam in F. Sit porro ut quadratum DB ad quadratum BE, ita BC ad CG longitudine. Hinc igitur ſi tempus

(3) Or, BC $= \frac{1}{2}r$ (donc BD $= r$), par hypothèse; r étant le rayon du cercle. Donc FE ou $\frac{BE^2}{2r} = \frac{1}{2}r\left(\frac{BE}{r}\right)^2 = CG$.

(4) Le mobile peut donc tomber d'une hauteur FE, c. à. d. parcourir FE d'un mouvement uniformément accéléré, avec l'accélération g, dans le même temps dans lequel il parcourt BE (ou BF) d'un mouvement uniforme. C. Q. F. D.

temps pendant lequel le mobile tombe d'un mouvement accéléré ſelon CB eſt par hypothèſe repréſenté par la ligne BD, BE ſera le temps du mouvement accéléré ſelon CG. Mais la même longueur BD ſera auſſi le temps pendant lequel le mobile parcourrait cette même longueur BD d'un mouvement uniforme pareil à celui qu'il poſſède en circulant ſur la circonférence; en effet ce temps eſt par hypothèſe égal au temps du mouvement accéléré ſelon CB. BE ſera donc auſſi le temps dans lequel il parcourt cette même longueur BE avec la viteſſe qu'il poſſède en vertu de ſa révolution. D'où il apparaît que l'eſpace CG eſt parcouru d'un mouvement accéléré partant du repos dans le même temps que l'eſpace BE d'un mouvement uniforme avec la viteſſe que le mobile poſſède par hypothèſe en décrivant la circonférence. Il appert en outre que, ſi le mobile eſt détaché en B, il parviendra d'un mouvement uniforme en E au même inſtant où le point B de la circonférence ſera venu en F; car la droite BE doit être cenſée égale à l'arc BF parce que BE eſt ſuppoſée infiniment petite. Nous dirons donc qu'il a une tendance à s'éloigner du point B d'un mouvement naturellement accéléré (car il a été démontré que ce mouvement eſt tel [1])) en parcourant une diſtance FE dans le même temps dans lequel il parcourrait l'eſpace BE d'un mouvement uniforme avec la viteſſe qu'il poſſède en vertu de ſa révolution, c'eſt-à-dire dans le temps où il parcourrait d'un mouvement accéléré partant du repos la diſtance CG. C'eſt pourquoi, dès qu'il ſera démontré que les eſpaces CG et FE ſont égaux, il ſera établi que la tendance du mobile ſuſpendu à choir d'un mouvement accéléré, eſt abſolument égale à la tendance du même mobile par laquelle, lorsqu'il décrit ſa circonférence, il s'efforce à s'éloigner de ſon fil d'un mouvement ſemblablement accéléré; parce qu'évidemment la tendance à des mouvements accélérés eſt égale lorsque des diſtances égales ſeraient parcourues de ces mouvements dans les mêmes laps de temps. Or l'égalité de CG et de FE ſe démontre de la façon ſuivante: comme HE eſt à EB ainſi EB eſt à EF, partant comme le carré de HE eſt au carré de EB, ainſi HE eſt à EF en longueur; d'où l'on tire en prenant les quatrièmes parties des termes antécédents: comme le carré de AF eſt à celui de EB, ainſi la quatrième partie de HE laquelle doit être eſtimée égale à $\frac{1}{4}$HF, c'eſt-à-dire BC, eſt à FE. Mais comme le carré de AF eſt au carré de BE, en d'autres termes comme le carré de DB eſt à celui de BE, ainſi d'après notre conſtruction BC eſt à CG en longueur. BC ſera donc à CG comme la même longueur BC eſt à FE, et par conſéquent FE et CG ſont égales entre elles; la propoſition eſt donc démontrée.

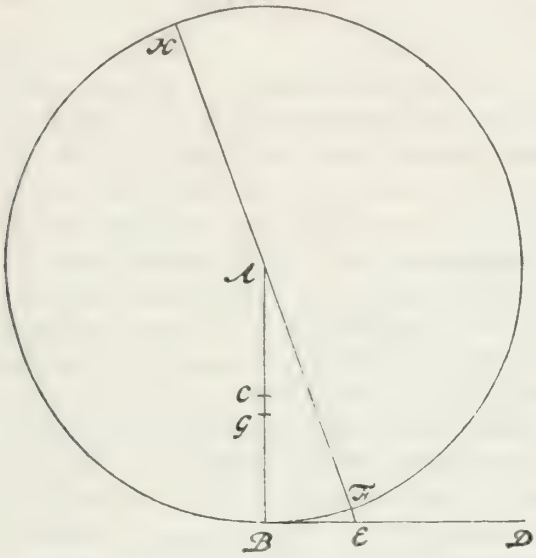
Proposition VI.

Étant donnée la diſtance qu'un mobile parcourt en un certain temps, par exemple en une ſeconde, en tombant verti-

[1]) Voir le deuxième alinéa de la p. 267.

quo cadit motu accelerato per CB, repræſentari ponamus lineâ BD, erit BE
p. 413. tem|pus motus accelerati per CG. Sed eadem BD erit quoque tempus quo tranſiret ipſam BD motu æquabili quantumque habet in circumferentia currens; nam hoc tempus ex hypotheſi æquale eſt tempori motus accelerati per CB. Itaque & BE tempus erit quo tranſeat ipſum BE ſpatium celeritate, quam habet, vertiginis. Unde conſtat æquali tempore peragi ſpatium CG motu è quiete accelerato, & ſpatium BE motu æquabili cum celeritate, quam poſitum fuit habere mobile in circumferentia currens. Conſtat porro ſi mobile dimittatur in B, perventurum motu æquabili in E ſimul ac punctum circumferentiæ B acceſſerit ad F; nam recta BE ipſi

[Fig. 11.]



arcui BF æqualis cenſenda eſt, eo quod BE infinitè parva intelligitur. Itaque conatum ei ineſſe motu accelerato naturaliter (nam talem eſſe oſtenſum eſt [1])) dicemus recedendi a puncto B, per ſpatium FE tempore eodem quo celeritate ſuæ vertiginis tranſiret ſpatium BE motu æquabili, hoc eſt, tempore eo quo percurreret motu è quiete accelerato ſpatium CG. Quare ſi oſtenſum fuerit ſpatia CG & FE eſſe æqualia, conſtabit conatum mobilis ſuſpenſi ad deſcendendum motu accelerato, æqualem plane eſſe conatui ejuſdem mobilis, quo in circumferentia verſatum nititur a filo ſuo recedere motu ſimiliter accelerato; quoniam videlicet conatus ad motus acceleratos tunc æqualis eſt, cum ſpatia æqualia æqualibus temporibus iiſ motibus peragenda forent. Eſſe autem CG, FE æquales ſic oſtenditur: ut HE ad EB ita eſt EB ad EF, ideoque ſicut quadratum HE ad quadratum EB, ita eſt HE ad EF longitudine. unde ſumtis antecedentium ſubquadruplis erit, ſicut quadratum AF ad quadratum EB, ita pars quarta HE, cui æqualis cenſenda eſt $\frac{1}{4}$ HF, hoc eſt BC ad
p. 414. FE; ſed ut quadratum AF ad quadratum BE, ſive ut quadratum |DB ad quadratum BE, ita eſt ex conſtructione BC ad CG longitudine. Ergo erit BC ad CG ut eadem BC ad FE, ideoque FE, CG inter ſe æquales; quare conſtat propoſitum.

[Propositio VI.]

Data altitudine quam certo tempore, puta ſecundi minuti unius, mobile emetitur, cadendo ex quiete perpendiculariter; invenire circulum in cujus circumferentia mobile circumiens

calement en partant du repos; trouver un cercle tel que ſi le mobile parcourt ſa circonférence horizontalement en accompliſſant ſa révolution également en une ſeconde, il ait une force centrifuge égale à ſa gravité.

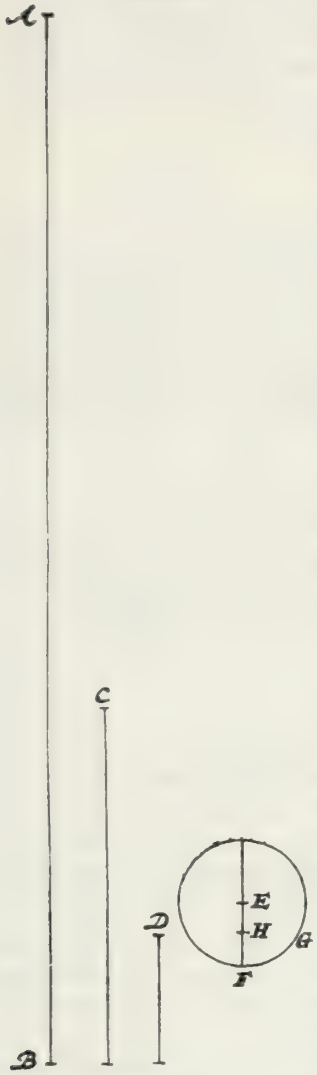
Soit donnée la hauteur AB qu'un mobile qui tombe en partant du repos parcourt p. e. dans le temps d'une ſeconde. Comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre ainſi ſoit AB à la ligne C, et ainſi celle-ci à une troiſième D. Décrivons alors une circonférence EFG d'un diamètre égal à cette ligne D; je dis que c'eſt la circonférence cherchée. En effet, diviſons le rayon EF en deux parties égales par le point H. Si le mobile décrit d'un mouvement uniforme la circonférence FG avec la viteſſe qu'il acquiert en tombant de la hauteur HF, il aura une force
* Prop. V. centrifuge égale à ſa gravité *. Par conſéquent dès que nous aurons démontré qu'avec la viteſſe nommée la circonférence totale FG eſt parcourue dans le temps d'une ſeconde, il ſera établi que le cercle EFG ſatisfait à la propoſition. Il eſt certain que le mobile parcourra d'un mouvement uniforme et avec la viteſſe qu'il a acquiſe à la fin de ſa chute ſelon HF un eſpace double de cette même longueur HF dans le même temps pendant lequel il eſt tombé le long de HF; lors donc qu'il décrira avec ladite viteſſe acquiſe la circonférence FG d'un mouvement uniforme, le temps de ſa révolution ſera au temps de ſa chute ſelon HF, comme la circonférence FG eſt au double de HF, en d'autres termes à EF. Et ſi nous prenons le double des termes conſéquents, le temps du mouvement uniforme ſuivant la circonférence FG ſera au double du temps de la chute ſelon HF, c'eſt-à-dire au temps de la chute ſelon D (car D eſt le quadruple de HF) comme la circonférence FG eſt au double de FE, c'eſt-à-dire à D; en d'autres termes, comme C eſt à D (car néceſſairement C eſt égale à la circonférence FG elle-même), ou bien comme AB eſt à C. Mais comme AB eſt à C, ainſi eſt le temps de la chute ſelon AB, c'eſt-à-dire le temps d'une ſeconde, au temps de la chute ſelon D; parce que, comme on ſait, le rapport AB : D eſt le carré du rapport AB : C. Par conſéquent la dite période du mouvement uniforme ſuivant la circonférence FG ſera au temps de la chute ſelon D, comme l'eſpace d'une ſeconde eſt à ce même temps de la chute ſelon D. La dite période de révolution ſuivant la circonférence FG ſera donc égale à l'eſpace d'une ſeconde; ce qu'il fallait démontrer.

Comme le calcul [1]) fait voir que la diſtance AB qu'un mobile tombant vertica-

[1]) Au lieu de „calculus" Huygens avait d'abord écrit „experientia". Il ajouta en marge: „Imo calculus, ut postea inveni, postquam propoſitio casus perpendicularis ad casum per cycloïdem sive penduli vibrationem innotuit"; les éditeurs ont remplacé cette remarque par un renvoi (voir p. 281, en marge) à l'„Horologium oscillatorium" (Paris, 1673). D'après la Prop. XXV de la Deuxième Partie de cet ouvrage les oscillations cycloïdales simples d'un pendule de longueur l sont isochrones et s'accomplissent dans le temps $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

horizontaliter, atque uno item ſecundo circuitum abſolvens, habeat vim centrifugam gravitati ſuæ æqualem.

[Fig. 12.]



Sit data altitudo AB, [Fig. 12] quam perlabitur mobile cadens ex quiete tempore v. gr. unius ſecundi. Fiat ut circumferentia circuli ad diametrum ſuum, ita AB ad lineam C, & ita hæc ad tertiam D. Et deſcribatur diametro æquali ipſi D circulus EFG, dico hunc eſſe eum qui poſtulabatur. Dividatur enim radius EF bifariam in H. Mobile itaque in circulo FG ſi currat velocitate quam acquirit cadendo ex altitudine HF motuque æquabili, habebit vim centrifugam æqualem ſuæ gravitati *. Ideoque ſi tantum oſtenderimus dicta velocitate percurri ſemel circumferentiam totam FG tempore unius ſecundi, jam conſtabit circulum EFG propoſito ſatisfacere. Conſtat mobile motu æquabili atque ea celeritate quam acquiſivit in fine caſus per HF, tranſiturum ſpatium ipſius HF duplum, eodem tempore quo cecidit per HF. ſi ergo dicta acquiſita celeritate feratur motu æquabili per circumferentiam FG, erit tempus quo eam abſolvet ad tempus caſus per HF, ſicut circumferentia FG ad duplam HF ſive ad EF. Et ſumtis conſequentium duplis erit tempus motus æquabilis per circumferentiam FG ad tempus duplum caſus HF, hoc eſt ad tempus caſus per D (nam D eſt quadrupla HF) ſicut circumferentia FG ad duplam FE, ſive ad D; hoc eſt, ſicut C ad D (nam neceſſario C ipſi circumferentiæ FG æqualis eſt) hoc eſt, ſicut AB ad C. Sed ut AB ad C ita eſt tempus caſus per AB, hoc eſt tempus unius ſecundi ad tempus caſus per D; quoniam ſcilicet AB ad D duplicata eſt ratio ejus, quæ AB ad C; igitur tempus dictum motus æquabilis per circumferentiam FG erit ad tempus caſus per D, ut tempus unius ſecundi ad idem tempus caſus per D. Ergo dictum tempus per circumferentiam FG erit æquale tempori unius ſecundi. quod oſtendere neceſſe erat.

* [Prop. V.]

p. 415.

Quum calculus [1]) doceat altitudinem AB quam uno ſecundo mobile cadens per-

de sorte qu'on peut calculer *g* après avoir mesuré la durée d'une oscillation. Dans la Quatrième Partie (Prop. XXVI) Huygens dit qu'on peut trouver l'espace parcouru par un corps tombant en un certain temps „cognita longitudine penduli ad secunda scrupula, absque experimento, per certam consequentiam".

* Voir l'Horol. oscill. P. 155.[1])

lement parcourt en une ſeconde eſt de 15 pieds de Rhynlande et de $7\frac{1}{2}$ pouces *; et comme AB eſt à C comme une circonférence eſt à ſon diamètre, c'eſt-à-dire comme 22 à 7, ſuivant Archimède, partant que le rapport de C à D, c'eſt-à-dire au diamètre de la circonférence FG a la même valeur, ce diamètre ſera de 19 onces [2]) à peu près; dont la moitié eſt 9 onces 6 lignes. Par conſéquent ſi un mobile quelconque accomplit dans l'eſpace d'une ſeconde chacune de ſes révolutions ſuivant une circonférence dont le rayon eſt de $9\frac{1}{2}$ onces, la force centrifuge ſera égale à ſa gravité.

Lemme I.

Lorsqu'un poids C eſt maintenu ſur un plan incliné AB [Fig. 13] par un poids D librement ſuſpendu, et que la corde CE eſt parallèle à l'horizon, la gravité D ſera à la gravité C comme la perpendiculaire BF eſt à la baſe FA. Ceci eſt évident d'après la Mécanique. Par conſéquent, lorsque la droite BF eſt priſe égale à FA, la gravité D devra être égale à C.

Lemme II.

Lorsque des poids égaux ſont maintenus ſur des plans diverſement inclinés [Fig. 14] par des lignes parallèles à l'horizon, les puiſſances équilibrantes ſeront entre elles comme les tangentes des angles ſuivant lesquels les plans ſont inclinés par rapport au plan de l'horizon.

Proposition VII [4]).

Sur la ſurface courbe d'un conoïde parabolique à axe vertical, toutes les révolutions d'un mobile parcourant des circonférences parallèles à l'horizon, qu'elles ſoient grandes ou petites, ſeront accomplies dans des périodes égales; chacune

---

[1]) D'après l'Hor. oscill. p. 155 (4ième Partie, Prop. XXVI) $\frac{1}{2}g = \left(14 + \frac{9}{12} + \frac{6}{144}\right)$ „pieds horaires" $= \frac{355}{24} \times \frac{881}{864}$ pieds parisiens $= \frac{355}{24} \times \frac{881}{864} \times \frac{144}{139}$ pieds de Rhynlande. On trouve, en effectuant le calcul, $\frac{1}{2}g = \left(15 + \frac{7\frac{1}{2}}{12}\right)$ pieds de Rh. Dans le Manuscrit Huygens avait écrit d'abord un autre nombre de pieds (biffé et illisible) qu'il corrigea ensuite en $15\frac{6}{10}$, puis en $15.7\frac{1}{2}$ poll. Comme le pied de Rh. = 0,3139 M, cette dernière valeur correspond à $g = 9{,}81$ M.

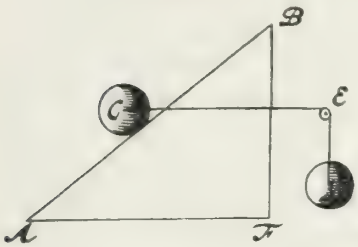
[2]) „Uncia" (once) est ici un autre nom pour le pouce de Rhynlande. On a, en prenant $\pi = \frac{22}{7}$, $\frac{15 \times 12 + 7\frac{1}{2}}{\pi^2} = 18{,}93$.

labitur esse pedum Rhenoland. 15. $7\frac{1}{2}$ pollicum *, cumque sit AB ad C ut circumferentia ad diametrum, hoc est, ut 22 ad 7, secundum Archimedem, atque ita quoque C ad D sive ad diametrum circuli FG; fiet hæc diameter 19 unciarum [2]) proximè; cujus dimidium unciæ 9. lin. 6. Itaque si mobile aliquod tempore secundi unius circuitus singulos absolvat in circumferentia, cujus quæ ex centro est $9\frac{1}{2}$ unciarum vis centrifuga [3]) suæ gravitati æquabitur.

* [Vide Horol. oscill. P. 155. [1])]

[Lemma I.]

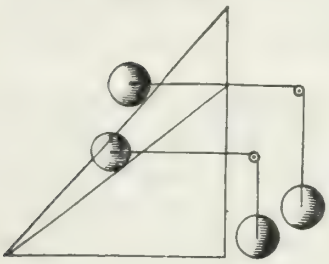
[Fig. 13.]



Si pondus C sustineatur in plano inclinato AB [Fig. 13] a pondere D libere pendente, sitque funis CE horizonti parallelus; erit gravitas D ad [gravitatem] C, sicut perpendicularis BF ad basin FA. [Constat] ex Mechanicis. Hinc si BF æqualis ponatur FA, debebit gravitas D ipsi C æqualis esse.

p. 416. | [Lemma II.]

[Fig. 14.]



Si pondera æqualia super planis diversimode inclinatis sustineantur [Fig. 14] retenta per lineas horizonti parallelas, erunt potentiæ sustinentes inter se sicut tangentes angulorum, quibus plana ad horizontis planum inclinantur.

[Propositio VII [4]).]

[In curva [5]) superficie conoidis Parabolici, quod axim ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis circumferentias Horizonti parallelas percurrentis, sive parvæ, sive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peragentur [6]): quæ tem-

[3]) Dans le Manuscrit: „cujus quae ex centro est unciarum $9\frac{1}{2}$ ejus vis centrifuga".

[4]) La Prop. VII ne se trouve pas dans le Manuscrit. Il en est de même des Propositions XII, XIII, XIV, XV et XVI. Mais toutes ces Propositions se lisent (sans démonstrations) dans l'„Horologium oscillatorium", aux pages 159—161 de l'édition de 1673. Elles y portent respectivement les numéros 6, 9, 10, 11, 12 et 13; comparez l'Appendice III qui suit (p. 315). La démonstration de la Prop. VII est due à de Volder et Fullenius; il en est de même de celles des Propositions XII, XIII, XIV et XV. Comparez la note 2 de la p. 267.

[5]) Dans l'Horologium Osc. „cava" au lieu de „curva".

[6]) Dans l'Horologium Osc. „peraguntur" au lieu de „peragentur".

d'elles étant égale au temps de deux oſcillations d'un pendule dont la longueur eſt la moitié du latus rectum de la parabole engendrante.

Soit donnée une parabole HDB [Fig. 15] qui par ſa révolution autour de l'axe BK engendre un conoïde parabolique. Prenons ſur cet axe la longueur BA égale à $\frac{1}{4}$ du latus rectum [1]), l'ordonnée correſpondante AD ſera égale à la moitié du latus rectum. Suppoſons qu'un corps en D tourne autour de l'axe AB avec une viteſſe telle que la force centrifuge devienne égale à la gravité; cette force, attendu que l'angle ADE eſt la moitié d'un angle droit, maintiendra le corps au point D *. Mais ſi un corps tourne ailleurs, par exemple en H, avec le centre K et le rayon KH, la force centrifuge par laquelle il eſt maintenu au point H, ſera égale à la force horizontale agiſſant ſelon HK par laquelle le mobile pourra être maintenu ſur un plan HF tangent au paraboloïde. Or, cette dernière force ſera d'après le premier Lemme à la force de la gravité comme HG eſt à GF, ou bien, à cauſe de triangles ſemblables, parce que HL eſt ſuppoſée perpendiculaire à HF, comme HK eſt à KL, en d'autres termes, comme HK eſt à AD, attendu que d'après la nature de la parabole KL eſt toujours égale à la moitié du latus rectum. La force centrifuge par laquelle le corps dans ſa rotation eſt maintenu en H eſt donc à la gravité du corps, ou bien à la force centrifuge en D, comme HK eſt à DA. C'eſt pourquoi, d'après l'inverſe de la première propoſition [2]), ils parcourront leurs circonférences dans le même temps.

* Lemme I.

Quant au temps dans lequel les révolutions s'accompliſſent, il ſera déterminé de la façon ſuivante. Puisque nous avons ſuppoſé que le corps D tourne de telle manière qu'il poſſède une force centrifuge égale à ſa gravité, il tournera avec la viteſſe qu'il acquerrait par une chute verticale ſelon la moitié de AD *. Mais avec cette viteſſe il parcourrait dans le temps de cette chute la ligne DA d'un mouvement uniforme. La période de la révolution eſt donc au temps de la chute ſelon la moitié de DA comme la circonférence du cercle eſt au rayon DA. Or le temps d'une très petite oſcillation eſt au temps de la chute verticale d'une hauteur égale à la moitié de la longueur du pendule *, comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diamètre, et par conſéquent le temps de deux très petites oſcillations du pendule

* Prop. V.

* Prop. XXV, P. 2 de l'Horol. oscill. [3])

[1]) L'équation de la parabole étant $y^2 = 2px$, $2p$ est le *latus rectum*.

[2]) Voir la Prop. I, p. 267.

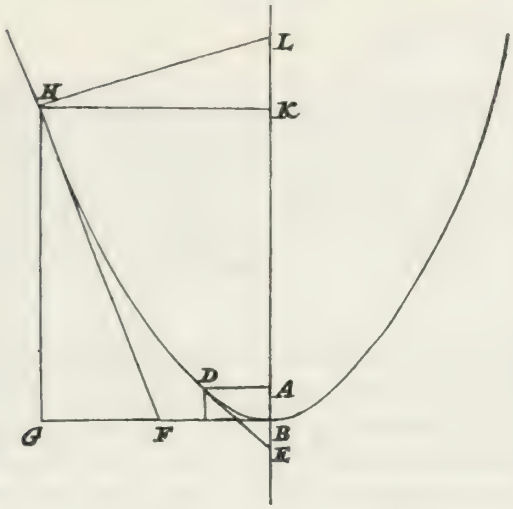
[3]) Il s'agit de la Prop. XXV de la Deuxième Partie de l'„Horologium oscillatorium" (comparez la note 1 de la page 278). Voici cette Proposition: In Cycloïde cujus axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se aequalia; habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloïdis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum".

Dans l'énoncé de la Prop. VII du texte il est question d'„oscillationes penduli"; les éditeurs dans leur démonstration parlent d'„oscillationes minimae penduli". Huygens a probablement

pora ſingula æquantur binis oſcillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti Parabolæ genitricis.]

[Sit Parabola HDB [Fig. 15], cujus revolutione circa axim BK, fiat Conois Parabolicum. In illo axe ſumatur BA æqualis $\frac{1}{4}$ lateris recti [1]), erit ordinatim applicata AD æqualis lateris recti dimidio. Ponatur autem corpus in D circa axim AB circumagi ea velocitate, ut vis centrifuga fiat gravitati æqualis; quæ vis ergo, cum angulus ADE ſit ſemirectus, corpus ſuſtinebit in puncto D *. Si vero corpus rotetur alibi, ut in H, centro K & intervallo KH, erit vis centrifuga, qua ſuſtinetur in puncto H, æqualis vi, qua mobile per rectam HK Horizonti parallelam detineri poterit in plano HF tangente Paraboloidem. Hæc autem vis ex primo Lemmate erit ad vim gravitatis, ut HG ad GF, ſiue, propter triangula ſimilia, quoniam HL in HF normalis ponitur, ut HK ad KL, ſive, ut HK ad AD, cum ex natura Parabo|læ KL ſemper æqualis ſit dimidio lateris recti. Vis ergo centrifuga, qua corpus rotando detinetur in H, eſt ad corporis gravitatem, ſive ad vim centrifugam in D, ut HK ad DA. Quare ex converſa primæ [2]) eodem tempore ſuas circumferentias abſolvent.

[Fig. 15.]



* Lemm. I.

p. 417.

Tempus autem quo circuitus peraguntur ita determinabitur. Quoniam ſuppoſuimus corpus D rotari, ita ut vim centrifugam habeat gravitati æqualem, rotabitur ea velocitate, quam acquireret caſu perpendiculari ex dimidia AD *. Sed ea velocitate tempore hujus deſcenſus, abſolveret lineam DA motu æquabili. Tempus ergo gyrationis eſt ad tempus deſcenſus per dimidium DA; ut circumferentia circuli ad radium DA. Tempus autem oſcillationis minimæ eſt ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine *, ut circumferentia circuli ad diametrum, adeoque tempus duarum oſcillationum minimarum penduli DA, eſt

* Prop. V.

* Prop. XXV. P. 2. Horol. oscil. [3])

eu en vue un pendule cycloïdal, tandisque les éditeurs parlent d'un pendule ordinaire. Il est vrai que dans quelques autres Propositions de Huygens qui se trouvent également parmi celles qu'il ajouta à l'„Horologium oscillatorium" (comparez la note 2 de la page 267) la locution „oscillationes minimae" est employée.

Comparez la Prop. XXV de la Quatrième Partie de l'„Horologium oscillatorium" („De mensurae universalis, et perpetuae, constituendae ratione"), où il est dit: „Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimae penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo".

DA eſt au temps de la chute ſelon la moitié de la hauteur DA, comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon rayon, en d'autres termes: comme la période d'une révolution entière à ce même temps de la chute verticale d'une hauteur égale à la moitié de DA. Le temps d'une révolution dans le conoïde parabolique eſt donc égal au temps pendant lequel ſe font deux oſcillations d'un pendule dont la longueur eſt DA, moitié du latus rectum de la parabole engendrante. C.Q.F.D.

Proposition VIII.

Lorsque deux mobiles ſuſpendus à des fils inégaux ſont mis en rotation de telle manière qu'ils parcourent des circonférences horizontales, l'autre bout du fil demeurant immobile, et que les axes ou hauteurs des cônes dont les fils décrivent la ſurface par ce mouvement ſont égaux, les périodes pendant lesquelles chaque mobile parcourt ſa circonférence ſeront auſſi égales.

Suppoſons les fils AC et AD [Fig. 16] liés en haut à un même point fixe A et qu'à eux ſoient attachés des mobiles en C et D reſpectivement lesquels tournent ſuivant des circonférences horizontales à rayons BC et BD. Soit encore AB l'axe commun des deux cônes que les fils AC et AD décrivent en tournant: je dis que les périodes des révolutions ſont égales entre elles. Conſidérons d'abord des mobiles égaux; que CE ſoit perpendiculaire à AC et DF de même à AD. Eh bien, il eſt évident que c'eſt la force centrifuge des mobiles qui tient les fils ainſi tendus dans une direction oblique; et comme le mobile C a en vertu de ſa gravité la même tendance à tomber que s'il s'appuyait ſur un plan CE; et que d'autre part la force centrifuge par laquelle le corps tend à s'écarter de l'axe AB ſuivant BC tient cette tendance de la gravité en échec, la dite force centrifuge eſt néceſſairement égale à la puiſſance, par laquelle le mobile C pourrait être maintenu ſur le plan incliné CE, cette puiſſance agiſſant ſuivant une ligne horizontale BC. Pour la même raiſon la force centrifuge par laquelle le mobile D eſt ſoutenu eſt néceſſairement égale à la puiſſance par laquelle ce corps pourrait être maintenu ſur le plan DF, cette puiſſance agiſſant ſuivant une ligne également horizontale. Or cette puiſſance eſt à la première qui, à ce que nous avons dit, maintient le mobile C en place, comme la tangente de l'angle BDF eſt à la tangente de l'angle BCE *, c'eſt-à-dire comme la tangente de l'angle DAB eſt à la tangente de l'angle CAB, ou bien comme DB eſt à CB: par conſéquent auſſi la force centrifuge que le mobile D a dans ſa circonférence ſera à la force du mobile C dans la ſienne comme le rayon DB eſt au rayon CB. D'où l'on conclut, d'après l'inverſe de la Prop. I [1]), que les périodes de révolution ſont les mêmes.

* Lemme II.

[1]) Dans le Manuscrit de Huygens: „ita ut circulos horizontales describunt".

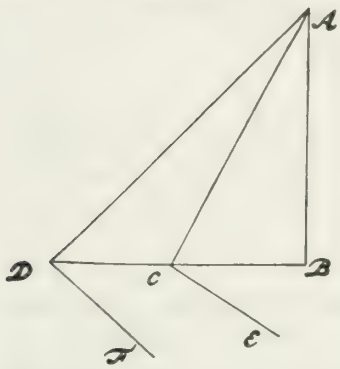
ad tempus casus perpendicularis ex dimidia altitudine DA, ut circumferentia circuli ad radium, hoc est; ut tempus totius gyrationis ad idem tempus casus perpendicularis per dimidiam DA. Tempus ergo gyrationis in conoidi Parabolico æquatur tempori, quo binæ peraguntur oscillationes penduli, cujus longitudo sit DA, dimidium lateris recti Parabolæ genitricis. Q.E.D.]

p. 418. | [Propositio VIII.]

Si mobilia duo ex filis inæqualibus suspensa gyrentur, ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant[1]), capite altero fili immoto manente, fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, axes sive altitudines æquales, tempora quoque, quibus utrumque mobile circulum suum percurrit, æqualia erunt.

Sint fila AC, AD [Fig. 16] communi vertice A religata, habeantque mobilia singula adnexa in C & D, quæ gyrentur in circulis horizontalibus quorum radii BC, BD. sit autem AB axis idem utriusque coni quem fila AC, AD circuitu suo ambiunt. Dico tempora circulationum esse inter se æqualia. Ponantur primo mobilia esse æqualia; sit CE perpendicularis in AC, & DF perpendicularis item in AD. Constat igitur vim centrifugam mobilium esse quæ fila ita obliquè extensa sustineat; cumque mobile C conatum habeat ex gravitate sua descendendi eundem ac si plano CE incumberet; vis autem centrifuga, qua nititur recedere ab axe AB secundum BC, istum gravitatis conatum inhibeat, necesse est vim dictam centrifugam æqualem esse potentiæ qua mobile C sustineretur in plano inclinato CE per lineam BC horizonti parallelam. Eadem ratione necesse est vim centrifugam, qua sustinetur mobile D, esse æqualem potentiæ qua hoc idem sustineretur in plano DF per rectam item horizonti parallelam. Est autem hæc potentia ad priorem illam quæ sustinere dicta est mobile C, sicut tangens anguli BDF ad tangentem anguli BCE *, hoc est, sicut tangens anguli DAB ad tangentem anguli * [Lemm. II.]
p. 419. CAB, hoc est, ut DB ad CB: ergo & vis centrifuga quam habet mo|bile D in circulo suo, erit ad vim centrifugam mobilis C in suo circulo, ut DB semidiameter ad CB semidiametrum. Unde ex Prop. I[2]) conversa, sequitur tempora circulationum esse æqualia.

[Fig. 16.]



[1]) Au lieu de „Prop. I" Huygens écrit „6"; dans le Manuscrit ce numéro qui indique le

Mais ſi les mobiles ſont inégaux, l'égalité des périodes ſubſiſtera néanmoins. En effet, ſi nous ſuppoſons p. e. le mobile C plus lourd qu'il n'était auparavant, il lui faudra auſſi une puiſſance d'autant plus grande qu'il eſt plus lourd lui-même pour le maintenir ſur le plan incliné CE, cette puiſſance agiſſant ſuivant une ligne horizontale, et par conſéquent auſſi une force centrifuge d'autant plus grande; mais pour qu'il poſſède cette dernière il doit parcourir la circonférence dans le même temps qu'auparavant lorsqu'il était ſuppoſé plus léger, comme cela reſſort de ce que nous avons dit plus haut [2]). La propoſition eſt donc établie.

Proposition IX.

Les périodes de révolution ſuivant des circonférences horizontales CD et BE [Fig. 17], l'angle de giration CAD étant le même, ſont dans un rapport égal à la racine carrée de celui des longueurs des fils AC et AB.

En effet, la force centrifuge néceſſaire pour maintenir une même obliquité du fil eſt la même dans deux parcours de ce genre; mais ladite force étant la même, ſuivant l'inverſe de la propoſition IV [3]) les diſtances de l'axe de rotation doivent être entre elles comme les carrés des périodes de révolution. Par conſéquent les carrés de ces périodes doivent être ici entre eux comme CF eſt à BG, c'eſt-à-dire comme AC eſt à AB. C.Q.F.D.

Proposition X.

Lorsque deux mobiles quelconques ſuſpendus à des fils décrivent en tournant des circonférences horizontales, les périodes de révolution ſeront entre elles comme les racines carrées des hauteurs des cônes dont les ſurfaces ſont parcourues par les fils.

Soient donnés les fils AC et AD [Fig. 18] auxquels ſont attachés des mobiles C et D décrivant des circonférences horizontales, tandis que les bouts des fils demeurent immobiles en A. Puiſſe C faire circuler le fil AC ſuivant la ſurface conique dont AB eſt l'axe, et D le fil DA ſuivant la ſurface conique dont l'axe eſt AE; je dis que la période du mobile C eſt à la période du mobile D dans un rapport égal à la racine carrée du rapport AB : AE. En effet, imaginons-nous

§ 6 (voir la p. 305 qui suit) est également écrit en marge auprès de la Proposition que les éditeurs ont nommée Prop I. Comparez la note 2 de la page 267.

[1]) Dans le Manuscrit on lit: „Jam vero si inaequalia fuerint mobilia".

[2]) Voir les l. 11—13 de la p. 267.

[3]) Au lieu de „per conversam IV" Huygens avait écrit: „per 2", c. à. d. d'après le § 2 (voir la p. 304 qui suit); ce § correspond à l'inverse de la Proposition IV. Comparez la note 2 de la page 285.

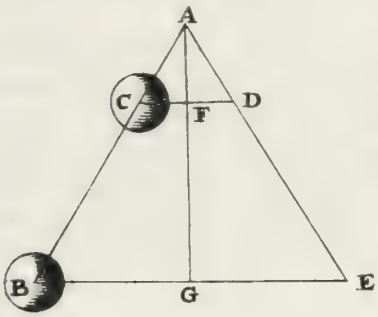
[4]) Dans le Manuscrit: „subdupla".

Si vero inæqualia fuerint mobilia [1]), nihilo fecius eadem temporum æqualitas continget. Nam fi ex. gr. mobile C gravius ponatur quam prius fuerat, tanto quoque majori potentia, quanto gravius eft, indigebit, qua fuftineatur in plano inclinato CE per lineam horizonti parallelam, tantoque proinde majorem vim centrifugam requiret. hanc autem ut habeat debet circulum percurrere eodem tempore, quo antea cum levius ponebatur, ut patet ex iis quæ fupra diximus [2]). Ergo conftat propofitum.

[Propositio IX.]

Tempora lationum per circulos horizontales CD, BE [Fig. 17], angulo gyrationis CAD eodem exiftente, funt in fubduplicata ratione longitudinum filorum AC ad AB.

[Fig. 17.]

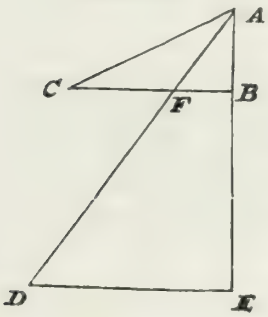


Eadem enim vis centrifuga eft in utraque hujufmodi circulatione ad fuftinendam eandem fili obliquitatem. Si autem dicta vis eft eadem tunc ut quadrata temporum quibus circuli abfolvuntur, ita debent effe diftantiæ ab axe circulationis per converfam IV [3]). Ergo hic erunt ficut CF ad BG, hoc eft, ut AC ad AB ita quadrata temporum circulationum. [Q.E.D.]

p. 420. | [Propositio X.]

Si mobilia duo quælibet filis fufpenfa gyrando defcribant circulos horizonti parallelos; erunt tempora circulationum in fubduplicata [4]) ratione altitudinum conorum, quorum fuperficies à filis defcribuntur.

[Fig. 18.]



Sint fila AC, AD [Fig. 18] quibus annexa mobilia C & D circulos horizontales defcribant, dum capita filorum in A immota manent. Et C quidem ducat filum AC fecundum fuperficiem conicam cujus axis AB, D vero filum DA per fuperficiem coni cujus axis fit AE. Dico tempus circuitus mobilis C effe ad tempus circuitus mobilis D in ratione fubduplicata AB ad AE. Intelligatur enim mobile aliud religatum ex filo AF, facere fua circulatione conum, cujus latus AF axis AB. Ejus igitur circulationis tempus æquale eft tempori circulationis à

qu'un autre mobile attaché à un fil AF décrive en tournant un cône à côté AF et à
* Prop. VIII. axe AB. La période de ce mobile eſt donc égale à celle du mobile C *. Or, la
période du mobile F eſt à celle du mobile D dans un rapport égal à la racine
* Prop. IX. carrée du rapport AF : AD *, ou bien de AB : AE. Par conſéquent la période
du mobile C elle auſſi, eſt à celle du mobile D dans un rapport égal à la racine carrée de AB : AE. C.Q.F.D.

Proposition XI.

Lorsqu'un mobile ſuſpendu à un fil décrit par ſon mouvement, tandis que l'extrémité ſupérieure du fil demeure en repos, des circonférences horizontales inégales, les périodes correſpondant à ces circonférences feront dans un rapport égal à la racine carrée de celui des ſinus des angles ſuivant lesquels le fil eſt incliné par rapport à un plan horizontal.

Soit donné un fil AB [Fig. 19] attaché en A; et que le mobile qui y eſt ſuſpendu et qui tourne horizontalement tende le fil d'abord ſuivant la droite AB, mais enſuite ſuivant la droite AC. Tirons les horizontales BE et CD coupant la verticale AD en E et en D. Par conſéquent, comme AB et AC ſont égales, AE repréſentera le ſinus de l'angle ABE et AD le ſinus de l'angle ACD. Je dis qu'alors les périodes correſpondant aux circonférences à rayons BE et CD feront entre elles dans un rapport égal à la racine carrée du rapport AE : AD; cela reſſort avec évidence de la propoſition précédente.

Proposition XII [2]).

Lorsqu'un pendule animé d'un mouvement conique décrit de très petites circonférences, les périodes correſpondant à chacune d'elles feront au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale au double de la longueur du pendule dans un rapport égal à celui d'une circonférence de cercle à ſon diamètre, partant égales au temps de deux oscillations latérales très petites de ce même pendule.

Soit donné un fil AC attaché en A [Fig. 20]; et que le mobile qui y eſt ſuſpendu décrive en tournant une circonférence horizontale à rayon DC égal à DA, de ſorte que l'angle CAD eſt égal à la moitié d'un angle droit; la force centrifuge
* Lemme I. en C ſera égale à la gravité du mobile * et par conſéquent celui-ci parcourra la circonférence décrite avec le rayon DC avec la viteſſe qu'il acquerrait par une chute

[1]) Dans le Manuscrit: „per praecedentem".

mobili C *. Eſt autem tempus circulationis mobilis F ad tempus circuitus mobilis D in ſubduplicata ratione AF ad AD *, ſive AB ad AE. Ergo & tempus circulationis mobilis C ad tempus mobilis D erit in ſubduplicata ratione AB ad AE. Q.E.D.

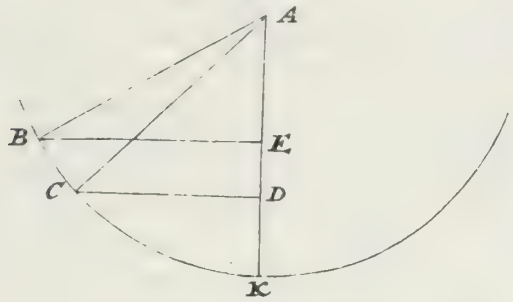
* [Prop. VIII.]
* [Prop. IX.]

[Propositio XI.]

Si mobile filo ſuſpenſum, capite fili ſuperiore quieſcente, deſcribat motu ſuo circulos horizonti parallelos inæquales, erunt tempora lationum per dictos circulos in ſubduplicata ratione ſinuum angulorum, quibus filum ad planum horizontis inclinatur.

Sit filum AB [Fig. 19] religatum ad A. Mobile autem ex eo ſuſpenſum ac circumgyratum horizontaliter exten|dat ipſum primo ſecundum rectam AB; *p.* 421.

[Fig. 19.]



deinde vero ſecundum rectam AC; ducantur autem horizonti parallelæ BE, CD, occurrentes perpendiculari AD in E & D. Ergo quia AB, AC æquales ſunt, referet AE ſinum anguli ABE; AD vero ſinum anguli ACD; dico jam tempora lationum per circulos, quorum radii BE, CD fore inter ſe in ſubduplicata ratione AE ad AD. Patet hoc manifeſto ex propoſitione ſuperiori.

[Propositio XII.] [2])

[Si pendulum motu conico latum circuitus minimos faciat; eorum ſingulorum tempora, ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia ſunt tempori duarum oſcillationum lateralium ejuſdem penduli minimarum.]

[Sit filum AC religatum ad A [Fig. 20], ex quo ſuſpenſum mobile circumgyrando deſcribat circulum horizontalem, cujus radius DC, æqualis ipſi DA, ita ut angulus CAD ſit ſemirectus, erit vis centrifuga in C æqualis gravitati mobilis *, ideoque percurret circumferentiam radio DC deſcriptam, ea velocitate, quam acquireret mobile, caſu perpendiculari ex altitudine dimidiæ DC aut

* Lemm. I.

[2]) Voyez sur cette Proposition et sa démonstration la note 4 de la page 281.

* Prop. V. verticale d'une hauteur égale à la moitié de DC ou de DA *. Or DC eſt à CA comme 1 eſt à $\sqrt{2}$, et par conſéquent le temps d'une chute verticale de la hauteur $\frac{1}{2}$DC ſera au temps d'une chute verticale de la hauteur $\frac{1}{2}$CA (ces temps étant dans un rapport égal à la racine carrée du rapport DC : CA) dans le rapport $1 : \sqrt{\sqrt{2}}$. D'où l'on conclut que le temps d'une chute verticale d'une hauteur $\frac{1}{2}$DC ſera au temps d'une chute de la hauteur 2AC (qui eſt le double du temps d'une chute ſuivant $\frac{1}{2}$AC) comme 1 eſt à $2\sqrt{\sqrt{2}}$, ou bien comme un rayon quelconque eſt au double de ce rayon multiplié par $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Or, le temps d'une chute verticale de la hauteur $\frac{1}{2}$DC eſt au temps de giration ſuivant la circonférence décrite avec le rayon DC, comme le rayon eſt à la circonférence [1]; et le temps d'une rotation ſuivant la circonférence DC eſt au temps d'une très petite rotation dans un rapport égal à la racine carrée du rapport
* Prop. X. AD : AC *, en d'autres termes à $1 : \sqrt{\sqrt{2}}$; par conſéquent le temps d'une chute verticale d'une hauteur $\frac{1}{2}$DC eſt au temps d'une très petite rotation comme le rayon eſt à la circonférence multipliée par $\sqrt{\sqrt{2}}$; le temps d'une très petite rotation du pendule AC eſt donc au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale à deux fois le pendule, comme la circonférence multipliée par $\sqrt{\sqrt{2}}$ eſt au double du rayon multiplié par $\sqrt{\sqrt{2}}$, ou bien comme une circonférence eſt à ſon diamètre. Mais vu que le temps d'une très petite oscillation latérale du pendule AC eſt au temps d'une chute verticale d'une hauteur $\frac{1}{2}$AC, ou, en doublant l'un et l'autre, que le temps de deux très petites oscillations latérales du pendule AC eſt au temps d'une chute verticale d'une hauteur 2AC, également dans un rapport égal à celui d'une circonférence à ſon diamètre [2], le temps d'une très petite rotation du pendule AC ſera au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale à deux fois le pendule AC, comme le temps de deux oscillations latérales très petites du pendule AC eſt à ce même temps d'une chute verticale le long de 2AC. Par conſéquent le temps d'une très petite rotation du pendule AC ſera égal au temps de deux très petites oscillations latérales du même pendule AC. C.Q.F.D.

Proposition XIII [3].

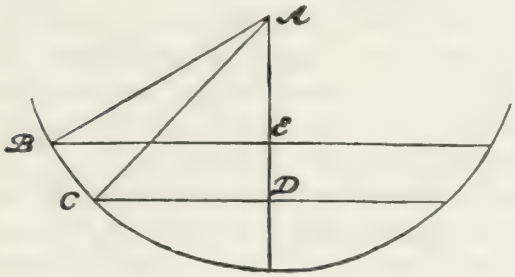
Lorsqu'un mobile parcourt une circonférence et accomplit chaque révolution dans le même temps dans lequel un pendule ayant pour longueur le rayon de cette circonférence pourrait parcourir d'un mouvement conique une très petite circonférence ou exécuter deux oscillations latérales très petites, il aura une force centrifuge égale à ſa gravité.

---

[1]) Parce que, d'après la Prop. V (p. 275) citée plus haut, la vitesse acquise par une chute de hauteur $\frac{1}{2}$CD est égale à la vitesse avec laquelle le mobile C parcourt sa circonférence et que de plus le temps de cette chute peut être remplacé par le temps dans lequel le mobile peut parcourir DC avec une vitesse uniforme égale à la vitesse acquise par cette chute.

DA æquali *. Eſt autem DC ad CA ut 1 ad $\sqrt{2}$, adeoque tempus caſus perpendicularis ex dimidia DC ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia CA, quæ tempora ſunt in ſubduplicata ratione DC ad CA, erit in ratione 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$. Unde tempus caſus perpendicularis ex dimidia DC, ad tempus quo cadit ex dupla AC, quod temporis caſus ex dimidia AC duplum eſt, erit, | ut 1 ad $2\sqrt{\sqrt{2}}$, ſive ut radius quilibet ad duplum ejusdem radii ductum in $\sqrt{\sqrt{2}}$. * Prop. V.

[Fig. 20.]



p. 422.

Eſt autem tempus caſus perpendicularis ex dimidia DC, ad tempus gyrationis per circumferentiam radio DC deſcriptam, ut radius ad circumferentiam [1]); tempus autem gyrationis per circumferentiam DC eſt ad tempus circuitus minimi, in ſubduplicata ratione AD ad AC * ſive ut 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$: tempus ergo caſus perpendicularis ex dimidia DC, eſt ad tempus circuitus minimi, ut radius ad circumferentiam ductam in $\sqrt{\sqrt{2}}$; tempus igitur circuitus minimi penduli AC ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, ut circumferentia ducta in $\sqrt{\sqrt{2}}$ ad duplum radii ductum in $\sqrt{\sqrt{2}}$, ſive ut circumferentia ad diametrum. Cum vero tempus oſcillationis minimæ lateralis penduli AC ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia AC, ſive ſumtis utriuſque duplis tempus duarum oſcillationum minimarum lateralium penduli AC ad tempus caſus perpendicularis ex dupla AC, etiam ſit, ut circumferentia ad diametrum [2]), erit tempus circuitus minimi penduli AC, ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli AC altitudine, ut tempus duarum oſcillationum lateralium minimarum penduli AC ad idem tempus caſus perpendicularis ex dupla AC. Erit ergo tempus circuitus minimi penduli AC æquale tempori duarum oſcillationum minimarum lateralium ejuſdem penduli AC. Q.E.D.] * Prop. X.

p. 423. | [Propositio XIII.] [3])

[Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque ſingulos abſolvat eo tempore, quo pendulum longitudinem ſemidiametri circumferentiæ ejus habens motu conico circuitum minimum abſolveret, vel duplicem oſcillationem minimam lateralem, habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem.]

---

[2]) Comparez la phrase qui commence en bas de la p. 283.

[3]) Voyez sur cette Proposition et sa démonstration la note 4 de la page 281.

Soit donné un fil AC [Fig. 20] égal au rayon de la circonférence que parcourt le mobile, de ſorte que l'angle CAD eſt égal à la moitié d'un angle droit, et ſuppoſons que la période de la révolution correſpondant à CD ſoit 1 : la période d'une très petite rotation du même pendule ſera $\sqrt{\sqrt{2}}$ *. Or, par hypothèſe la période d'une révolution ſuivant la circonférence à rayon AC eſt la même; la période correſpondant à CD eſt donc à celle qui correſpond à AC comme 1 eſt à $\sqrt{\sqrt{2}}$, en d'autres termes ce rapport eſt égal à la racine carrée du rapport CD : AC, d'où il réſulte, d'après l'inverſe de la quatrième propoſition [1]), que ces deux mobiles tournant de cette manière poſſèderont une force centrifuge égale et que par conſéquent, la force centrifuge correſpondant à CD étant égale à la gravité [2]), la même choſe ſera vraie pour la rotation ſuivant la circonférence à rayon AC. C.Q.F.D.

* Prop. XI.

Proposition XIV [3]).

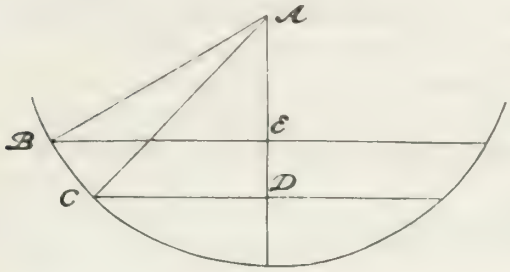
Les périodes de révolution d'un pendule quelconque animé d'un mouvement conique ſeront égales au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale au fil du pendule, lorsque l'angle d'inclinaiſon du fil par rapport à un plan horizontal ſera de 2°54′ environ. En termes précis: lorsque le ſinus dudit angle ſera au rayon comme un carré inſcrit dans une circonférence eſt au carré de la même circonférence.

Soit AD = DC [Fig. 20] = a, AE = b; la circonférence d'un cercle à ſon rayon comme c à r. Soit 1 le temps d'une chute verticale d'une hauteur $\frac{1}{2}$CD. Le temps d'une chute d'une hauteur $\frac{1}{2}$AC ſera alors $\sqrt{\sqrt{2}}$. Or, le temps correſpondant à la chute ſuivant $\frac{1}{2}$AC eſt à celui qui correſpond à celle ſuivant AC comme 1 eſt à $\sqrt{2}$; le temps d'une chute ſuivant AC ſera donc repréſenté par $\sqrt{\sqrt{8}}$. Mais la période de révolution correſpondant à CD eſt au temps d'une chute de la hauteur $\frac{1}{2}$CD comme c eſt à r [4]). Par conſéquent la période d'une révolution correſpondant à CD ſera $\frac{c}{r}$. Mais la période qui correſpond à C eſt à celle qui correſpond à un point quelconque B dans un rapport égal à la racine carrée du rapport AD : AE, ou comme $\sqrt{a}$ eſt à $\sqrt{b}$ [5]). La période qui correſpond à B ſera donc $= \frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$; et ſi nous ſuppoſons maintenant AE, ſinus de l'angle ABE, tel qu'il ſoit au rayon AB comme un carré

[1]) Prop. IV, p. 273.
[2]) Comparez la dernière phrase de la p. 289.
[3]) Voir sur cette Proposition et sa démonstration la note 4 de la page 281.

[Sit filum AC [Fig. 20] æquale radio circuli, per quem mobile fertur, ita ut angulus CAD ſit ſemirectus; ſitque tempus gyrationis per CD, 1. erit tempus gyrationis minimæ ejuſdem penduli $\sqrt{\sqrt{2}}$ *. Idem autem ex hypotheſi eſt tempus gyrationis per circumferentiam, cujus radius AC; tempus ergo gyrationis per CD eſt ad tempus gyrationis per AC, ut 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$; ſive in ſubduplicatâ ratione CD ad AC, unde ex converſa 4æ [1]), habebunt hæc duo mobilia ita circumlata, vim centrifugam æqualem, adeoque cum in CD vis centrifuga ſit æqualis gravitati [2]), idem locum habebit, in gyratione per circulum, cujus radius AC. Q.E.D.]

[Fig. 20.]



* Prop. XI.

[Propositio XIV.] [3])

[Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori caſus perpendicularis ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili ad planum horizontis fuerit partium 2, ſcrup. 54, proxime. Exacte vero, ſi anguli dicti ſinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inſcriptum ad quadratum a circumferentia ejus.]

[Sit AD = DC [Fig. 20], a, AE, b; circumferentia circuli ad radium, ut c ad r; tempus caſus perpendicularis per | dimidiam CD ſit 1. erit tempus caſus per
p. 424. dimidiam AC $\sqrt{\sqrt{2}}$. Eſt autem tempus per dimidiam AC ad tempus per AC, ut 1 ad $\sqrt{2}$, erit ergo tempus per AC, ut $\sqrt{\sqrt{8}}$. Sed tempus gyrationis per CD eſt ad tempus caſus per dimidiam CD, ut c ad r [4]). Erit itaque tempus gyrationis per CD $= \frac{c}{r}$. Verum tempus gyrationis in C eſt ad tempus gyrationis in quolibet puncto B, in ſubduplicata ratione AD ad AE, ſive ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{b}$ [5]). Erit ergo tempus gyrationis in B $= \frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$; quod ſi nunc ponatur AE ſinum anguli ABE eſſe ad radium AB, ut quadratum circulo inſcriptum, ad quadratum circumferentiæ ejus, erit b ad $a\sqrt{2}$, ita $2rr$ ad cc, ſive $\frac{bcc}{arr} = 2\sqrt{2}$, vel $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\sqrt{8}}$ [6]): cumque $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$

[4]) Comparez le deuxième alinéa (p. 291) de la démonstration de la Prop. XII.

[5]) Comparez la note 1 de la p. 300.

[6]) Nous avons corrigé „$\sqrt{8}$" (de Volder et Fullenius) en „$\sqrt{\sqrt{8}}$".

inſcrit dans une circonférence eſt au carré de cette circonférence, b ſera à $a\sqrt{2}$ comme $2rr$ eſt à cc, ou bien $\frac{bcc}{arr} = 2\sqrt{2}$, ou bien $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\sqrt{8}}$; et comme $\frac{c}{r}\sqrt{\frac{b}{a}}$ eſt la période de révolution correſpondant au point B et $\sqrt{\sqrt{8}}$ le temps d'une chute de la hauteur AC, cette période correſpondant à B ſera égale au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale à la longueur du fil du pendule.

Or, attendu que $2r : c = 7 : 22$, on aura $4rr : cc = 49 : 484$ ou bien $2rr : cc = 49 : 968$. Par conſéquent, $968 : 49 = a\sqrt{2}$ (le rayon a étant égal à 100000) : 5062 (ſinus de l'angle ABE); donc l'angle ABE $= 2°54'$ environ. C.Q.F.D.

Proposition XV [2]).

Lorsque deux pendules égaux en poids, mais de longueur de fil différente, ſont animés d'un mouvement conique et que les hauteurs des cônes ſont égales, les forces avec lesquelles ils tendront leurs fils ſeront entre elles dans un rapport égal à celui des longueurs des fils.

Soient donnés deux pendules AB et AC [Fig. 21] de longueur différente et que deux poids égaux ſuſpendus à leurs extrémités B et C tournent autour de l'axe commun AD. Je dis que la force avec laquelle le fil AB eſt tendu eſt à la force avec laquelle le fil AC eſt tendu dans un rapport égal à celui des fils AB et AC. En effet, ſi nous admettons que le poids B eſt maintenu dans cette poſition par une puiſſance en A tirant le fil AB et par une autre puiſſance en G égale à la force centrifuge et tirant ſuivant la droite BG, il eſt certain d'après la Mécanique que ſi l'on mène BH verticalement et HL horizontalement, la force en A qui tire le fil AB ſera à la gravité du poids B comme LB eſt à BH, ou bien comme AB eſt à AD. De même la force par laquelle le fil C eſt tendu ſera à la gravité du poids C, ou bien à la gravité du poids B égal par hypothèſe au poids C, comme AC eſt à AD. Par conſéquent la force par laquelle le fil AB eſt tendu pendant la rotation ſera à la force par laquelle le fil AC eſt tendu comme AB eſt à AC. C.Q.F.D.

Proposition XVI [3]).

Lorsqu'un pendule ſimple eſt animé de la plus grande oscillation latérale poſſible, c'eſt-à-dire lorsqu'il deſcend ſuivant

---

[1]) Nous avons corrigé „fiat" (d. V. et F.) en „fiet".

[2]) Voyez sur cette Proposition et sa démonstration la note 4 de la page 281.

ſit tempus gyrationis in B & $\sqrt{\sqrt{8}}$ tempus deſcenſus per AC, erit hoc tempus gyrationis in B, æquale tempori caſus perpendicularis ex altitudine penduli filo æquali.

Cum autem $2r$ ad c eſt, ut 7 ad 22, erit $4rr$ ad cc ut 49 ad 484, ſive $2rr$ ad cc ut 49 ad 968. Hinc fiet [1]), ut 968 ad 49 ita $a\sqrt{2}$ radius = 100000 ad 5062 ſinum anguli ABE gr. 2. 54′, proxime. Q.E.D.]

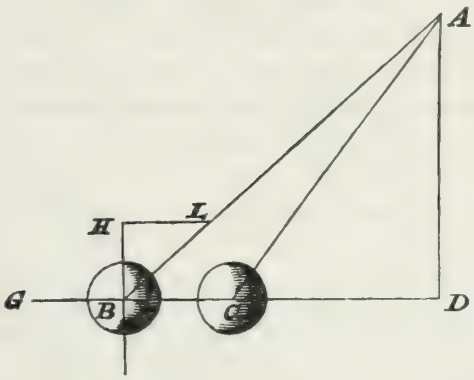
[Propositio XV.] [2])

[Si pendula duo pondere æqualia, ſed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila ſua intendent, in eadem ratione, quæ eſt filorum longitudinis. [3])]

[Sint duo pendula AB, AC [Fig. 21] diverſæ longitudinis, ex quorum extremitatibus B & C ſuſpenſa duo pondera æqualia rotentur circa communem axim AD. Dico | vim qua tenditur filum AB eſſe ad vim qua tenditur filum AC, in ratione filorum AB ad AC. Si enim ponamus pondus B in eo ſitu ſuſtineri per potentiam in A trahentem filum AB, & per potentiam aliam in G vi centrifugæ æqualem trahentem ſecundum rectam BG conſtat ex Mechanicis ducta BH horizonti perpendiculari & HL eidem parallela, fore vim in A tendentem filum AB ad gravitatem ponderis B ut LB ad BH, ſive ut AB ad AD. Itidem erit vis qua tenditur filum C ad gravitatem ponderis C, ſive ad gravitatem ponderis B, quod æquale ipſi C poſitum fuit, ut AC ad AD. Erit ergo vis qua gyrando tenditur filum AB, ad vim qua tenditur filum AC, ut AB ad AC. Q.E.D.]

p. 425.

[Fig. 21.]



[Propositio XVI.] [4])

[Si pendulum ſimplex oſcillatione laterali maxima agitetur, hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendat: ubi ad

---

[3]) Au lieu de „longitudinis" lisez plutôt „longitudinum".

[4]) Voyez sur cette Proposition la note 4 de la page 281. Quant à la démonstration, les éditeurs l'ont empruntée au Manuscrit de Huygens.

un quart de circonférence, il tendra ſon fil, lorsqu'il aura atteint le point le plus bas de la circonférence, avec une force trois fois plus grande que s'il y était ſimplement ſuſpendu.

Lorsque le globe C [Fig. 22] attaché en A au moyen du fil AC deſcend ſuivant le quart de circonférence CB, il tendra, au moment où il ſera parvenu en B, le fil AB avec une force trois fois plus grande que s'il y était ſimplement ſuſpendu de ſorte que ſon poids compterait ſeul. En effet, d'abord la viteſſe avec laquelle il continuerait à ſe mouvoir ſuivant la ligne droite BD s'il quittait le fil en B eſt la même que celle qu'il aurait au point F s'il était tombé verticalement le long de CF. Là il aurait acquis une viteſſe telle qu'avec cette viteſſe il parcourrait d'un mouvement uniforme un eſpace égal au double de cette même hauteur CF dans le même temps dans lequel il eſt tombé de C en F. Le globe a donc en B une tendance à parcourir une ligne BD double de AB dans un temps égal à celui dans lequel il tomberait de A en B, bien entendu ſans avoir égard à la force de ſa gravité, par laquelle il deſcendrait en même temps dans le ſens vertical et décrirait donc une certaine parabole [3]). Soit BGE une parabole dont AB eſt le demi latus rectum, et B le ſommet. Parce qu'alors les écarts du globe B de la circonférence BC, tandis qu'il parcourt BD d'un mouvement uniforme, ſont conſidérés au début près du point B comme identiques avec les écarts de la parabole BGE [4]), il eſt manifeſte que la force centrifuge que poſſède le globe en B en vertu de la rotation ſeule conſiſte en une tendance à s'éloigner du centre A ou de la circonférence BC d'un mouvement accéléré ſuivant les nombres 1, 3, 5, 7 etc. [5]) et que cette tendance eſt par conſéquent du même genre que celle avec laquelle les corps cherchent à tomber et que nous appelons la gravité. Et cette tendance du globe B eſt auſſi grande qu'elle le ſerait dans un corps égal qui parcourrait l'eſpace DE d'un mouvement accéléré dans le même temps pendant lequel le globe B parcourrait l'eſpace BD d'un mouvement uniforme, c'eſt-à-dire dans le même temps dans lequel le globe tomberait de A en B d'un mouvement ſemblablement accéléré. Par conſéquent, comme DE eſt le double de BA, la tendance centrifuge du globe en B eſt le double de ſa gravité. Mais il s'y ajoute ici une autre tendance due à la gravité, par laquelle le globe B, dans le même temps où il tomberait

[1]) Dans le Manuscrit de Huygens on lit: „ubi in B pervenerit validius trahet filum AB quam si simplici pondere suo suspensus esset. Quanto autem? Triplo".

[2]) Dans le Manuscrit: „secundum rectam moveri".

[3]) Dans la figure du Manuscrit cette parabole (BS) est indiquée et Huygens ajoute: „posset etiam vis conatus utriusque simul per lineas 12, 34, 56 expendi determinata etiam parabola BS". Les lignes droites 12, 34 et 56 partent de A et coupent la circonférence et la parabole BS respectivement aux points 1, 3, 5 et 2, 4, 6.

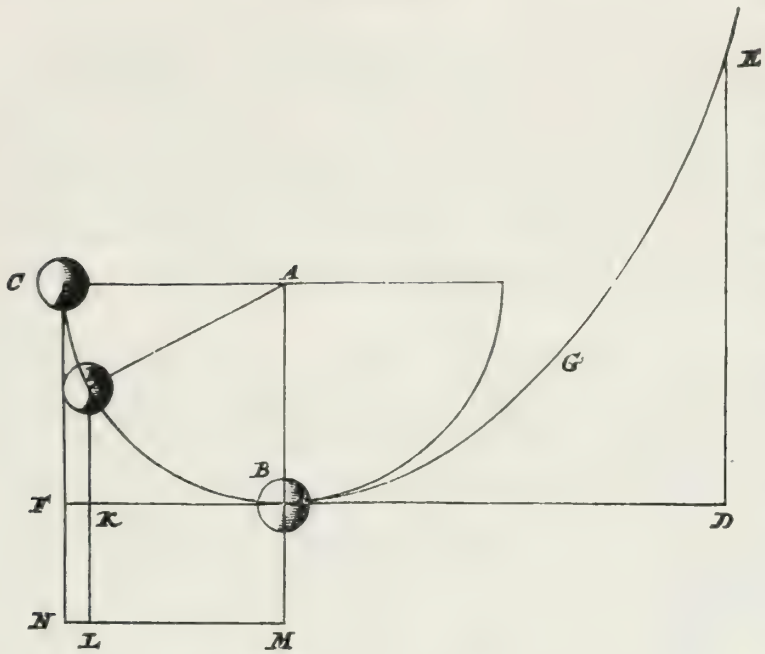
[4]) Le cercle CHB est le „cercle osculateur" de la parabole BGE en B.

[5]) Comparez le deuxième alinéa de la p. 267.

punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet, quam ſi ex illo ſimpliciter ſuſpenſum foret.]

Si globus C [Fig. 22] ex A ligatus filo AC per quadrantem circumferentiæ CB deſcendat, ubi in B pervenerit triplo majori vi trahet filum AB, quam ſi ſimplici pondere ſuo ſuſpenſus eſſet [1]). Primum enim velocitas qua pergeret moveri ſecundum rectam [2]) lineam BD, ſi in B filum relinqueret, eadem eſt atque ea quam haberet in puncto F, ſi perpendiculariter per CF decidiſſet. Ibi autem tantam nactus eſſet celeritatem, ut ea ſpatium ipſius CF duplum conficeret motu æquabili pari tempore quo ex C decidit in F. Ergo in B conatum habet globus tranſeundi lineam BD duplam AB, pari tempore, quo ex A cade|ret in B; nempe non conſiderata vi gravitatis ſuæ, qua deorſum quoque interim deſcenſurus eſſet & Parabolam aliquam deſcripturus [3]). Sit BGE Parabola cujus ſemilatus rectum AB, vertex B. Quoniam ergo receſſus globi B, à circumferentia BC, dum per rectam BD æquabili motu fertur, initio prope B punctum pro iiſdem habentur, cum receſſibus à Parabola BGE [4]); conſtat vim centrifugam quam ex ſola circulatione habet globus in B, eſſe conatum recedendi à centro A vel à circumferentia BC motu accelerato ſecundum numeros 1, 3, 5, 7, &c. [5]) ac proinde ſimilem eſſe ei conatui quo corpora deſcendere conantur, quem gravitatem appellamus. Eſt autem ille conatus in globo B tantus, quantus in corpore ſibi æquali quod motu accelerato confecturum ſit ſpatium DE, eodem tempore dum motu æquabili conficeret ſpatium BD, hoc eſt æquali tempore illi quo globus accelerato itidem motu caderet ex A in B. Ergo quia DE eſt dupla BA conatus centrifugus globi in B duplus eſt ſuæ gravitatis. At vero conatus alius ex gravitate accedit hîc, quo globus B (pari tempore quo ex A ad B

[Fig. 22.]



p. 426.

de A en B, aſpire à parcourir maintenant auſſi un eſpace égal en tombant verticalement d'un mouvement naturellement accéléré. En vertu des deux tendances il cherche donc à parcourir d'un mouvement accéléré ſuivant les nombres 1, 3, 5, 7 un eſpace égal à la ſomme de DE et de AB, en d'autres termes au triple de AB; partant la force avec laquelle il tire au point B après être deſcendu depuis C, eſt égale à trois fois la force qui réſulte du ſimple poids du globe B librement ſuſpendu. Ce qui eſt auſſi exactement conforme à l'expérience.

Pour ſavoir avec quelle force la corde AB eſt tendue lorsque le globe deſcend ſuivant l'arc HB: ſoit FN égale à la moitié de AB et conſtruiſons le rectangle BN, menons enſuite HL parallèlement à AB; je dis que la force de traction cherchée eſt au poids ſimple du globe ſuſpendu comme HL eſt à LK. Par conſéquent ſi BH eſt la ſixième partie de la circonférence la force totale ſera le double de cette force due au poids; il faudra donc, pour ſupporter cette force de traction, un fil deux fois plus fort que le fil ſimple capable de porter le globe ſuſpendu, etc.

Proposition XVII [2]).

Un globe attaché par un fil au centre d'un cercle vertical ne peut tourner ſuivant la circonférence de ce cercle, que ſi le fil peut ſupporter une tenſion égale à ſix fois le poids ſuſpendu.

Soit BCDE [Fig. 23] un cercle vertical, au centre A duquel ſoit ſuſpendu le globe B. Je dis que pour que ce globe puiſſe accomplir une révolution ſuivant la circonférence BCDE il faut un fil capable de porter le ſextuple du poids B. En effet, pour que le fil reſte tendu lorsque le globe paſſe par le point D et deſcend ſuivant l'arc DE, il faut que la viteſſe du globe en ce point ſoit telle que, ſi on le détachait, il décrirait une parabole DF dont le demi latus rectum ſerait AD. Il doit donc avoir une viteſſe égale à celle qu'il aurait au point D s'il était tombé d'une hauteur HD égale à la moitié de DA [5]); pour que la dite viteſſe lui reſte en D après ſon aſcenſion à partir de B ſuivant la demie circonférence BCD, il eſt néceſſaire que la viteſſe en B ſoit telle qu'il puiſſe avec cette viteſſe monter verticalement jusqu'au point H. En effet, s'il poſſède cette viteſſe en B et qu'il parvient

[1]) Dans le Manuscrit: „et ducatur".

[2]) La Prop. XVII est la seule que les éditeurs ont rédigée eux-mêmes; mais la démonstration est de Huygens, sauf les modifications apportées par les éditeurs, que nous signalerons dans les notes qui suivent. Comparez encore la note 4 de la p. 281.

[3]) Dans le Manuscrit: „Ut globus circumgyrari possit per circumferentiam BCDE circa A centrum dico opus esse", etc.

[4]) Huygens écrit: „sexcuplum".

[5]) Voir la Prop. V, p. 275.

[6]) Dans le Manuscrit: „ut igitur ex B. . . ascendenti supersit ei".

caderet) nunc quoque tantundem ſpatii motu naturaliter accelerato deorſum conficere nititur. Ergo utroque ſimul conatu, nititur conficere, motu accelerato ſecundum 1, 3, 5, 7, ſpatium æquale utrisque DE & AB, hoc eſt ipſius AB triplum; quamobrem etiam, erit vis, qua trahit in B puncto ex C deſcendens, tripla ejus quæ fit ex ſimplici pondere globi B libere pendentis. Quod & ad amuſſim experientiæ conſentit.

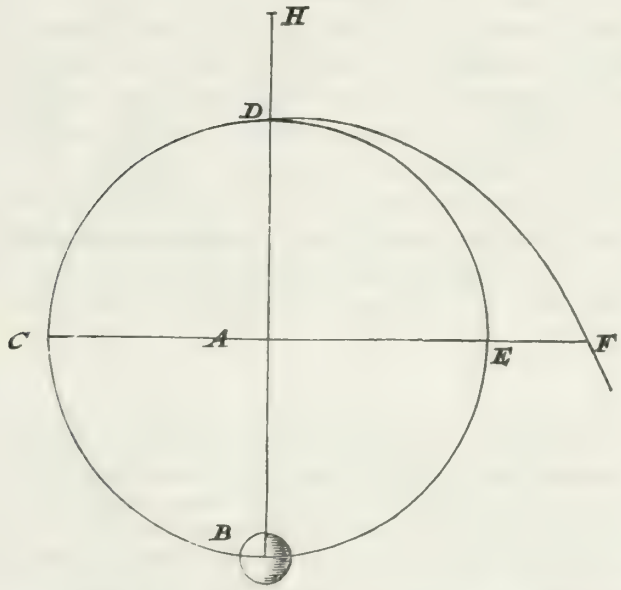
Si cupiam ſcire qua vi trahatur funis AB deſcendente globo per arcum HB; ſit FN dimidiæ AB æqualis & fiat rectangulum BN, ducaturque [1]) HL parallela AB. dico vim tractionis quæſitam eſſe ad pondus ſimplex globi pendentis, ut
p. 427. HL ad LK. Unde ſi fuerit BH ſextans | circumferentiæ erit iſta vis ponderis hujus dupla; eoque filo duplici opus erit ad perferendam ejus tractionis vim, cujusmodi ſimplici globus ſuſpenſus retineri poteſt, &c.

[Propositio XVII.] [2])

[Globus filo ex centro circuli ad horizontem perpendicularis ſuſpenſus, per circumferentiam iſtius circuli rotari non poteſt, niſi filum ſextuplum ponderis appenſi ſuſtinere queat.]

Sit circulus perpendiculariter ad horizontem erectus BCDE [Fig. 23], ex cujus centro A ſuſpenſus ſit globus B, dico, ut hic circumgyrari poſſit per circumferentiam BCDE, opus eſſe [3]) filo quod ſextuplum [4]) ponderis B appenſum ſuſtinere poſſit. Ut enim filum extenſum maneat cum globus tranſit D punctum, perque arcum DE deſcendit, oportet velocitatem globi eam illic eſſe, quâ, ſi dimittatur, deſcripturus ſit parabolam DF, cujus ſemilatus rectum ſit AD. Quare tantam habere eum oportet, qualem in D habiturus eſſet decidens ex altitudine HD ipſius DA dimidia [5]): ut igitur ei ex B per ſemicirculum BCD aſcendenti ſuperſit [6]) dicta celeritas in D, neceſſe eſt celeritatem in B tantam eſſe, qua poſſit aſcendere perpendiculariter uſque ad H

[Fig. 23.]



par un chemin quelconque à la hauteur D, il lui reſtera toujours aſſez de viteſſe pour qu'il puiſſe monter verticalement ou auſſi par tout autre chemin jusqu'en H, en d'autres termes il conſervera autant de viteſſe qu'il en acquerrait en tombant de la hauteur HD; et c'eſt là la viteſſe dont nous avons dit que le globe a beſoin au point D. Or la viteſſe avec laquelle il pourrait monter verticalement de B en H, ou bien qu'il poſſéderait en tombant de HB, eſt à la viteſſe qu'il acquerrait en tombant de AB, dans un rapport égal à la racine carrée de celui de ces eſpaces, c'eſt-à-dire de $\sqrt{10}$ à 2[1]). Mais il a été démontré dans la propoſition précédente que ſi le globe tourne dans la circonférence avec la viteſſe qu'il acquiert en tombant de la hauteur AB ou bien ſuivant l'arc EB, la force centrifuge ſeule eſt le double du poids ſimple du globe. Et la viteſſe avec laquelle il tourne dans la circonférence en ce point eſt à la viteſſe dont il était queſtion plus haut comme $\sqrt{10}$ eſt à 2; par conſéquent les forces centrifuges ſont entre elles dans un rapport égal au carré de ce rapport, c'eſt-à-dire comme 10 eſt à
*Prop. II. 4 * ou 5 à 2. La force centrifuge au point conſidéré eſt donc à la gravité du globe comme 5 eſt à 1. Mais à cette force centrifuge, au moment où le globe paſſe par le point B, il faut ajouter la force de la gravité par laquelle il tend à deſcendre verticalement, laquelle, à ce que nous avons dit, eſt à la dite force centrifuge dans le rapport 1 : 5. La force totale ou traction qu'éprouvera le fil, au moment où le globe paſſe par le point B, ſera donc le ſextuple de la gravité du globe.

En partant de là, lorsqu'un globe attaché à un fil AB [Fig. 24] eſt abandonné à lui-même au point C ſitué à la même hauteur que A, qu'on diviſe AB en D de telle manière que $DB = \frac{2}{5}AB$, et qu'on fiche en D un clou que le fil doit rencontrer lorsque le globe deſcend du point C, je trouve que pour cette poſition le globe peut préciſément accomplir une révolution autour du clou D en décrivant une circonférence; mais que ſi le clou D eſt fiché plus haut, cela devient impoſſible. Car, attendu que la viteſſe du globe en B néceſſaire pour accomplir une révolution entière doit être à la viteſſe qu'il acquerrait en tombant de la hauteur DB comme $\sqrt{10}$ eſt à 2, comme nous venons de le démontrer, il s'enſuit que les hauteurs devront être dans un rapport égal au carré de ce rapport-là, c'eſt-à-dire dans le rapport 10 : 4 ou 5 : 2, pour que le globe en tombant de ces hauteurs acquière l'une ou l'autre de ces viteſſes. Par conſéquent AB : DB = 5 : 2.

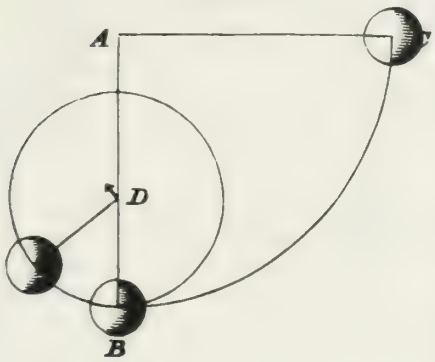
FIN.

---

[1]) On aura remarqué que Huygens, à cette époque, écrit généralement $\sqrt{l_1 l_2} : l_2$ ou $l_1 : \sqrt{l_1 l_2}$ (et non pas $\sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$) pour la „ratio subduplicata" de deux lignes (voir p. e. aux p. 273—275 la démonstration de la Prop. IV). Même ici, où il s'agit d'une application numérique, il écrit $\sqrt{10} : 2$ (et non pas $\sqrt{5} : \sqrt{2}$). En effet, suivant Euclide la racine carrée d'une ligne n'a pas de sens, tandis que la moyenne proportionnelle entre deux lignes en a un. Plus tard (voir les premières lignes de la p. 549 du T. XIII) Huygens définit cependant la „ratio subduplicata" comme $\sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$; de Volder et Fullenius font de même (voir la p. 293, note 5). Wallis en

punctum. Hanc enim celeritatem in B habens, quacunque via perveniat ad altitudinem D, ſemper reſtabit ei tantum celeritatis ut poſſit porro perpendiculariter, vel quacunque etiam via aſcendere ad H: hoc eſt, tanta ei ſupererit celeritas quantam ex altitudine HD cadens acquireret, qua illi in D opus eſſe diximus. Celeritas porro, qua ex B ad H perpendiculariter aſcendere poſſet, ſive quam
p. 428. haberet ex HB decidens, eſt ad celeritatem | quam acquireret ex AB cadens, in ratione ſubduplicata horum ſpatiorum, hoc eſt, ea quæ $\sqrt{10}$ ad 2 [1]). Eſt autem oſtenſum in præcedenti, ſi rotetur in circumferentia ea celeritate, quam acquirit cadens ex AB ſive per arcum EB, eſſe vim centrifugam ſolam duplam ponderis globi ſimplicis. Eſtque celeritas qua hîc in eadem circumferentia rotatur ad illam, ut $\sqrt{10}$ ad 2, ac proinde vis centrifuga in ratione duplicata, hoc eſt 10 ad 4 *, ſive ut 5 ad 2. *[Prop II.] Ergo vis centrifuga hîc erit ad globi gravitatem ut 5 ad 1. Ad hanc vero vim centrifugam, cum globus tranſit in B, addenda eſt vis gravitatis, qua deorſum tendere conatur, quæ ad vim dictam centrifugam dicta eſt ſe habere, ut 1 ad 5. Ergo tota vis ſeu attractio quam ſentiet filum tranſeunte globo in B erit ſextupla [2]) globi gravitatis.

[Fig. 24.]



Hinc invenio, ſi globus ex AB [Fig. 24] filo ligatus dimittitur ex C, ejuſdem cum A puncto latitudinis; dividatur autem AB in D, ut ſit DB [=] $\frac{2}{5}$ AB, atque in D clavus figatur cui filum occurrat, globo ex C cadente: ita demum globum circa clavum D convolvi poſſe circulumque deſcribere; ſi vero altius figatur clavus D, non poſſe. Nam [3]) cum celeritas globi in B ad circulationem integram perficiendam debeat eſſe ad celeritatem quam acquireret cadens ex DB ut $\sqrt{10}$ ad 2, ut modo oſtenſum fuit: hinc altitudines debebunt eſſe in duplicatâ ratione iſtius, nempe ut 10 ad 4 ſive 5 ad 2, ex quibus cadendo diverſas iſtas celeritates acquirat. Ergo AB ad DB ut 5 ad 2.

F I N I S.

1656 (voir la p. 479 du T. I) donne à la „ratio subduplicata" la forme $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$. Dans la traduction française nous avons parfois donné la préférence à la formule $\sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}$, d'autres fois à la formule $\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$. Pour le lecteur du vingtième siècle ces deux interprétations de l'expression „ratio subduplicata" sont d'ailleurs presqu' équivalentes.

[2]) Huygens écrit „sexcupla".

[3]) Au lieu de „Nam" Huygens écrit „Dem." (Demonstratio).

APPENDICE I [1])

À L'OUVRAGE: „DE VI CENTRIFUGA".

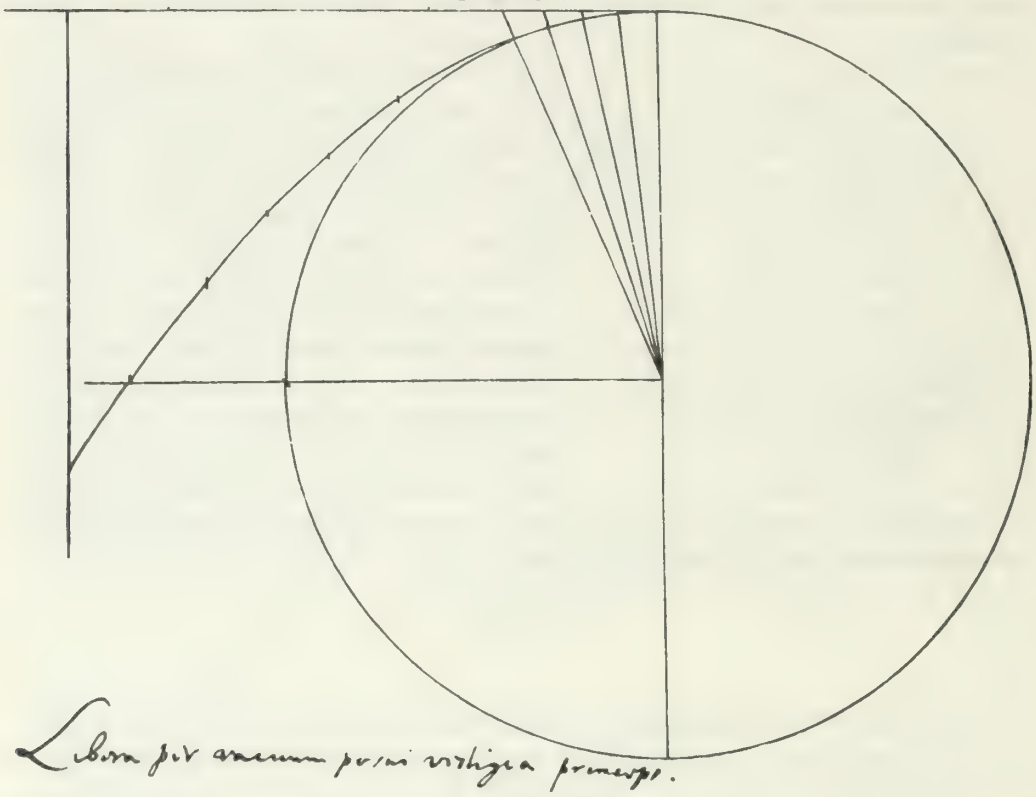
1659.

[Première Partie] [2]).

21 Oct. 1659.

Libera per vacuum posui vestigia princeps [3]).

[Fig. 1.] [4])



[1]) Nous reproduisons dans cet Appendice les premières pages du Manuscrit de Huygens mentionné dans la note 1 de la p. 254, qui, à l'exception du § 9 (p. 306), n'ont pas été publiées par les éditeurs des „Opuscula postuma".

[Fig. 2.]

Conatus vis ut noscatur videndum quid futurum ſi globus ſolvatur. Et id quidem ſolum quod ſtatim poſt ſolutionem fieret, ſicut et in gravi ſupra ſuperficiem cavam impoſito [Fig. 2] ubi tangens ejus ſuperficiei ſpectatur.

Descenſum gravium per 1, 3, 5, 7 &c. comprobat Ricciolus lib. 9 [5]).

De menſura certa per horologij oscillat. [6])

[Deuxième Partie] [7]).

1. Ut diameter ad circumferentiam ita ſi fiat hæc ad tertiam, quâque temporis particulâ grave è ſublimi cadens dictæ tertiæ longitudinem percurrit, eâdem temporis particula grave ſemel circumgyretur in plano horizontis, in quo funiculo ad paxillum relegato detineatur, cujus funiculi longitudo ſit dictæ diametri ſemiſſis, tunc funiculus tanta vi trahitur ex conatu gravis à centro recedendi quanta ab eodem gravi ſi ex illo ſuspenſum eſſet attraheretur, propria ſcilicet gravitate [8]).

---

[2]) Le Manuscrit de Huygens mentionné dans la note 1 débute par quelques annotations que nous avons réunies dans cette première Partie en mettant le vers d'Horace à la tête.

[3]) Horace, Epist. Lib. I, 19, vs. 21.

[4]) Dans la Fig. 1 la ligne parabolique représente sans doute une „parabole osculatrice" du cercle. Comparez la Fig. 4 de la p. 263 et la Fig. 22 de la p. 297.

[5]) Riccioli dans son „Almagestum Novum" (voir notre T. I, p. 402, note 7) traite la chute des corps graves aux pages 381—397 de la deuxième Partie du Premier Tome (T. I. Pars Post. Lib. IX. Sect. IV, Cap. XVI.) Il a fait lui-même de nombreuses expériences, en se servant des diverses tours de la ville de Bologne (p. 385). Ces expériences lui firent voir que la „proportio incrementi velocitatis à Galileo asserta" (p. 386) d'après laquelle les espaces parcourus dans des intervalles de temps égaux croissent „ut 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c." est juste.

[6]) C. à. d. „per horologij oscillationes". Comparez les notes 1 des pp. 278 et 280.

[7]) Le texte fait suite à celui de la première Partie.

[8]) Ce paragraphe fait voir que Huygens connaissait déjà au mois d'octobre de l'année 1659 la grandeur absolue de la force centrifuge. Si l'on appelle r le rayon de la circonférence ou la longueur du fil, la troisième („tertia") longueur sera $l = 2\pi^2 r$, et comme $l = \frac{1}{2}gt^2$ (où t représente le temps de révolution du mobile), on aura $t = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, donc la vitesse $v = \sqrt{gr}$, donc mg (force centrifuge selon la proposition de Huygens) $= \frac{mv^2}{r}$. Il est vrai que

2. Hinc ſequitur, ſi hoc fuerit, deinde autem circuitus duplo lentiores velimus, ita ut eadem trahendi vis ſervetur, oportere funiculum quadruplo longiorem adhibere.

3. Si ſingulis ſecundis ſemel circumagi pilam plumbeam vel aliud grave velimus in plano horizontali, ac tantundem trahere quantum ex funiculo ſuspenſam, quaeritur quae longitudo funiculi eſſe debeat quo relegata gyretur. Resp. quoniam uno ſecundo 14 pedibus [1]) descendit pila ex alto cadens, ſi ponatur diameter rotæ ſive dupla longitudo funiculi $\infty\, x$, erit circumferentia $\frac{22}{7}x$ ſecundum Archimedem, unde tertia proportionalis $\frac{484}{49}x$ æquanda 14 pedibus unde fit $x \infty$ 1 pes 5 unc. et $\frac{1}{121}$ unciae, cujus itaque ſemiſſis $8\frac{1}{2}$ poll. + $\frac{1}{142}$ [2]) eſt longitudo funiculi quæſita.

4. Quanta vero ſi 24 horis ſemel circumagi velimus? . . . . 5|290|250|579 p. radius ſive funiculi longitudo [3]).

3265860 duodecempedæ diametri telluris [4]).
6
19|595|160 tot pedum eſt terræ ſemidiameter Snellio [4]).

tantum abeſt igitur ut ob vertiginem terræ gravia expellantur, ut tum demum omnis gravitas ijs deceſſura ſit ſi ſemidiameter terræ eſſet 265 [5]) vicibus major quam nunc eſt. Nunc autem tantum $\frac{1}{265}$ pars gravitatis decedit corporibus, ſub æquatore poſitis. alijs minus.

---

dans ce paragraphe il n'est question que du cas particulier où la force centrifuge est égale à la pesanteur, mais les trois paragraphes suivants montrent que dans la pensée de l'auteur la force centrifuge est $\frac{mv^2}{r}$ pour des valeurs quelconques de v et de r.

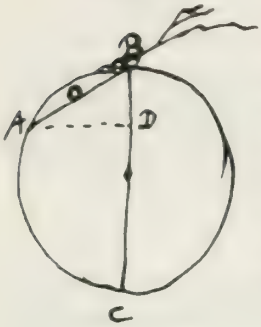
[1]) Il s'agit de pieds de Rhynlande, puisque, dans le § 4 qui suit, le diamètre de la terre est exprimé en pieds de Rh. En octobre 1659 Huygens ne connaissait donc pas encore la vraie valeur de $\frac{1}{2}g$, savoir $\left(15+\frac{7\frac{1}{2}}{12}\right)$ pieds de Rh. (voir p. 280, note 1). Dans une note marginale il „corrige" même le nombre 14 en $13\frac{8}{12}$.

[2]) Lisez $\frac{1}{242}$.

[3]) Nous avons supprimé le calcul, dans lequel Huygens part de la valeur $\frac{1}{2}g = 14$ pieds. Il

[Troisième Partie] [6]).

[Fig. 1.]



5. Si gravi conatus adſit descendendi ſecundum crescentem accelerationem 1, 3, 5, 7 &c. unoque, verbi gratia, ſecundo tranſeundi per dimidium ejus ſpatij, quod tranſiret pari tempore cadendo ad perpendiculum; eo conatu fit ut dimidia tantum gravitas ſentiatur ejus quæ ſentiretur pendente gravi ex fune. Ita grave in plano AB [Fig. 1] dimidium pendet ejus quod rectè ſuspenſum penderet, quia eodem tempore ſpatium BA quo duplum ejus BC in perpendiculo tranſiret. Scimus autem dimidium pendere quia BA dupla eſt BD perpendicularis.

[Fig. 2.]

6. Si longitudo funiculi dupla ſit alterius; converſio autem integra utriusque, ſive ſimiles arcus, eodem tempore fiant, erit attractio in funiculo longiori dupla quoque ejus quae in breviori ſentitur [7]).

remarque ensuite: „Hic calculus quoque corrigendus esset ponendo pro 14 p. 13.8 unc. sive $13\frac{2}{3}$ pedis". Il exécute en effet ce calcul et trouve maintenant une longueur de 5164292231 pieds.

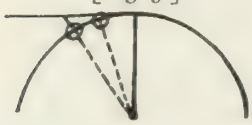
[4]) Comparez le Tome XV p. 533, note 3. Snellius exprime le diamètre de la Terre en Verges de Rhynlande, „Eratosthenes Batavus" Lib. II, Cap. XII.

[5]) Le nombre 265 (ou plutôt 264) correspond à la longueur du fil ou du rayon indiquée dans la note 3. On a, en effet, 5164292231 : 19595160 = 263,5..

[6]) Le texte fait suite à celui de la Partie précédente. Dans les §§ 5—8 Huygens esquisse le commencement d'une démonstration du théorème énoncé dans la deuxième Partie, en se basant sur le principe de la première: „Conatus vis ut noscatur videndum quid futurum si globus solvatur. Et id quidem solum quod statim post solutionem fieret". Il se contente dans les §§ 6—8 d'indiquer par une figure la démonstration des propositions qu'il énonce. La Fig. 3 montre combien le mobile s'écarte de la tangente après avoir parcouru des arcs fort petits. Dans les Fig. 2 et 4 il faut partout supposer construits des écarts analogues. Dans le cas de la Fig. 3 par exemple on démontre aisément qu'à la limite (lorsque les arcs considérés deviennent „infiniment petits") l'écart qui correspond à l'arc double est 4 fois plus grand que celui qui correspond à l'arc simple. D'après le § 5 il faut donc, pour maintenir le globe deux fois plus rapide dans son orbite, une force quadruple. Le § 10 est une application du théorème du § 1.

[7]) Huygens ajoute: „Hoc generaliter postea demonstratum ut et duæ sequentes". Comparez les Propositions I, II et III du Traité (p. 267—271).

[Fig. 3.]

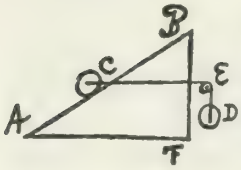


7. Si duplicetur velocitas circumvolutionis, attractio prioris quadrupla efficitur.

[Fig. 4.]

8. Si eadem celeritate in diverſæ magnitudinis circulis gyretur, hoc eſt ut eodem tempore arcus æquales (non autem ſimiles) abſolvat, erit attractionis vis in ratione contraria qua circulationis radij, ita ut in minori radio major ſit attractio.

[Fig. 5.]



9 [1]). Si pondus C ſuſtineatur in plano inclinato AB à pondere D liberè pendente, ſitque funis CE horizonti parallelus: Erit gravitas D ad C ſicut perpendicularis BF ad baſin FA. Ex Mechanicis. Hinc ſi BF æqualis ponatur FA debebit gravitas D ipſi C æqualis eſſe.

[Fig. 6.]

10. Si tubus AB inclinatus gr. 45, gyretur circa AC axem, ſingulis ſecundis ſemel circumiens, intraque eum collocetur ſphærula B, ea ſe hoc loco ſuſtinebit ſi fuerit AC vel CB $9\frac{1}{2}$ poll. Rhynl. [2]) Certe non decidet, ſed ſurſum evolabit [3]). Si enim in rota jaceret, diſtantiâ iſtâ $9\frac{1}{2}$ poll. [4]) à centro C remota; poſſet æqualem ſibi ſphærulam D pendentem ſuſtinere, alligatam videlicet fune DCB, ac per centrum rotæ dependentem. In tubo autem gyrato nititur à centro tendere ſecundum CB rectam. Eadem autem vis requiretur ad ſuſtinendum globulum in B ſuper plano BA, premendo nempe ſecundum CB, atque ad ſuſtinendum eundem globulum liberum

---

[1]) Comparez la p. 281; le § 9 n'est autre que le Lemma I des éditeurs.

[2]) Au lieu du nombre $9\frac{1}{2}$, Huygens avait écrit d'abord: $8\frac{3}{10}$. La formule $F = \frac{mv^2}{r}$ fait voir dans le cas du repos de la bille $CB = \frac{1}{2}g \times \frac{1}{2\pi^2}$. Pour $CB = 8\frac{3}{10}$ poll., $\pi = \frac{22}{7}$, on trouve $\frac{1}{2}g = 13\frac{8}{12}$ pieds de Rh.; pour $CB = 9\frac{1}{2}$ poll., $\frac{1}{2}g = 15\frac{7\frac{1}{2}}{12}$ pieds de Rh. Comparez p. 280, note 1 et p. 304, note 1.

[3]) Comparez le § 13. En vérité l'équilibre est instable vers les *deux* côtés puisque la force centrifuge diminue lorsque la bille descend et qu'elle augmente lorsque la bille monte.

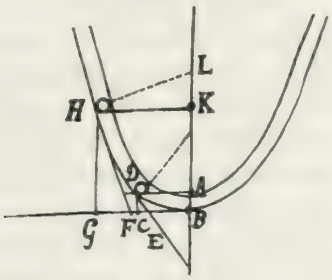
[4]) Au lieu du nombre $9\frac{1}{2}$, Huygens avait écrit d'abord $8\frac{3}{10}$. Comparez la note 2.

ſuspenſum. Ergo eodem conatu tendendi à centro quo ſphæra B ſuſtinere potis eſt (rotæ videlicet impoſita) ſibi æqualem D pendulam, eodem et ſeipſam in canali AB ſuſtinere poterit.

11. Si fiat canalis parabolicæ figuræ cujus $\frac{1}{2}$ latus rectum fuerit $9\frac{1}{2}$ unc. [4]) isque vertice impoſitus circa axem parabolæ convertatur ſingulis ſecundis; globulus quolibet loco intra canalem collocatus eum ſervabit. Si vero citius volvi incipiat contrariè ascendet.

Sit enim BA $\frac{1}{4}$ lateris recti et AD ordinatim applicata [5]). ergo hæc erit $9\frac{1}{2}$ unc. [4]). Hìc autem tangens DE inclinatur angulo ſemi-recto. Ergo per præcedentem ſuſtinebit ſe in D. Ponatur jam in H. Ergo quanto major eſt HK quam DA tanto violentior eſt attractio ſive conatus à centro tendendi per 6. Sed et in planum inclinatum HF (quæ tangens eſt in H) impreſſo ſecundum rectam KH tanto majori vi opus eſt ad ſe ſuſtinendum quam in plano DE ad angulum ſemirectum poſito, quanto major eſt perpend. HG quam GF, per 9 [7]). Ergo quum ſit ut HK ad DA ita HG ad GF (ut facile oſtendi poteſt [8])) apparet impetum circulationis etiam globo in H poſito ſufficere ad ſe ſuſtinendum.

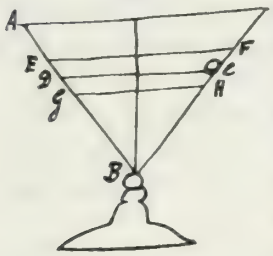
[Fig. 7. [6])]



12. Non ſolum autem ſi parabolæ latus rectum ſit $9\frac{1}{2}$ unc. [4]) ſed in quolibet alio canali parabolico quovis loco æque facile ſe ſphæra ſuspenſam tenebit. ſed celeritas qua gyrari debebit canalis, quo amplior fuerit parabola, eo minor erit.

13. In canali recto inclinato evolabit globulus neque usquam conquiescere poterit [9]); hoc vero aliter ſe habet in cono concavo in quo immoto globulus circumeat. Et hoc quidem experientia oſtendit; ſi enim in vitrum hujus formæ imponatur converſoque celeriter vitro, dein firmato, circumcurſare in eo globulus coeperit, puta in circulo CD; aliquamdiu hunc motum continuare cernitur, ut nec altius aſcendat nec deorſum labatur. Ratio autem ex ſuperioribus manifeſta eſt. Nam ſi exempl. gr. velit ascendere ad circulum EF, in eo æquali qua prius celeritate arcus non ſimiles prioribus ſed æquales

[Fig. 8.]



---

5) L'équation de la parabole étant $y^2 = 2px$, on a pour x (BA) $= \frac{1}{2}p$, AD $(y) = p$.

6) La droite DE représente une tangente à la parabole extérieure au point D, coupant la droite BG sous un angle de 45°.

7) C. à. d. par le Lemma I de la p. 281; ou plutôt par le Lemma II de la même page qui en découle.

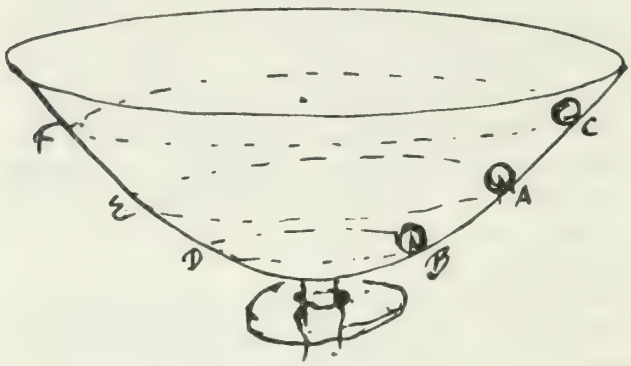
8) Huygens ajoute en marge: „quia scilicet DA ∞ CL, ſi fiat HL perp. tangenti HF".

9) Il est évident que si l'on pouvait donner au tube incliné *exactement* la vitesse de rotation

abſolvet eodem tempore, quamobrem, ex 8 [1]), quanto minor eſt diameter DC diametro EF tanto minor erit vis à centro recedendi, eunti per circulum EF quam per DC: ſed in DC tantam habebat duntaxat ut ſe ſuſtinere poſſet; eſtque plani inclinatio eadem; ergo cum in DC circulo ſe ſuſtinere potuerit, in circulo GH manere non poterit ſed eo unde venit aſcendet. ne quidem descendet itaque ex DC, niſi cum celeritatem paulatim amiſerit, occurſu aëris et vitri globique asperitate nonnulla.

14. Idem accidit in calice parabolico. Hoc autem pulcrum in hujusmodi calice vel ſpeculo parabolico, quod globus in eo circumiens omnes revolutiones ἰσοχρόνους habet, quocunque loco currens.

[Fig. 9.]



Eſt enim globo ad ſe ſuſtinendum eadem vi hîc opus atque in canali parabolico [2]). Si igitur breviori tempore circulum BD abſolveret quam antea circulum AE, plus virium haberet quam ut in BD circulo ſe ſuſtinere poſſet ideoque ascenderet. Ponitur autem non ascendere, ſed in circulo BD circumire. ergo non breviori tempore abſolvit circulum BD quam AE. Sed nec longiori; quoniam tunc non ſufficeret ei conatus à centro recedendi ad ſe ſuſtinendum in BD circulo, ideoque deſcenderet ad minorem circulum: Ponitur autem gyrari in BD; Ergo nec longiori tempore hunc abſolvet quam circulum AE. Itaque apparet eodem tempore utrumque percurri; eâdemque ratione quemcunque alium in calice circulum.

Minimo motu calicis, ita ut vertex ejus circellum exiguum describat, continuari poteſt motus globuli; cujus ſi circuitus numerentur, exacta temporis menſura hoc pacto habebitur, pendulo accuratior. Et ſi fuerit $\frac{1}{2}$ latus rectum parabolæ $9\frac{1}{2}$ poll. [2]) ſinguli circuitus ſecundo minuto peragentur.

Si loco ſpeculi parabolici ſumas ſphæricum radio $9\frac{1}{2}$ unc. [3]) fere eundem

requise, le globe resterait en place. Huygens veut dire que cet équilibre est instable, tandis qu'au contraire celui d'un globe tournant dans une cavité en forme de cône renversé est stable.

[1]) Les éditeurs (bien qu'ils n'aient pas publié ce texte) ont corrigé le „8" en „prop. 3". Comparez p. 271, prop. III.

[2]) Comparez le § 11.

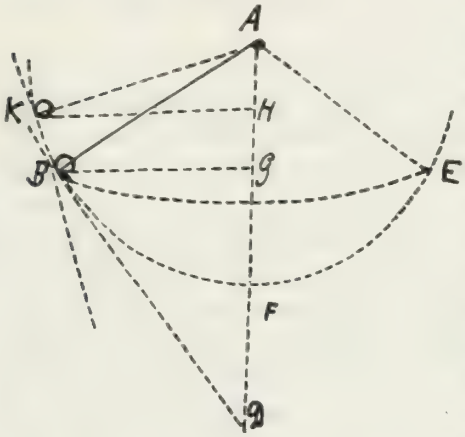
[3]) Au lieu du nombre $9\frac{1}{2}$, Huygens avait écrit d'abord $8\frac{3}{10}$. Comparez la note 2 de la p. 306.

effectum videbis, ſed erunt tamen circuitus paulo celeriores, et ij maxime qui erunt latiſſimi.

Globulum minimum quempiam conſidero, nam alioqui ob magnitudinem ejus ne in parabolico quidem perfecta ratio erit prorſus, ſed paulo citius majores globi circumcurrent.

15. Si globulus [Fig. 10] ex filo AB ſuſpenſus gyretur, ita ut A ſit coni vertex quem filum describit, quo obtuſiorem conum volumus, eo velociores circulationes eſſe neceſſe eſt [4]). Eadem enim vi centrifugâ hic opus eſt ad ſuſtinendum globum in circulo BE, atque ad eundem ſuſtinendum in tubo inclinato ſecundum BD; Et in univerſum eadem vis in quolibet alio circulo, quem globus ex filo AB religatus describit, requiretur, quæ deberet eſſe ad ſeſe ſuſtinendum in concavo ſphærico BFE, cujus radius AB. Ergo ſi BFE ſit circumferentiæ quadrans, hoc eſt angulus DAB ſemirectus, AG autem vel GB ∞ $8\frac{3}{10}$ [5]) unc. pedis Rhenol.ci oportet ſingulis ſecundis circulum BE horizontalem percurri. Et viciſſim quoties AG vel BG eſt $8\frac{3}{10}$ unc. hoc eſt AB $11\frac{8}{11}$ unc. fiatque gyrando angulus BAD ſemirectus, ſinguli circuitus ſingulis ſecundis abſolventur. Quod ſi definire oporteat quo tempore circuitus peragi debeat, ut ſe in K ſuſtinere queat, ſic procedam. Sit BG ∞ a, KH ∞ b, HA ∞ c. Quoniam HK major eſt BG, ideo ſi in K eodem tempore circumeat quo in B, erit vis centrifuga tanto major in K circumlato quam in B, quanto major KH quam BG per 6. Si autem fiat ut BG ad mediam proportionalem inter BG et KH ita tempus unius ſecundi quo in B circuit, ad aliud, illud erit tempus quo circumiens in K æqualem vim centrifugam nanciscitur atque habebat in B, per 2. Unde ut a —— $\sqrt{ab}$ —— $1''/\frac{1\sqrt{ab}}{a}$, ſive $\sqrt{\frac{b}{a}}$ [6]), eſtque hoc tempus dictum. Sed oportet in K eam vim habere quæ ſit ad vim in B ſicut KH ad HA. Ergo per 7. ſi fiat ut KH ad mediam proportionalem inter KH, HA, hoc eſt ad $\sqrt{bc}$, ita tempus $\sqrt{\frac{b}{a}}$ ad aliud quod

[Fig. 10.]



[4]) Huygens ajoute en marge: „Hoc postea melius tractavi." Comparez la Prop. X, p. 287, dont celle du texte est une conséquence immédiate.

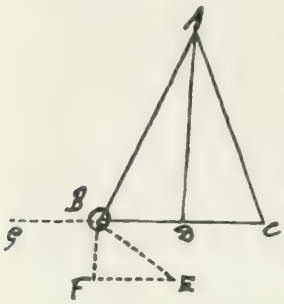
[5]) En marge: $9\frac{1}{2}$. Comparez la note 2 de la p. 306.

[6]) C'est-à-dire: $a : \sqrt{ab} = 1'' : x$; donc $x = \frac{\sqrt{ab}}{a}$ ou $\sqrt{\frac{b}{a}}$.

erit $\sqrt{\frac{c}{a}}$, hoc erit quæſitum. Hoc eſt ſi fiat ut BG vel GA ad mediam proportionalem inter GA et HA, ita 1″ ad aliud; id erit tempus quo circuitus in K abſolvi debet, ut ſe illic ſuſtinere globulus poſſit.

16. In concavo autem ſphærico eandem eſſe apparet temporum circulationis determinationem, ideoque tempora in ejusmodi concavo inæqualia eſſe.

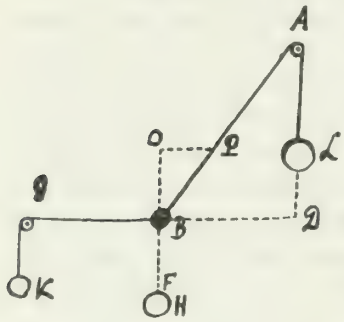
[Fig. 11.]



17. Cum globus [Fig. 11] ut modo gyratur in orbem horizonti parallelum, fune ligato ad A punctum, certum eſt validius trahi funem quam ſi pendeat ad perpendiculum ex A. quanto autem? Tanto inquam quanto major eſt AB latus coni ejus axe AD.

Eſt enim vis centrifuga qua globus ſeſe ſuſtinet eadem atque ea qua ſe ſuſtineret in plano BE (perpendiculari ad AB) ſi traheretur ſecundum rectam DBG, ad hoc autem opus eſſet funem BG trahi pondere [Fig. 12] [1]) quod eſſet ad gravitatem globi ſicut BF ad FE, per 9, cui ponderi nunc æquipollet vis centrifuga. Idem vero globus tota gravitate ſua deorſum trahitur ſecundum perpendiculum BF. Itaque ſic ſe res habet tanquam ſi extremus funis B duobus alijs colligatus ſit nimirum BG, BF, quorum BF appenſam habeat gravitatem ipſi B globo æqualem, alter vero BG trahatur à gravitate quæ ſit ad gravitatem globi B ut BF ad FE. quanto igitur ad hæc ita ſuſtinenda opus eſt in A ſive L? Invenitur ex mechanicis pondus L ſe habere ad H ut AB ad AD. tanta igitur attractio quanta eſt ponderis L, ſentitur in A, cum globus B circumducitur fune AB in circulo BC. quod erat demonſtrandum.

[Fig. 12.]



Sequitur hinc, quæcunque fuerit funis AB longitudo, ſi angulus coni quem is funis describit idem exiſtat idemque pondus maneat B, eandem ſentiri attractionem in A vertice [2]).

Conſidera tantum conatum recedendi a centro eſſe ſecundum horizontalem lineam ut BG, ideoque in gyratione fili in ſitu AB tantundem accedere gravitati vel attractioni ponderis B, quantum accederet ſi quis filo BG horizonti parallelo in ſitu illo ipſum retineret [1]). atqui notum eſt tantum tunc dictæ gra-

[1]) En marge Huygens trace encore une autre figure peu différente de la Fig. 12. Le poids K et la petite poulie en G y ont été remplacés par une main qui tire dans le sens BG. Nous avons ajouté à la fig. 12 les lettres O et P qui ne se trouvent chez Huygens que dans cette dernière figure.

vitati accedere ut opus ſit pondere L ad æquilibrandum B, ut nempe L ſit ad B ſicut PB ad BO, hoc eſt, ut BA ad AD. Ergo apparet gyrando pondus B in extenſione AB, ſentiri in A attractionem quantam facit pondus L ſimpliciter appenſum.

Itaque nec planum BE nec pondus K conſiderare opus eſt [3]).

[2]) Les alinéas qui suivent sont écrits en marge dans le Manuscrit.

[3]) Cette dernière remarque, jointe à celles des notes 7 de la p. 305 et 4 de la p. 309, fait voir pourquoi les éditeurs ont cru devoir supprimer les §§ 1—8 et 10—17. Huygens a continué la division en §§ encore jusqu'au numéro 20. Le § 18 correspond à la Prop. IX du Traité, p. 287 (et sa démonstration), le § 19 à la démonstration de la Prop. XVI (p. 297—299) et le § 20 à la démonstration de la Prop. XVII (p. 299—301). Viennent ensuite les considérations sur la pesanteur par lesquelles les éditeurs font débuter le traité.

APPENDICE II [1]

À L'OUVRAGE „DE VI CENTRIFUGA".

[?] [2]

1. Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate quam acquirit cadendo ex altitudine quæ ſit quartæ parti diametri æqualis; habebit conatum a centro recedendi æqualem ſuæ gravitati; hoc eſt, æque valide filum quo retinetur intendet atque cum ex eo ſuspenſum eſt [3]).

2. Si duo mobilia æqualia æquali velocitate feruntur in circulis inæqualibus, erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum [4]).

3. Si duo mobilia æqualia æqualibus in circulis gyrentur, celeritatibus inæqualibus, ſed utraque motu æquabili; erit vis centrifuga velocioris ad vim tardioris, in duplicata ratione celeritatum [5]).

4. Si mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus, circulos inæquales percurrant, erit vis centrifuga in majori circulo ad eam quæ in minori, ſicut diameter majoris circuli ad minoris diametrum [6]).

5. Si mobilia duo æqualia, in circumferentijs inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint, erit tempus circuitus in majori circumferentia ad tempus circuitus in minori, in ſubdupla ratione diametrorum [7]).

---

[1]) Les treize théorèmes qui suivent sont empruntés aux p. 43—45 du Manuscrit N°. 13, intitulé „Excerpta ex Adversarijs Christiani Hugenij", où Huygens avait la coutume d'inscrire ses principales découvertes. À l'exception du onzième et du treizième, tous ces theorèmes se retrouvent, généralement dans une rédaction un peu différente, dans le Traité tel qu'il a été publié par de Volder et Fullenius, comme l'indiquent les notes suivantes. Le treizième correspond à un paragraphe de la partie du Manuscrit (mentionné dans la note 1 de la p. 254) qui n'a pas été publiée par les éditeurs.

[2]) La p. 15 du Manuscrit 13 porte la date du 26 février 1663, et la p. 48 celle du 5 mai 1673.

[3]) Voir p. 275, Prop. V.

[4]) Voir p. 271, Prop. III.

[5]) Voir p. 269, Prop. II.

[6]) Voir p. 267, Prop. I.

[7]) Voir p. 273, Prop. IV.

6. Si mobilia duo ex filis ſuspenſa gyrentur ita ut circulos horizontales describant, capite altero fili immoto manente, fuerint autem conorum quorum ſuperficies fila hoc motu describunt, altitudines æquales: tempora quoque æqualia erunt quibus utrumque mobile circulum ſuum percurrit [8]).

7. Si mobilia duo, ex filis ſuspenſa, gyrando deſcribant circulos horizonti parallelos, erunt tempora circulationum in ſubduplicata ratione altitudinum conorum, quorum ſuperficiem fila percurrunt [9]).

8. Hinc ſequitur, ſi mobile ex filo ſuspenſum, cujus alterum caput fixum manet, deſcripſerit circulos inæquales horiz. parallelos, tempora circulationum fore in ſubduplicata ratione ſinuum angulorum quibus filum ad planum horizontis inclinatur [10]).

9. Si in ejusmodi gyratione fuerit angulus, quo filum ad horizontis planum inclinatur, ſemirectus; erit tempus circuitus unius ad tempus caſus perpendicularis ex dimidia coni, quem filum deſcribit, altitudine, ut circumferentia circuli ad radium [11]).

Probatur ex eo quod hoc caſu debeat mobile habere vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem, hoc eſt æqualem illi quam acquireret cadendo ex altitudine quartæ partis diametrî circuli quem deſcribit, per prop. 1 huj.

10. Ex duobus præcedentibus efficitur, quando mobile ex filo ſuspenſum circulos omnium minimos deſcribit eſſe tempus unius circuitus ad tempus caſus perpendicularis ex ipſius fili altitudine, ſicut circumferentia circuli ad latus quadrati ſibi inſcripti. Quod tempus circuitus proinde æquale eſt oscillationi minimæ ejusdem penduli, qua ultro citroque moveretur [12]).

11. Ex hoc et 8^{a}. demonſtratur, ſi mobile, ita ſuspenſum circulum horizonti parallelum deſcribat, tempus circuitus eſſe ad tempus caſus perpendicularis ex altitudine filo æquali, ſicut circumferentia deſcripta radio qui ſit medius proportionalis inter fili longitudinem et altitudinem coni quem gyrando filum deſcribit, ad eam quæ poteſt fili duplum [13]).

Hinc colligitur tempus circuitus ejusmodi fore æquale tempori caſus perpendicularis ex altitudine filo æquali quando angulus inçlinationis fili ad horizontis planum erit 2 gr. 54 min. proximè [14]).

---

[8]) Voir p. 285, Prop. VIII.
[9]) Voir p. 287, Prop. X.
[10]) Voir p. 289, Prop. XI.
[11]) Voir p. 291, la démonstration de la Prop. XII (début du deuxième alinéa).
[12]) Voir p. 289, Prop. XII.
[13]) C. à. d. à une longueur, dont le carré est égal au double du carré de la longueur du fil.
[14]) Voir p. 293, Prop. XIV.

12. In cavo conoidis parabolici, axim ad perpendiculum habentis, circuitus omnes globuli, circulos horizonti parallelos percurrentis, ſive magnos ſive parvos, æqualibus temporibus peraguntur [1]).

13. Quod ſi parabolæ latus rectum fuerit 19 unciarum pedis Rhen. ſinguli circuitus ſingulis ſecundis minutis peragentur, nempe ſi globulus minimus intelligatur. nam centrum ejus in ſuperficie conoidis verſari neceſſe eſt. Colligitur ex 10^{a}. et ex eo quod pendulum longitudinis $9\frac{1}{2}$ unc. oscillationem duplicem, vel etiam circellum minimum, det ſingulis ſecundis, ut docet experientia [2]).

[1]) Voir p. 281, Prop. VII.
[2]) Voir le § 11, p. 307.

APPENDICE III [1]

À L'OUVRAGE „DE VI CENTRIFUGA".

[?].

De Vi Centrifuga

ex motu circulari, Theoremata.

I.

Si mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri [2]).

II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum [3]).

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, ſed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum [4]).

---

[1]) Les treize théorèmes qui suivent sont ceux que Huygens publia en 1673 sans démonstrations à la fin de son „Horologium oscillatorium". Il n'est pas possible de dire quand il les rédigea. Tous ces théorèmes se retrouvent, quelquefois dans une rédaction un peu différente, dans le Traité, tel qu'il a été publié par de Volder et Fullenius. Comparez les notes 2 de la p. 267 et 4 de la p. 281.

[2]) Voir p. 267, Prop. I; et p. 312, Th. 4.

[3]) Voir p. 271, Prop. III; et p. 312, Th. 2.

[4]) Voir p. 269, Prop. II; et p. 312, Th. 3.

IV.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in ſubdupla ratione diametrorum [1]).

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem; hoc eſt, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo ſuspenſum eſt [2]).

VI.

In cava ſuperficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, ſive parvæ ſive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora ſingula æquantur binis oscillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti parabolæ genitricis [3]).

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus ſuspenſa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum ſuperficiem fila hoc motu deſcribunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt [4]).

---

[1]) Voir p. 273, Prop. IV; et p. 312, Th. 5.
[2]) Voir p. 275, Prop. V; et p. 312, Th. 1.
[3]) Voir p. 281, Prop. VII (Proposition ajoutée par les éditeurs); et p. 314, Th. 12.
[4]) Voir p. 285, Prop. VIII; et p. 313, Th. 6.

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus ſuspenſa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in ſubduplicata ratione ipſarum altitudinum [5]).

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum ſingulorum tempora, ad tempus caſus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia ſunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum [6]).

X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque ſingulos abſolvat eo tempore quo pendulum, longitudinem ſemidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum abſolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem [7]).

XI.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori caſus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. ſcrup. 54. proxime. Exacte vero, ſi anguli dicti ſinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inſcriptum ad quadratum à circumferentia ejus [8]).

---

[5]) Voir p. 287, Prop. X; et p. 313, Th. 7.
[6]) Voir p. 289, Prop. XII (Proposition ajoutée par les éditeurs); et p. 313, Th. 10.
[7]) Voir p. 291, Prop. XIII (Proposition ajoutée par les éditeurs).
[8]) Voir p. 293, Prop. XIV (Proposition ajoutée par les éditeurs); et p. 313, Th. 11, deuxième alinéa.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, ſed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila ſua intendent, in eadem ratione quæ eſt filorum longitudinis [1]).

XIII.

Si pendulum ſimplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc eſt, ſi per totum circuli quadrantem deſcendit: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum ſuum trahet, quam ſi ex illo ſimpliciter ſuspenſum foret [2]).

[1]) Voir p. 295, Prop. XV (Proposition ajoutée par les éditeurs). Au lieu de „longitudinis" lisez plutôt „longitudinum".

[2]) Voir p. 295, Prop. XVI (Proposition ajoutée par les éditeurs).

APPENDICE IV [1]

À L'OUVRAGE „DE VI CENTRIFUGA".

[1659.] [2]

tempora vibrationum pendulorum in ſubduplicata ratione longitudinum [3]. tempora circulationum horizontalium ſunt in ſubduplicata ratione axium [4] conorum quos deſcribunt [5].

---

[1]) Cet Appendice est emprunté à la p. 173 du Manuscrit A.

[2]) À la p. 158 du Manuscrit A on trouve la description de deux expériences sur la chute des corps, dans lesquelles Huygens fait usage d'un pendule („Expertus 21 Oct. 1659" et „Expertus 23 Oct. 1659"). À la p. 175 de ce Manuscrit on trouve les mots „Inventum die 5 Oct. 1659" (il s'agit d'une horloge à pendule conique). La p. 176 où une expérience du même genre que celles du 21 et du 23 oct. est décrite, porte la date du 15 nov. 1659. Notons que Huygens dit à cette dernière date avoir déterminé „ex motu conico penduli" le temps nécessaire pour la chute d'un corps d'une hauteur déterminée (on trouvera cette expérience dans le Tome suivant).

[3]) Galilée, observateur assidu du pendule, connaissait cette propriété. Dans l'édition des „Discorsi e Dimostrationi Matematiche, in Leida, appresso gli Elsevirii, 1638", on lit (p. 97): „Sagredo: . . Io hò ben mille volte posto cura alle vibrazioni in particolare delle lampade pendenti in alcune chiese da lunghissime corde inauuertentemente state mosse da alcuno. . ." p. 96 „Salviati: . . Circa poi i descendenti per gli archi. . . mostra. . . l'esperienza passarsi tutti in tempi eguali. . . Quanto poi alla proporzione de i tempi delle vibrazioni di Mobili pendenti da fila di differente lunghezza [lizez: lunghezze], sono essi tempi in proporzione suddupla delle lunghezze delle fila, ò vogliam dire lunghezze [lisez: le lunghezze] esser'in duplicata proporzion de i tempi." Dans l'édition nationale des „Opere di Galileo" on trouve ces passages aux p. 140 et 139 du Vol. VIII (1898). (Huygens peut avoir lu les dialogues de Galilée dans l'édition de 1638, ou dans celle de 1656, mentionnée à la p. 494, note 1, de notre Tome I). Peut-être Huygens qui en ce moment faisait des expériences où le pendule jouait un rôle a-t-il observé lui aussi en ces jours cette propriété du pendule ordinaire.

[4]) Leçon alternative: „altitudinum".

[5]) Comparez la Prop. IX, à la p. 287 de ce Tome. Huygens peut avoir vérifié par l'expérience ce résultat du calcul. Il est possible aussi qu'il ait observé cette propriété du pendule conique (correspondant plus ou moins à celle du pendule ordinaire) avant d'en pouvoir donner une explication théorique.

APPENDICE V [1])

À L'OUVRAGE „DE VI CENTRIFUGA".

[1659.] [2])

Vid. fig. pag.æ præced.is primam.

(1) Sit $\angle$ BAE = 45°.
(2) mobile B vim centrifugam gravitati ſuæ æqualem debet habere. ea celeritate debet circumferri quam habet poſt caſum ex dimidia AE vel EB.
(3) tempus per AK ad tempus per BE ut VA [3]) ad circumferentiam EB.
(4) ſed tempus per BE ad tempus per K hoc eſt per circulum omnium minimum ut KA ad VA.
(5) tempus per AK ad tempus per K ut KA ad circumferentiam EB.
(6) ſed tempus per $\frac{1}{2}$AK ad tempus per AK ut BE vel EA ad AK.
(7) tempus per $\frac{1}{2}$AK ad tempus per K ut BE ad circumferentiam BE, hoc eſt, ut radius ad circumferentiam.
(8) Itaque tempus minimæ gyrationis penduli AK æquale eſt minimæ ejusdem oscillationi [4]).

---

[1]) Cet Appendice est emprunté au Manuscrit A, p. 177. Le feuillet sur lequel se trouvait la figure fait défaut, ainsi que les quatre feuillets précédents.

[2]) La p. 176 porte la date du 15 nov. 1659, et la p. 188 celle du 15 déc. 1659.

[3]) Voir (au quatrième alinéa de la p. 322) la note qui suit.

[4]) La Proposition (8) correspond à la Prop. XII du Traité (p. 289) où il est dit: „Si pendulum motu conico latum circuitus minimos faciat, eorum singulorum tempora... æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium ejusdem penduli minimarum". Dans (8) il faut donc entendre par „minima oscillatio" le temps d'une petite oscillation double.

La Prop. XII du Traité, comme nous l'avons dit aux pp. 281 note 4 et 317 note 6, a été

empruntée par les éditeurs à l'„Horologium oscillatorium"; ce sont eux qui y ont ajouté une démonstration.

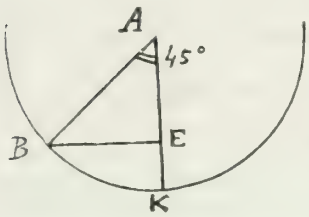
Or, le texte de la Prop. (8) du présent Appendice ressemble davantage à celui du Th. 10 du Manuscrit N°. 13 (p. 313): „tempus circuitus (c. à. d. le temps de révolution dans des „circuli omnium minimi") proinde æquale est oscillationi minimæ ejusdem penduli, qua ultro citroque moveretur": ici aussi le *temps* d'une oscillation double est désigné par l'expression peu exacte: „oscillatio minima". Il est peut-être permis d'en conclure que les propositions du Manuscrit N°. 13 ont été rédigées plus tôt que les propositions de l'„Horologium oscillatorium".

Le présent Appendice qui contient la démonstration de la Proposition (8) — les chiffres (1)....(8) y ont été ajoutés par nous — fut sans doute précédé par d'autres démonstrations Comparez p. 325 note 6. Il est possible que les feuillets qui font défaut (les p. 177 et 178 contiennent encore d'autres calculs et peuvent avoir été laissées dans le livre pour cette raison) furent enlevés par de Volder et Fullenius, et qu'ils s'en sont servi pour rédiger leurs démonstrations des Prop. VII, XII, XIII, XIV et XV du Traité.

Quoi qu'il en soit, le texte du présent Appendice et la démonstration de la Prop. XII (p. 289—291) ont entre eux une forte ressemblance.

La Fig. 20 (p. 293) qui accompagne la démonstration des éditeurs sert aussi à celle des propositions suivantes; sinon, elle aurait dû avoir la forme de la Fig. 1 de la présente note qui correspond au texte de Huygens. Les points C et D de la Fig. 20 correspondent à nos points B et E. Le point le plus bas doit être désigné ici par la lettre K comme dans la Fig. 19 (p. 289).

[Fig. 1.]



Si nous appelons r le rayon BE et l la longueur du fil AK, l'équation (6) nous apprend que

$$\sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{2l}{g}} = r : l,$$

donc $l = r\sqrt{2}$, conformément à la Fig. 1.

L'équation (5), savoir $\sqrt{\frac{2l}{g}} : 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = l : 2\pi r$, est satisfaite: l'expression „tempus per K" est expliquée dans l'équation (4) et l'expression „circumferentia EB" désigne la circonférence dont EB est le rayon.

L'équation (7) est également satisfaite. Pour pouvoir conclure de l'équation (7) à l'équation (8) il faut supposer connue l'équation:

(9) tempus per $\frac{1}{2}$AK ad tempus minimæ oscillationis (oscillation double) ut radius ad circumferentiam,

qui peut aussi s'écrire:

(9') $\frac{1}{4}$ tempus minimæ oscillationis ($\frac{1}{2}$ oscillation simple) ad tempus per $\frac{1}{2}$AK = semicircumferentia ad diametrum.

Sous cette forme elle correspond à la Prop. XXV de la Pars Secunda de l'„Horologium Oscillatorium", où il est dit à propos de l'oscillation cycloïdale:

„tempora descensus... ad punctum imum verticis... sunt inter se æqualia, habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloïdis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum". En effet, l'axe de la cycloïde est égal à la moitié du rayon

de courbure au point le plus bas. Nous savons d'ailleurs par une observation de Huygens à la p. 188 du Manuscrit A que la Prop. XXV de la Pars Secunda de l'„Horologium Oscillatorium" lui était connue avant le 15 décembre 1659.

L'équation (4) peut s'écrire $\sqrt{\frac{2r}{g}} : 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = l : \mathrm{VA}$

et l'équation (3) $\sqrt{\frac{2l}{g}} : \sqrt{\frac{2r}{g}} = \mathrm{VA} : 2\pi r.$

De chacune de ces équations l'on tire

$$\mathrm{VA} = 2\pi r \sqrt[4]{2}.$$

La longueur VA, égale à celle d'une circonférence de rayon $\sqrt{\mathrm{AE} \times \mathrm{AK}}$, était probablement représentée dans la figure de Huygens par une droite auxiliaire en dehors de la Figure 1, ou plutôt par une droite ayant une de ses extrémités au centre A.

Considérons maintenant les équations (2).. (8) dans l'ordre du texte.

L'équation (2) correspond à la Prop. V (p. 275) du Traité, ou bien au Th. 1 du Manuscrit N°. 13 (p. 312). Les éditeurs (p. 289—291) commencent également leur démonstration de la Prop. XII en partant de la Prop. V.

L'équation (3) peut s'écrire:

$$\text{tempus per AK ad tempus per BE ut } \sqrt[4]{2} \text{ ad } 1$$

ou bien: $$\text{tempus per } \tfrac{1}{2}\mathrm{BE} : \text{tempus per } \tfrac{1}{2}\mathrm{AK} = 1 : \sqrt[4]{2}.$$

Elle correspond donc à la phrase suivante des éditeurs: „Est autem DC ad CA [Fig 20] ut 1 ad $\sqrt{2}$, adeoque tempus casus perpendicularis ex dimidia DC ad tempus casus perpendicularis ex dimidia CA, quæ tempora sunt in subduplicata ratione DC ad CA, erit in ratione 1 ad $\sqrt{\sqrt{2}}$."

L'équation (4) peut s'écrire, en divisant le premier et le troisième terme par $\sqrt{2}$:

$$\text{tempus per } \tfrac{1}{2}\mathrm{BE} : \text{tempus per K} = r : 2\pi r \sqrt[4]{2}.$$

Sous cette forme elle correspond à la phrase suivante des éditeurs (p. 291): „tempus ergo casus perpendicularis ex dimidia DC, est ad tempus circuitus minimi, ut radius ad circumferentiam ductam in $\sqrt{1/2}$."

L'équation (5), qui se déduit des équations (3) et (4), peut s'écrire, en multipliant deux termes par $\sqrt{2}$:

$$\text{tempus per K} : \text{tempus per } 2\mathrm{AK} = 2\pi r : 2r$$

ou bien: $$\text{tempus per K} : \text{tempus per } 2\mathrm{AK} = 2\pi r \sqrt[4]{2} : 2r \sqrt[4]{2}.$$

Elle correspond donc à la phrase suivante des éditeurs: „tempus igitur circuitus minimi penduli AC ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, ut circumferentia ducta in $\sqrt{\sqrt{2}}$ ad duplum radii ductum in $\sqrt{\sqrt{2}}$, sive ut circumferentia ad diametrum."

L'équation (7), qui se déduit de l'équation (5) au moyen de l'équation évidente (6), est à peu près identique à l'équation (5).

Enfin les éditeurs supposent connue la Prop. XXV de la Pars Secunda de l'„Horologium Oscillatorium" (voir p. 291 note 2 et p. 282 note 3) et concluent de la même manière que Huygens à l'égalité du temps de révolution suivant une très petite circonférence d'une part et du temps d'une très petite oscillation double d'autre part.

APPENDICE VI [1])

À L'OUVRAGE „DE VI CENTRIFUGA".

[Première Partie] [2])

[1666.] [3])

103005000 pedes hora 1 transeundi motu æquabili [4]) celeritate ∞ $\frac{1}{4}$ diam. terræ [5]).

15 gr. transeunt hora 1.
15 mille germ. in gr. 1

75
15

225 mille germ. transit mobile hora 1, cum in terra et sub æquatore situm

---

[1]) Cet Appendice est emprunté au Manuscrit C, p. 89 et 90.

[2]) Manuscrit C, p. 89.

[3]) La p. 79 porte la date du 20 nov. 1665, et la p. 92 est datée „à Paris 1666".

[4]) Comme la suite le fait voir, Huygens se propose de calculer la vitesse de rotation que la terre devrait avoir pour qu'un mobile placé sur l'équateur éprouvât une force centrifuge égale à sa gravité. Suivant la Prop. V du Traité (p. 275), il faut à cet effet calculer la vitesse qu'un mobile d'abord en repos acquiert en parcourant d'un mouvement uniformément accéléré, avec l'accélération g, une distance égale à $\frac{1}{4}$ du diamètre de la terre. En prenant le pied rhénan pour unité de longueur et l'heure pour unité de temps, il trouve par un calcul que nous supprimons, et qui revient à calculer $\sqrt{gR}$, R étant le rayon de la terre, la vitesse 103005000. Ce nombre est beaucoup trop grand; comme Huygens n'avait apparemment pas sous la main la mesure de Snellius (p. 304 de ce Tome), il prend pour le diamètre de la terre une valeur plus de 50 °/₀ trop grande (voir p. 324, note 1). Pour $\frac{1}{2}g$ il prend la valeur 13.4.1 pieds. Il est vrai que plus tard il indique sur la même feuille la vraie valeur de $\frac{1}{2}g\left(15.7\frac{1}{2}\right)$ et la mesure de Snellius, mais sans corriger le calcul. Voir à ce sujet la note 4 de la p. 326.

[5]) Huygens veut dire que le nombre 103005000 représente la vitesse d'un mobile ayant parcouru d'un mouvement accéléré (accélération g) $\frac{1}{4}$ du diamètre de la terre.

eſt. 36000 pedes in mill. germ. 1 [1]). . . 8100000 pedes quos conficit mobile ſub æquatore hora 1.

Celeritas ergo quæ efficeret vim centrifugam æqualem gravitati eſt ad celeritatem qua mobile ſub æquatore fertur ut 1030 ad 81 fere.

Sed vires centrifugæ mobilium in æqualibus circulis circumlatorum ſunt inter ſe ut celeritatum quadrata. ergo

$$1060900 : 6561 \text{ fere ut } 165 \text{ [2]) ad } 1.$$

Ergo ſub æquatore decedit gravibus amplius quam $\frac{1}{165}$ [3]) ſuæ gravitatis, hoc eſt leviora illic ſunt quam ſub polo parte ſui ponderis $\frac{1}{165}$ [3]).

Quantum in latitudine 45 gr.? fit circiter $\frac{1}{343}$ [4]).

$$7 : 5 = \frac{1}{165} : \frac{1}{245}.$$

$$7 : 5 = \frac{1}{245} : \frac{1}{343}.$$

---

[1]) Ici aussi Huygens annote plus tard: „verius 22800". C'est cette erreur dans la longueur du mille germanique (p. 88 du Manuscrit: „36000 ped. mill. germ. ut puto") qui conduisit Huygens à une valeur excessive pour le diamètre de la terre; voir la note 4 de la p. 323.

[2]) Plutôt 162.

[3]) Cette fraction fut corrigée en $\frac{1}{162}$. Une valeur beaucoup meilleure $\left(\frac{1}{265}\right)$ avait déjà été trouvée par Huygens en 1659 (p. 304).

[4]) Pour trouver ce nombre, il faut multiplier la fraction $\frac{1}{165}$ deux fois de suite par $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ou $\frac{5}{7}$, une fois parce que le rayon de la circonférence décrite est $\frac{5}{7}$ de celui de l'équateur, et une fois parce que la direction de la force centrifuge fait un angle de 135° avec celle de la gravité.

Dans l'équation $7 : 5 = \frac{1}{165} : \frac{1}{245}$ il y a une erreur de calcul. On trouverait $\frac{1}{245}$ si la fraction précédente était $\frac{1}{175}$.

[Deuxième Partie] [5]).

[1666.]

alio modo idem quod pagina priore.

$9\frac{1}{2}$ poll. eſt inventus radius circuli in lib. A, in cuius circumferentia currente gravi eamque tranſeunte tempore 1″, vis ejus centrifuga gravitati æqualis eſt [6]).

lin. 114 [7]) 61848x lineæ quas continet $\frac{1}{4}$ diam. terræ [8]).

36000 ∞ x pedum num. in mill. germ. [9]).

371088000

185544

2226528000 lineæ $\frac{1}{4}$ diam. terr.

debebam poſuiſſe lineæ $\frac{1}{2}$ diam. terræ ſed corrigitur infra multipl.o per 2.

19530947 [10])

2

39061894 [11])

toties pondus gravis æquaret vis centrifuga ſub æqu. ſi 1 ſec. terra revolveretur.

---

5) Manuscrit C, p. 90.

6) Consultez la p. 281 de ce Tome. On ne trouve plus dans le Manuscrit A le calcul en question; comparez à ce sujet l'Appendice V, note 4, p. 320, quatrième alinéa de cette note.

7) $9\frac{1}{2}$ pouces $= 9\frac{1}{2} \times 12 = 114$ lignes.

8) Huygens prend ici pour le rayon de la terre $15 \times 360 \times \frac{7}{44} = 859$ mill. germ. Si l'on appelle x le nombre de pieds rhénans contenus dans un mille germanique, le demi-rayon de la terre devient $\frac{1}{2} \times 144 \times 859x = 61848x$ lignes rhénanes.

9) Nombre trop grand; comparez la note 1 et la note 11 qui suit.

10) C'est le quotient de 2226528000 par 114.

11) Le nombre 39061894 (beaucoup trop grand) résulte donc de la division de la longueur du rayon terrestre, exprimée en pouces, par $9\frac{1}{2}$. Voir pour la correction de ce nombre la p. 326, note 4.

Troisième Partie] [1]).

[?] [2])

28500 perticæ in gradu uno amb. terræ Snellio [3]).
12
342000 pedes
divid. per 15
22800 pedes in mill. germ. Ergo projectionis vis minor aliquanto erit quam calculo præcedenti inventa est [4]).

---

[1]) Manuscrit C, p. 90. [2]) Les lignes qui suivent ont été ajoutées plus tard (encre différente).
[3]) „Eratosthenes Batavus", 1617, Lib. II, Cap. XII.
[4]) Pour corriger le nombre 39061894 trouvé plus haut (voir p. 325) il faut donc le multiplier par $\frac{22800}{36000}$, ce qui donne 24739200. La force centrifuge à l'équateur serait donc égale à 24739200 fois la pesanteur si la terre tournait en une seconde.

En divisant ce nombre par $(24 \times 3600)^2$, on trouve que la force centrifuge à l'équateur est égale à $\frac{1}{302}$ fois la pesanteur. Cette fraction est plus petite que la fraction $\frac{1}{265}$ obtenue en 1659 (p. 304) parce qu'à la p. 281 la valeur de $\frac{1}{2}g$ est correcte (15 pieds $7\frac{1}{2}$ pouces), tandis qu'à l'endroit considéré à la p. 304 Huygens avait pris $\frac{1}{2}g = 13$ pieds 8 pouces. (Voir la note 5 de la p. 305).

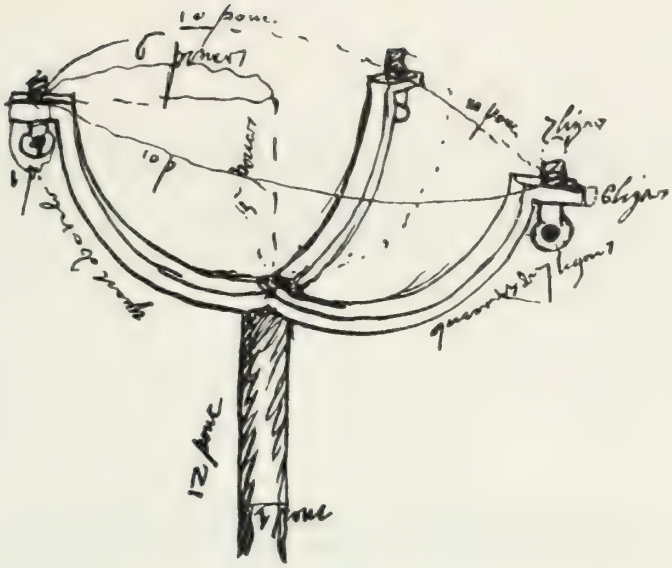
Dans ce calcul nous avons pris avec Huygens le rayon terrestre égal à $859 \times 22800 = 19585200$ pieds rhénans. A la p. 304 de ce Tome Huygens avait pris avec Snellius, qui se sert d'une valeur plus exacte du nombre π, le rayon terrestre $= 19595160$ pieds. À la p. 91 du Manuscrit C Huygens écrit: „3264500 perticæ in diam. terræ." Le rayon terrestre serait alors de 19587000 pieds. En ce cas la force centrifuge à l'équateur serait égale à 24741474 fois la pesanteur si la terre tournait en une seconde. La fraction qu'il s'agit de calculer devient de nouveau $\frac{1}{302}$. On trouve la même valeur en corrigeant le calcul de la première Partie de cet Appendice.

Plus tard, dans le „Discours de la Cause de la Pesanteur" de 1690 Huygens prend avec Picard le rayon de la terre $= 19615800$ pieds parisiens $= \frac{144}{139} \times 19615800 = 20321404$ pieds rhénans. Il trouve alors (en appliquant cette fois la Prop. XIII, p. 291 de ce Tome) pour la fraction considérée $\frac{1}{17^2}$ ou $\frac{1}{289}$ à peu près. D'après les méthodes du présent Appendice on trouve, pour cette valeur du rayon terrestre, la fraction $\frac{1}{291}$; mais en prenant plus exactement (comme Huygens le fait aussi dans le Discours nommé) la durée de la rotation de la terre $= 23$ h. 56 m., on trouve précisément $\frac{1}{289}$.

APPENDICE VII[1]).

À L'OUVRAGE „DE VI CENTRIFUGA".

[1668.][2])



Pour mettre dessus une roue de 3 pieds de diam. et pertice[3]) de 12 pouces, percee au centre, pour les experiences de la force centrifuge[4])

---

[1]) Cet Appendice est emprunté au Manuscrit C, p. 211.

[2]) La p. 209 porte la date du 21 juillet 1668 et la p. 231 celle du 25 février 1668.

[3]) Ce mot peu français (il nous a été impossible de le lire autrement) indique la „pertica" ou perche de 12 pouces qu'on voit dans la figure et qui supporte l'appareil.

[4]) Nous ignorons si l'instrument esquissé par Huygens, dont les dimensions sont indiquées dans la figure (on lit en outre dans cette figure à gauche „quart de cercle" et à droite „quarrés

de 7 lignes") a jamais été construit. Ce qui est certain c'est que Huygens a fait des expériences de ce genre. En effet nous lisons dans son „Discours de la Cause de la Pesanteur" de 1690 à la p. 130: Il [Descartes] a consideré, comme moy, l'effort que font les corps, qui tournent circulairement, à s'eloigner du centre; dont l'experience ne nous permet pas de douter. Car en tournant une pierre dans une fronde, l'on sent qu'elle nous tire la main, & cela d'autant plus fort que l'on tourne plus viste: jusques-là mesme que la corde peut venir à se casser. J'ay fait voir cy devant cette mesme proprieté du mouvement circulaire, en attachant des corps pesants sur une table ronde, percée au centre, & qui tournoit sur un pivot; & j'ay trouvé la determination de sa force, & plusieurs Theoremes qui la concernent: que l'on peut voir à la fin du livre que j'ay escrit du Mouvement des Pendules". (Comparez pour cette dernière phrase, l'Appendice III qui précède). Les expériences avec la table ronde ont été faites à Paris en 1667: Huygens en fait mention dans sa lettre du 2 déc. 1667 à son frère Constantyn (T. VI, p. 164).

TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666.

Avertiſſement.

Toutes les Pièces que nous avons réunies ſous le nom de „Travaux divers de Statique et de Dynamique de 1659 à 1666" ſont inédites, à l'exception de la Première Pièce de la Statique. Elles ſont empruntées en majeure partie au Manuſcrit B, quelques-unes cependant aux Manuſcrits A et C (voir ſur les Manuſcrits A, B, etc. la p. 4 du T. XV) et à quelques feuilles ſéparées qui ſe trouvent dans le portefeuille „Chartæ Mechanicæ".

Statique.

Les Manuſcrits de Huygens, datant de 1659 et des années ſuivantes jusqu'à ſon départ pour Paris en 1666, ne contiennent que quelques rares pages conſacrées à la Statique: ſes conſidérations ſe bornent à la ſolution des problèmes diſcutés dans les trois Pièces qui ſuivent (p. 379—383).

La Première de ces Pièces, datant de 1659, a déjà paru dans le T. II (p. 394—395). Il y eſt queſtion de l'équilibre de poids ſuspendus à des cordes. Comme les figures l'indiquent, Huygens calcule les poſitions d'équilibre en partant du principe que pour un très petit déplacement compatible avec les liaiſons le centre de gravité des poids doit reſter à la même hauteur. En d'autres termes (puisque dans les cas conſidérés l'équilibre ne peut être inſtable ou indifférent) il admet que dans la poſition d'équilibre le centre de gravité de l'enſemble des poids

conſidérés ſe trouve auſſi bas que poſſible. C'eſt là pour lui un Axiome qu'il avait déjà formulé en 1646 en conſidérant le cas particulier de la chaînette: „Duæ vel plures gravitates... alligatæ chordæ... non poſſunt niſi unico ſitu quiescere: idque tali ut centrum gravitatis earum... quantum poteſt deſcendat et plano terræ [plan ſuppoſé perpendiculaire à la direction de toutes les lignes droites ſuivant lesquelles les points matériels tendent à deſcendre] admoveatur" (Chr. Huygens à Merſenne, T. I, p. 40; comparez la démonſtration de la Prop. 2 à la p. 44 du T. I). Lorsqu'il écrivit en 1650 ſon Traité „De iis quæ liquido ſupernatant", il partit du même principe, d'après lequel le centre de gravité du ſyſtème des corps conſidérés, ſolides ou liquides, ſe place toujours auſſi bas que poſſible (voir le premier alinéa de la p. 84 du T. XI) [1]).

Dans la Deuxième Pièce, datant également de 1659, Huygens conſidère un cas d'équilibre indifférent, celui de deux poids D et E [Fig. 3, p. 380] reliés entre eux par une corde et inverſement proportionnels aux côtés AB et AC du triangle à baſe horizontale AC: il démontre géométriquement qu'il y a équilibre parce que, lorsqu'un des poids monte, de ſorte que l'autre descend, le centre de gravité

---

[1]) Comparez la note 1 de la p. 56 du présent Tome. On trouve dans le Traité „de Motu Gravium naturaliter descendentium et projectorum", faisant partie des „Opera geometrica" de E. Torricelli, publiés à Florence en 1644, le principe suivant (p. 99): „Præmittimus. Duo gravia simul coniuncta ex se moueri non posse, nisi centrum commune grauitatis ipsorum descendat"... „Quando vero [graue unum ex duobus compositum] ita constitutum fuerit ut nullo modo commune ipsius centrum grauitatis descendere possit, graue penitus in sua positione quiescet". Ce que Torricelli dit ici pour le cas de deux corps, Huygens le dit pour un nombre de corps quelconque. Rien ne prouve d'ailleurs que Huygens connaissait l'ouvrage de Torricelli déjà en 1646. Dans la Correspondance on rencontre le nom de Torricelli pour la première fois à la p. 52 du T. I (lettre de Mersenne à Huygens du 8 janvier 1647).

D'autres auteurs avant Torricelli avaient formulé ce principe plus vaguement (voir P. Duhem, „Les Origines de la Statique", Paris, A. Hermann, 1905—1906); le Père Mersenne p. e. écrit: „Centrum grauitatis cuiuscunque corporis nunquam ascendit naturaliter, sed tantum violenter, alioqui media, vel plusquam media pars grauitatis ascenderet, quod fieri nequit; nec enim vnquam vna pars ascendit, nisi descendens præualeat; sicut nec in bilance vna pars aliam attollere potest, nisi grauior fuerit" („Universæ Geometriæ Mixtæque Mathematicæ Synopsis", publiée pour la première fois en 1626; le passage cité se trouve à la p. 436, „De Centro Gravitatis Solidorum XV", de l'édition de 1644, à Paris, chez A. Bertier). Huygens lisait Mersenne en novembre 1646 (voir la p. 34 du T. I). La „Synopsis" se trouve dans le volume des „Cogitata Physico-mathematica" de 1644 dont Huygens fait mention à cet endroit.

reſte toujours à la même hauteur. C'eſt une preuve plus directe que la célèbre démonſtration de Stevin dans ſes „Beghinſelen der Weeghconſt" de 1586 [2]), d'après laquelle il doit y avoir équilibre dans le cas conſidéré parce que ſinon il ſe produirait un mouvement perpétuel, ce qui ſuivant Stevin eſt inadmiſſible [3]).

Huygens connaiſſait les Travaux de Stevin depuis ſa jeuneſſe: Stampioen de Jonge lui en recommande la lecture déjà en 1645; voir la p. 7 du T. I [4]).

La Troiſième Pièce (p. 381), de 1662, qui traite de la rupture d'une poutre linéaire homogène ſoutenue en deux points eſt la plus remarquable [5]). Huygens étend hardiment le principe d'après lequel le centre de gravité deſcend autant que poſſible, au cas où la poutre conſidérée ſe briſe. Il affirme (p. 383) qu'en cas de fracture la poutre homogène doit ſe rompre à l'endroit où, l'angle de rupture étant ſuppoſé conſtant, la grandeur que nous appelons travail de la peſanteur et qu'il déſigne par „deſcenſus gravitatis" atteint un maximum. Il faut ſe repréſenter les deux parties de la poutre comme cohérant encore après la rupture et formant entre elles un angle dont la différence infiniment petite avec l'angle primitif de 180° conſtitue l'„angle de rupture".

Le lecteur du vingtième ſiècle, qu'il ſoit partiſan ou adverſaire de l'idée de mettre en avant dans la Statique des principes relatifs au centre de gravité, admettra ſans le moindre doute la vérité matérielle du principe d'équilibre de Torricelli et de Huygens (voir la note 1), mais il n'admettra pas ſans examen, croyons-nous, l'exactitude du principe énoncé par Huygens dans le cas de la rupture de la poutre linéaire homogène. Même ſi le lecteur accorde que la peſanteur tend à accomplir un travail maximum et que, pour amener la rupture de la poutre conſidérée, il faut, où que cette rupture ſe produiſe, une même déformation préalable (caractériſée par l'angle de rupture) qu'on peut conſidérer comme infiniment petite, il n'oſera pas, nous ſemble-t-il, en tirer la concluſion que la rup-

---

[2]) Voir la note 12 de la p. 7 du T. I.

[3]) „Ce mouvement n'auroit aucune fin, ce qui est absurde" (traduction de Girard, à la p. 448 des „Oeuvres mathématiques de Simon Stevin, augmentées par Albert Girard", Leyde, Elsevier, 1634).

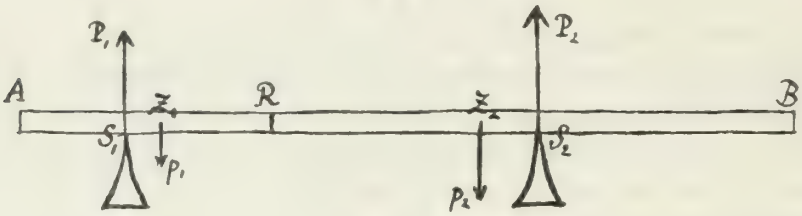
[4]) Voir aussi, à la p. 570 du T. II, la lettre de Huygens à Mersenne du 12 juillet 1648.

[5]) C'est peut-être à la suite de ses réflexions sur une question traitée par Blondel (voir sur lui la p. 287 du T. I) que Huygens écrivit cette Pièce (voir ses lettres à son frère Lodewijk du 10 août 1662 à la p. 194 et du 17 août 1662 à la p. 198 du T. IV).

ture doit ſe produire au point indiqué par Huygens. Nous démontrerons donc que l'intuition de Huygens ne le trompe pas.

Conſidérons d'abord le cas plus général d'une poutre linéaire quelconque AB [Fig. 1], ſoutenue en deux points S_1 et S_2 arbitrairement choiſis de part et d'autre du centre de gravité de la poutre.

[Fig. 1.]



Soit $S_1S_2 = a$. Appelons R le point de rupture et déſignons par Z_1 et Z_2 reſpectivement les centres de gravité des parties AR et RB de la poutre, peſant p_1 et p_2 reſpectivement. Les ſupports exercent ſur la poutre les forces verticales P_1 et P_2, dont la ſomme eſt évidemment égale à $p_1 + p_2$.

On aura, en déſignant S_1Z_1 par z_1 et S_2Z_2 par z_2 et en prenant, avant la rupture, les moments par rapport aux points S_2 et S_1,

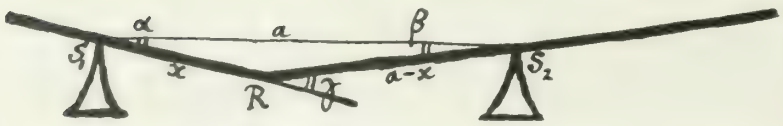
$$P_1 = \frac{a - z_1}{a} p_1 + \frac{z_2}{a} p_2 ,$$

$$P_2 = \frac{z_1}{a} p_1 + \frac{a - z_2}{a} p_2 .$$

Le „momentum rupturæ" au point R, ſitué à une diſtance x du point S_1, eſt donc

$$M = P_1 x - p_1 (x - z_1) = \frac{(a - x) z_1}{a} p_1 + \frac{x z_2}{a} p_2 .$$

[Fig. 2.]



L'angle de rupture étant γ [Fig. 2] et les angles d'inclinaiſon des deux parties de la poutre étant α et β reſpectivement, on a $x\alpha = (a - x)\beta$ et $\alpha + \beta = \gamma$, par conſéquent $\alpha = \frac{a - x}{a}\gamma$ et $\beta = \frac{x}{a}\gamma$.

Le travail correſpondant de la peſanteur eſt donc

$$dA = p_1 \alpha z_1 + p_2 \beta z_2 = \left(\frac{(a-x)z_1}{a} p_1 + \frac{x z_2}{a} p_2\right)\gamma,$$

ce qui ſe réduit, vu la valeur obtenue pour le moment M, à

$$dA = M\gamma \text{ [1]}.$$

Puisque l'angle γ eſt conſtant par hypothèſe, le travail dA eſt maximum lorsque le moment de rupture M atteint un maximum. Or, ſi la poutre eſt homogène, tout-le-monde accordera qu'elle doit ſe briſer à l'endroit où le moment de rupture eſt le plus grand. Elle ſe briſera donc là où le travail de la peſanteur conſidéré par Huygens eſt le plus grand. C. Q. F. D. [2]).

Il réſulte de la formule $dA = M\gamma$ ou $M = \frac{dA}{\gamma}$ que dans le cas de la Fig. 6 (p. 382) le moment de rupture au point K eſt la moitié du moment de rupture au

---

[1]) Dans la note 7 de la p. 383 nous obtenons le même résultat pour un cas particulier.

La formule $dA = M\gamma$ reste valable, comme on peut s'en convaincre, lorsque les points Z_1 et Z_2, ou l'un d'eux, ne sont pas situés entre les points S_1 et S_2. On peut p. e. considérer le cas où, Z_1 étant situé entre S_1 et S_2 et Z_2 en dehors de cet espace, le travail de la pesanteur est positif pour la partie gauche de la poutre, négatif et plus petit en valeur absolue pour la partie droite qui, nous l'avons dit, continue après la rupture à cohérer avec la partie gauche.

[2]) On peut démontrer que, si les supports sont placés de telle manière que le moment M atteint un maximum entre S_1 et S_2, ce moment maximum existe au point R pour lequel $p_1 = P_1$ (et par conséquent aussi $p_2 = P_2$).

En effet, une condition nécessaire pour que le moment M soit maximum est

$$P_1 - \frac{d[p_1(x-z_1)]}{dx} = 0, \text{ ou } P_1 - p_1 + p_1 \frac{dz_1}{dx} - (x - z_1)\frac{dp_1}{dx} = 0.$$

Or, on trouve en considérant les moments des parties de la poutre AR et (AR $+ dx$) autour du point S_1:

$$p_1 z_1 + x\frac{dp_1}{dx}dx = \left(p_1 + \frac{dp_1}{dx}dx\right)(z_1 + dz_1), \text{ c. à. d. } p_1\frac{dz_1}{dx} - (x - z_1)\frac{dp_1}{dx} = 0.$$

On a donc, au point R considéré, $P_1 = p_1$. C.Q.F.D.

Dans le cas de la poutre homogène considérée à la p. 383 qui suit (voir la note 7 de cette page) le support gauche porte un tiers du poids de la poutre. D'après la théorie de la présente note, le point où le moment de rupture atteint un maximum est donc situé à un tiers de la longueur de la poutre à partir de l'extrémité gauche, conformément au résultat du calcul de la note 7 nommée.

point S. En effet, l'angle de disjonction γ étant par hypothèſe le même pour l'une et l'autre rupture, l'angle de rotation de la partie AK dans le premier cas ſera la moitié de l'angle de rotation de la partie DW dans le deuxième cas (comparez le dernier alinéa de la note 4 de la p. 383); par conſéquent le travail dA ſera dans le premier cas deux fois plus petit que dans le deuxième, et le même rapport exiſtera d'après notre formule entre les moments correſpondants M. C.Q.F.D.

Cette Troiſième Pièce eſt encore remarquable à un autre point de vue. Nous y liſons (p. 381): „momentum rupturæ in C fit multiplicando CD in diſtantiam CE", c. à. d. „le moment de rupture au point C s'obtient en multipliant CD par la diſtance CE". CD eſt une ligne droite qui repréſente le poids de la partie CD de la poutre, et CE le bras de levier de cette partie par rapport au point C. Huygens obtient donc en 1662 le moment, dans le ſens que nous attachons à ce mot, en multipliant un poids par une diſtance. Nous n'avons pas réuſſi à trouver un veſtige de cette conception moderne du moment (voir le premier alinéa de la p. 338) avant 1659.

Il eſt vrai que Commandin [1]) écrit déjà en 1565: „Centrum gravitatis uniuscuiusque ſolidæ figuræ eſt punctum illud intra poſitum, circa quod undique partes æqualium momentorum conſiſtunt. Si enim per tale centrum ducatur planum figuram quomodocumque ſecans ſemper in partes æquiponderantes ipſam dividet",

---

[1]) „Federici Commandini Urbinatis liber de Centro Gravitatis Solidorum", Bononiæ, ex officina Alexandri Benacii MDLXV, p. 1.

[2]) En 1679 encore le P. Lamy écrit: „Centre de pesanteur est un point, autour duquel toutes les parties d'un corps sont en équilibre, ou ce qui est la même chose, ont une égale puissance". Les paroles citées se trouvent à la p. 1, Définition IV, de l'édition de 1734, chez P. Mortier, à Amsterdam, du „Traitez de Mechanique de l'Equilibre des Solides et des Liqueurs" par le P. Lamy, traité dont la première édition parut à Paris en 1679.

[3]) „Centrobaryca Guldini", Viennæ Austriæ, Formis G. Gelbhaar Typographi Cæsarii, Anno MDCXXXV. Les paroles citées se trouvent à la p. 23 (Lib. I, Cap. I, § 7).

[4]) Pour Valerio et son éditeur C. Manolessius l'existence d'un centre de gravité dans chaque corps est un postulat. On trouve ce „postulatum" („Omnis figuræ grauis unum esse centrum grauitatis") à la p. 5 du traité intitulé „De Centro gravitatis solidorum libri tres Lucæ Valerii", Bononiæ, 1661.

[5]) Les Mechaniques de Galilee Mathematicien & Ingenieur du Duc de Florence. Avec plvsievrs Additions rares, & nouuelles, utiles aux Architectes, Ingenieurs, Fonteniers, Philosophes, & Artisans. Traduites de l'Italien par L.P.M.M." A Paris, chez Henry Gvenon, MDCXXXIV. La traduction des passages cités dans le texte de cet Avertissement se trouve chez Mersenne aux p. 7 et 8.

mais ici l'expreſſion „æqualia momenta" n'a nullement le ſens précis qu'on ſerait tenté de lui attribuer: l'auteur parle en ſomme de parties qui ſe tiennent en équilibre puisqu'elles poſſèdent l'une par rapport à l'autre une vertu équilibrante égale [2]). C'eſt ce qui réſulte auſſi du traité de Guldin de 1635 [3]) qui répète la définition de Commandin presque dans les mêmes termes et ajoute: „Notandum vero partes illas binas. . . *æquiponderantes eſſe reſpectu centri gravitatis totius: hoc enim eſt eſſe æqualium momentorum*" (nous ſoulignons) [4]).

Galilée dans ſa Mécanique (dont Merſenne publia en 1644 la traduction françaiſe [5]), tandis que le texte italien ne parut qu'en 1649 [6])), écrit: „Centro della gravità ſi diffinisce eſſere in ogni corpo grave quel punto, intorno al quale conſiſtono parti di eguali momenti: ſi che, imaginandoci tale grave eſſere dal detto punto ſoſpeſo e ſoſtenuto, le parti deſtre equilibreranno le ſiniſtre, le anteriori le poſteriori, e quelle di ſopra quelle di ſotto" [7]). Chez Galilée l'expreſſion „momento" déſigne le plus ſouvent la puiſſance d'une force dans la ligne de ſa direction (d'une façon analogue on parle de „momenta celeritatis", comme Huygens le fait auſſi à la p. 255 de ce Tome), mais cet emploi n'eſt pas conſtant. Avant la définition citée du centre de gravité, Galilée donne de „momento" la définition ſuivante: „Momento è la propenſione di andare al baſſo, cagionata non tanto dalla gravità del mobile, quanto dalla diſpoſizione che abbino tra di loro diverſi corpi gravi. . . È dunque il momento quell'impeto di andare al baſſo, compoſto di gravità, poſizione e di altro, dal che poſſa eſſere tal propenſione cagionata" [7]). D'une part il dira donc en parlant d'une pierre qu'on ſoulève à l'aide d'un levier: „io non ho nominato la gravità totale del ſaſſo, ma ho parlato del momento che egli tiene ed eſercita ſopra 'l punto A, eſtremo termine della leva BA, il quale è ſempre minore dell' intero peſo del ſaſſo" [8]); ce „momento" eſt donc une force, une partie du poids de la pierre; d'autre part il dira: „un peſo pendente dalla eſtremità [d'une poutre encaſtrée dans un mur] ha momento doppio di quello che arebbe pendendo dal mezzo" [9]); ici l'expreſſion „momento"

[6]) „Le Opere di Galileo", Ed. Naz. II, p. 152.
[7]) „Le Opere di Galileo", Ed. Naz. II, p. 159.
[8]) „Le Opere di Galileo", Ed. Naz. VIII, p. 155 („Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze, Giornata seconda"). Huygens connaissait les „Discorsi etc." depuis 1646 (voir la note 1 de la p. 68 du T. XI, ainsi que la dernière ligne de la p. 72 et la première ligne de la p. 73 du T. XI).
[9]) Même tome, p. 157.

ſe rapproche du moment ſtatique moderne. Toutefois, même dans des paſſages de ce dernier genre, Galilée ne définit jamais la grandeur d'un moment par le produit d'une force et d'une diſtance.

Le premier livre écrit dans une langue moderne dans lequel on rencontre cette définition du moment eſt, croyons-nous, l'ouvrage de P. Varignon de 1687. Il écrit [1]: „l'on voit que l'action d'une puiſſance ne ſe prend pas ſeulement de la grandeur de la force, mais auſſi de la diſtance de ſa ligne de direction au point d'appui du levier ſur lequel elle agit: *de ſorte que le produit de cette diſtance par la force de cette puiſſance, eſt la juſte meſure de ſon action, ou de l'impreſſion qu'elle fait ſur ce levier*" (nous ſoulignons). Plus tard Varignon donne à ce produit le nom de moment: „Le produit de chaque poids ou puiſſance abſolue par ſa diſtance à l'appui du Levier auquel elle eſt appliquée, s'appelle en Latin *Momentum*, ce que le Corollaire... me fait croire ne pouvoir mieux s'exprimer en François que (Définition 1) par le mot de *Force relative* ou *d'impreſſion* ou *d'action* ſur le Levier auquel ce point ou cette puiſſance eſt appliquée: nous ne laiſſerons pourtant pas de l'appeler auſſi *Moment*, pour nous moins éloigner du langage ordinaire" [2]).

Quoique, comme nous l'avons dit, Huygens en 1662 conſidère effectivement le „momentum" comme le produit d'un poids par une diſtance, on ne peut guère accorder à Varignon (comparez le premier alinéa de la p. 337) que ce ſoit là le „langage ordinaire" des auteurs latins qui ſe ſervent de l'expreſſion „momentum". Bien qu'on fût parfaitement que deux „momenta" dans le cas du levier droit ou

---

[1]) „Projet d'une nouvelle Méchanique", Paris, chez la Vve d'E. Martin, 1687; pag. 2.

[2]) „Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en 1687, ouvrage posthume de M. Varignon", Paris, 1725; pag. 304.

[3]) Voir p. e. „J. B. Benedicti patritii Veneti diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber", Taurini, apud haeredem Nicolai Bevilaquæ, MDLXXXV, où on lit à la p. 143: „Quod quantitas cuiuslibet ponderis, aut virtus movens respectu alterius quantitatis cognoscatur beneficio perpendicularium ductarum a centro libræ ad lineam inclinationis".

Dans la Première Addition (p. 11) du P. Mersenne à sa traduction des „Mechaniques de Galilée" (voir la note 5 de la p. 336) il dit: „La figure qui suit explique mieux le discours precedent, car il est euident que le poids E qui pend au levier AB éleué [par une rotation du levier autour de son centre] en E ne pese que comme s'il estoit au point K [projection de E sur le levier horizontal], etc."

On peut donc, si l'on veut, dire avec P. Duhem (ouvrage cité à la note 1 de la p. 332, T. I, p. 294): „La première addition est consacrée à exposer la notion de moment; la forme sous

coudé p. e. ſont *proportionnels* aux poids et aux diſtances du point d'application [3]), on a rarement eu la hardieſſe de multiplier purement et ſimplement un poids, ou une force, par une diſtance, et de dire que ce produit conſtitue le „momentum". On ne trouve ce produit ni chez le P. Hon. Fabri [4]) ni chez Maurolycus [5]) qui cependant ſe ſervent l'un et l'autre, le dernier ſurtout, de l'expreſſion „momentum" dans un ſens qui ſe rapproche de celui du moment conſidéré comme un produit.

C'eſt Wallis, croyons-nous, qui parle pour la première fois à propos du moment

---

laquelle cette notion nous est présentée rappelle fort celle que lui a donnée Giovanni Battista Benedetti"; mais il convient de remarquer que ni le mot „moment" ni la définition du moment comme un produit ne se trouve chez Benedetti ou Mersenne.

Cette „notion du moment" se trouve d'ailleurs déjà dans le traité intitulé „Jordani Opusculum de ponderositate, Nicolai Tartaleæ studio correctum novisque figuris auctum. Venetijs, apud Curtium Trojanum, MDLXV". Mais la partie du traité qui y est consacrée peut être considérée comme „une relique de la Science grecque parvenue sans doute aux Occidentaux par l'intermédiaire des Arabes". En effet „la notion de moment y est présentée sous une forme voisine de celle qu'elle affecte en l'*Élévateur* de Héron d'Alexandrie" (Duhem, ouvrage cité, T. II, p. 319—320). Voir „les Mécaniques ou l'Élévateur de Héron d'Alexandrie, publiées et traduites par le Baron Carra de Vaux. Extrait du Journal Asiatique. Paris, 1894, L. II, Sect. IV" ou l'édition plus récente „Heronis Alexandrini Opera quæ supersunt omnia, Vol. II, Fasc. I, Mechanica et Catoptrica, recensvervnt L. Nix et W. Schmidt. Lipsiæ, in ædibvs B. G. Tevbneri, MCM". Héron s'appuie sur le traité perdu d'Archimède Περὶ ζυγῶν (qu'il cite aussi ailleurs en grec).

4) Le P. Hon. Fabri dans sa „Physica, id est, Scientia Rervm Corporearvm", Premier Tome, Lugdvni, Sumptibus Lavrentii Anisson, MDCLXIX (ouvrage déjà nommé dans la note 4 de la p. 142 du T. III) écrit (p. 240): „Definitio V. *Centrum gravitatis, est punctum illud in corpore, quod omnia grauitatis momenta æqualiter dirimit...* Clara est definitio: superest tantùm ut explicetur quid sit momentum grauitatis". „Definitio VII. *Momentum grauitatis, vel grauitationis, est vis illa, quæ singulis punctis corporis grauis inest, quatenus hoc circa aliquod punctum immobile verti censetur*, vt in vecte, libra, &c. hinc momentum semper accipitur, cum respectu, seu comparatione ad punctum aliquod immobile; *vel quatenus cum alia contraponderante, seu contranitente comparatur...* nunc tantùm dixisse satis est, *momentum esse vim ipsam ponderis, non quidem absolutè, sed respectivè, & comparatiuè consideratam*".

5) Dans une liste d'ouvrages non publiés à la fin des „Opuscula mathematica" de Maurolycus, imprimés à Venise en 1575, on rencontre les „4 libri de Momentis æqualibus" du même auteur. Ces livres ne parurent qu'en 1685 dans le recueil „Admiranda Archimedis Syracusani monumenta omnia Mathematica quæ extant, ex traditione doctissimi viri D. Francisci Maurolyci", Panormi, apud D. Cyllenium Hesperium, MDCLXXXV. On y lit p. e. à la p. 86 („Diffinitiones" VIII et IX): „Momentum est vis ponderis à spatio quopiam contra pendentis. Unde ponderum æqualium momenta possunt esse inæqualia: Et è contrario contingit momentorum æqualium pondera esse inæqualia". Et à la p. 104: „Momentorum ratio componitur ex ratione ponderum, & ex ratione spatiorum, à quibus grauia pendent".

le langage concis du ſavant moderne. Il eſt vrai que dans une grande partie de ſa Mécanique [1]) il a l'habitude de parler, comme Maurolycus, de différents „momenta" (il les déſigne d'ailleurs le plus ſouvent par le mot „ponderationes") qui ſont l'un à l'autre dans des rapports compoſés, même là où il démontre l'exiſtence d'un centre de gravité unique dans chaque corps [2]), mais dans ſes lettres et dans d'autres parties de ſa Mécanique ſon ſtyle eſt plus ſuccinct. On trouve dans notre Tome II une lettre de ſa main du 1 janvier 1659 dans laquelle il écrit à Huygens, en parlant du centre de gravité d'une ſurface limitée par une ciſſoïde, que les „momenta" des éléments de ſurface par rapport à un certain axe forment une ſérie dont chaque terme eſt le produit d'un élément de ſurface par une diſtance [3]). Puiſqu'il s'agit d'un centre de gravité, on doit évidemment conſidérer ces éléments de ſurface comme des éléments pondérables. Il faut cependant remarquer qu'il n'y a en cette matière qu'une très légère différence entre Wallis et Maurolycus. En effet, dans ſon traité de la Cycloïde, publié également en 1659, Wallis dit, en calculant la place de quelques centres de gravité: „Per *momentum* autem, tum hic, tum paſſim alibi, intelligo factum ex magnitudine in diſtantiam ab æquilibrii plano ducta; ut quæ momentis ſunt proportionalia" (Opera, I p. 508). En d'autres termes: les „momenta" doivent être conſidérés comme des entités proportionnelles aux produits nommés, mais, pour parler plus brièvement, on

---

[1]) „Johannis Wallis Opera Mathematica, Oxoniæ, E Theatro Sheldoniano, MDCXCV, Vol. 1. On y trouve la „Mechanicorum sive Tractatus de Motu Pars Prima, Anno 1669 typis edita", et la „Pars secunda, quæ est de Centro Gravitatis, ejusque Calculo, Anno 1670 edita". Wallis s'inspire des méthodes de Cavalieri: à la p. 645 on trouve la „Definitio. Continuum quodvis (secundum Cavallerii Geometriam Indivisibilium) intelligitur ex Indivisibilibus numero infinito constare". Notons en passant (comparez la note suivante) que Wallis ne partage évidemment pas l'opinion de Huygens au sujet des démonstrations où il est fait usage des indivisibles de Cavalieri (voir la note 1 de la p. 191 du T. XIV).

[2]) P. 645—658 du Vol. 1 nommé dans la note précédente. À la p. 658 on trouve la Prop. XV: „Cujusque Gravis, Centrum Gravitatis unicum est" avec le Scholium: „Demonstravimus itaque (& credo, omnium primi) quod Postulare solent alii [comparez la note 4 de la p. 336], tum Dari, in quovis Gravi, centrum aliquod Gravitatis, tum illud, unicum esse".

[3]) „Positâ linea æquilibrij AO, erunt momenta rectarum BL, series composita ex serie magnitudinum BL... et distantiam [lisez: „distantiarum". Comparez la pag. 547 du T. I des Œuvres de Wallis, où l'on trouve, p. 542—569, cette même lettre amplifiée sous le titre: „Nobilissimo doctissimoque viro D. Christiano Hugenio, Const. F. Johannes Wallis S.] AL". Les „rectæ BL" sont des éléments de surface, d'après Cavalieri. Wallis dans cette lettre se propose de démontrer les avantages de la méthode de cet auteur; il réussit en effet à calculer le centre de gravité considéré. Le problème avait été posé par Huygens qui l'avait résolu d'une autre façon (voir la p. 212 du T. II).

peut improprement donner le nom de „momenta" à ces produits eux-mêmes.

Peu de temps après, comme nous l'avons vu, Huygens parle auſſi, et plus expreſſément que Wallis, du „momentum" d'un poids comme d'un produit.

D'ailleurs Huygens avait déjà eu en 1652 la hardieſſe de multiplier l'une par l'autre deux grandeurs de nature différente: il parle (voir le dernier alinéa de la p. 95, ainſi que la Prop. XI de la p. 73) des „quadrata velocitatum ducta in magnitudinem corporum"; voir auſſi les formules de la p. 98, où il forme le produit de la „magnitudo" d'un corps par ſa viteſſe. Déscartes n'avait pas encore introduit ce produit: pour lui le mouvement eſt un „modus" du mobile [4]) dont la quantité pour chaque corps donné eſt proportionnelle à la quantité de ce corps et à ſa viteſſe, exactement comme pour Maurolycus et Wallis le „momentum" eſt quelque choſe d'inſubſtantiel proportionnel à un poids et à une diſtance.

On peut faire une remarque analogue ſur la grandeur „gravitatis deſcenſus". Huygens n'en donne pas de définition, mais il faut bien entendre par cette expreſſion le produit d'un poids par une diſtance verticale [5]). Descartes [6])

---

[4]) „... motum esse translationem... et dico... translationem... esse... ejus [sc. mobilis] modum, non rem aliquam subsistentem". („Principiorum Philosophiæ Pars Secunda, XXV", Œuvres de D. éd. Adam et Tannery, VIII, p. 54). Suivant la doctrine d'Aristote il y a une différence fondamentale entre les substances et les qualités (en latin = „modi"). Il est vrai que Descartes, suivant l'expression de Huygens (voir la p. 403 du T. X), avait „rejetté plus universellement que personne auparavant", l'„impertinent fatras" des auteurs scolastiques. Cependant ses écrits montrent qu'il connaissait fort bien (grâce à son éducation) la terminologie aristotélique (et scolastique), ce qui ne pouvait être entièrement sans influence sur sa manière de penser et de s'exprimer. Huygens évite cette terminologie beaucoup plus que Descartes. Il ne songe pas à discuter la question de savoir si „id quod efficitur ducendo singulorum magnitudines in velocitatum suarum quadrata" (p. 73 de ce Tome) est une substance ou bien un „modus" du corps en mouvement. À l'époque considérée dans le présent Avertissement, nous sommes encore éloignés de quelques dizaines d'années du commencement des discussions plus ou moins métaphysiques sur la vraie définition de la force. Huygens, quelque prix qu'il attache à son„ Théorème de la conservation de la force vive" (voir la p. 25 de ce Tome) — remarquons en passant que l'expression „vis viva" a été introduite par Leibniz en 1695 dans son „Specimen dynamicum etc." — n'a pas un instant l'idée de voir dans la force (ou l'„énergie" pour employer une expression plus moderne) la substance, pour ainsi dire, par excellence. Comparez la note 6 de la p. 359 qui suit.

[5]) Comparez la note 5 de la p. 358. Wallis, dans sa Mécanique de 1669 (Vol. I des „Opera Mathematica", p. 597) donne à la grandeur considérée à peu près le même nom que Huygens, mais en considérant ici aussi plutôt le rapport des grandeurs de ce genre que les grandeurs elles-mêmes: „Gravium Descensus, invicem comparati, in ea ratione pollent, quæ ex Ponderum ratione et ratione Altitudinum Descensuum componitur. Atque Ascensus similiter". Inutile de dire que Huygens ne parle pas d'une „énergie potentielle" (comparez la note précédente, la note 4 de la p. 349 et la note 6 de la p. 359).

[6]) Précédé en 1615 par Salomon de Caus dans son ouvrage „Les raisons des forces mouvantes

avait dit à propos des engins mécaniques: „L'inuention de tous ces engins n'eſt fondée que ſur vn ſeul principe, qui eſt que la mesme force qui peut leuer vn poids, par exemple, de cent liures a la hauteur de deux pieds, en peut auſſy leuer vn de 200 liures, a la hauteur d'vn pied, ou vn de 400 a la hauteur d'vn demi-pied, & ainſy des autres, ſi tant eſt qu'elle luy ſoit appliquée" [1]). Il attirait donc l'attention ſur cette „force" ou ce travail [2]) de la peſanteur; mais il ne formulait pas ſon principe, comme le fait P. Duhem à ſa place, en y introduiſant l'expreſſion plus moderne „produit du poids par ſon aſcenſion" [3]).

Dans l'„Horologium oſcillatorium" (Def. XIII à la p. 93 de l'édition originale de 1673) Huygens juge avec raiſon devoir expliquer ce qu'il faut entendre par le produit d'un poids par une diſtance: „Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita eſt intelligendum, ac ſi numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter ſe mutuam exprimentes, ita ducantur" [4]).

Ici auſſi, comme dans les écrits de Wallis, la „ratio mutua" eſt mentionnée, mais d'une façon un peu moins expreſſe, nous ſemble-t-il, que chez ce dernier auteur. Chez Wallis et Huygens on voit ainſi ſe former peu à peu le ſtyle moderne de la mécanique, nous voulons dire le ſtyle de la mécanique claſſique du dix-huitième ſiècle.

---

avec diverses machines tant utiles que plaisantes aus quelles sont adioints plusieurs desseings de grotes et fontaines", A Francfort, en la boutique de Jean Norton. P. Duhem (ouvrage cité à la note 1 de la p. 332; t. I p. 292) cite e. a. ce passage: „quand l'on voudrait tirer 400 livres avec ladite axe E, ils ne donneroyent non plus de travail à tirer que 50 livres seroyent à l'axe C, aussi le pois monte 8 fois autant en l'axe C comme il ferait estant en l'axe E".

[1]) Œuvres de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, T. I, 1897, p. 435.

[2]) Voir la note 6 de la p. 341.

[3]) P. Duhem (ouvrage cité, t. I, p. 327) rappelle que le traité cité de Descartes avait été écrit à la demande de Constantijn Huygens, père de Christiaan (lettre de C. Huygens à Descartes du 18 septembre 1637, voir les Œuvres de Descartes, édition nommée, T. I, p. 393). Descartes en lui répondant le 5 octobre 1637 „joignait [nous citons Duhem] à sa lettre un petit traité intitulé: *Explication des engins par l'ayde desquels on peut avec une petite force, lever un fardeau fort pesant.* En ce traité, la théorie de la poulie, du plan incliné, du coin, de la roue ou tour, de la vis, du levier est tirée tout entière d'un principe unique. Ce principe est le suivant: Le *travail* (Descartes dit la *force*) nécessaire pour élever des poids différents à des hauteurs différentes garde même valeur lorsque le produit du poids par son ascension ne change pas".

[4]) La Def. XIII de Huygens s'applique évidemment en premier lieu aux formules relatives aux corps oscillants. Mais déjà dans l'énoncé de la Prop. XI du Traité „De Motu Corporum ex Percussione" (p. 73), il avait observé qu'il faut que „magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur".

Au lieu de dire qu'il faut exprimer par des nombres (ou des lignes droites) les „quantitates ponderum rationemque inter se mutuam", nous dirions plutôt que dans une formule l'unité de „pondus" (aussi bien que l'unité de longueur ou l'unité de temps) doit être la même partout.

On trouvera dans les Pièces consacrées à la Dynamique quelques Parties où Huygens détermine des centres de gravité; ce sont la Troisième et la Cinquième Partie de la Pièce XI (p. 475 et p. 478).

Dynamique.

Trois sujets différents sont traités dans les Pièces qui constituent les „Travaux divers de Dynamique": 1) la chute de sphères de différents poids spécifiques à travers l'air atmosphérique (Pièce I, p. 384—385), 2) le tautochronisme de la chute cycloïdale (Pièce III, p. 392—413), 3) le calcul de la longueur du pendule isochrone pour différents corps oscillants, linéaires, plans et solides (Pièces II, p. 385 et IV—XIX, p. 393—555).

1) Chute de corps sphériques dans un milieu résistant.

Comme la note 5 de la p. 384 l'indique, Huygens s'était occupé de ce sujet déjà en 1646. C'est à la suite de la lecture d'un passage de Galilée sur cette question (voir les p. 73—75 du T. XI) et contrairement à l'opinion de cet auteur, qu'il observe que „pondera cadunt æquali velocitate si nullum medium resistat, medium autem resistit secundum superficiem; similium vero corporum solidum ad solidum in triplâ, superficies ad superficiem in duplâ proportione est laterum horum", et: „sequitur... duo similia corpora fieri posse sed inæqualia magnitudine, ex diversa materia, quæ tamen per medium resistens æquali velocitate descendant". La Pièce I de 1659 est le développement de cette idée.

Comme nous l'avons dit dans la note 1 de la p. 256, Huygens annonça le résultat de son calcul à R. Moray dans sa lettre du 16 sept. 1661, et le sujet fut discuté dans plusieurs autres lettres de 1662 [5]), mais cette discussion ne conduisit à rien de neuf.

---

[5]) Voir les p. 26, 35, 36, 46, 47, 60, 87 et 93 du T. IV.

Dans la lettre au même du 16 ſept. 1661 (T. III, p. 321) Huygens avait déjà dit que ſon réſultat s'accordait „a l'experience auſſi bien qu'au raiſonnement", mais qu'il ne croyait pas qu'on pourrait trouver „quelque regle certaine" pour déterminer généralement l'accélération, d'une boule de liége p. e., en tenant compte de la réſiſtance de l'air [1]). On a peut-être répété à la „Royal Society" l'expérience mentionnée de Huygens dont d'ailleurs nous ne connaiſſons pas les détails [2]).

2) Tautochroniſme de la cycloïde.

La Pièce III (p. 392) eſt compoſée d'un certain nombre de morceaux ſe rapportant à la découverte de la célèbre propoſition d'après laquelle la cycloïde, placée de telle manière dans un plan vertical que ſon ſommet eſt le point le plus bas, poſſède pour la chute d'un point matériel le long d'elle la propriété du tautochronisme [3]). Cette propoſition affirme que le temps d'une chute du point matériel ſuivant un arc quelconque de la cycloïde eſt conſtant, lorſque le point part du repos et que tous les arcs, quelle que ſoit leur longueur, ſe terminent au ſommet.

Huygens a attaché beaucoup de prix à cette découverte qui lui permit — puisqu'il réuſſit en même temps à établir que la développée de la cycloïde eſt également une cycloïde; voir les p. 205—207 du T. XIV [4]) — de donner aux lames courbées, entre lesquelles il faisait oſciller le pendule de ſon horloge, la forme néceſſaire pour rendre la période des oſcillations théoriquement (et pratiquement, eſpérait-il) indépendante de leur amplitude [5]). Dans ſa lettre du 5 décembre 1659 à Fr. v. Schooten (T. II, p. 522), écrite cinq jours après la date de l'invention des arcs

[1]) En 1661 on s'intéressait à Londres à des expériences de ce genre. „Six balls of a like size were produced, one of lignum vitæ [bois de gaïac], one of stone, two of tin, and two of lead, to try their different velocity of sinking in water, or falling down in the air" (Birch „The History of the Royal Society of London, etc." London, 1756, I, p. 49, 16 Oct. 1661).

[2]) „The lord viscount Brouncker was reminded of making the experiment of proportioning bodies of different matter and bulk, to fall in the same time; Mons. Huygens affirming, that a ball of cork may be so big, as to fall with equal swiftness through the air as a ball of iron" (Birch, I, p. 172, 7 Jan. 1663).

[3]) Huygens parle toujours de l'„isochronisme" de la cycloïde.

[4]) Les „recherches sur la théorie des développées" occupent les p. 387—406 du T. XIV. La partie la plus ancienne de ces recherches est celle qu'on trouve à la p. 404 et qui se rapporte à la cycloïde. La feuille détachée dont il est question dans la note 1 de cette page est la p. 75 verso (d'après la numération de 1928) des „Chartæ mechanicæ". On y trouve aussi deux esquisses d'un pendule suspendu entre des arcs cycloïdaux.

cycloïdaux, il appelle cette „inventio... omnium feliciſſima... in quas unquam inciderim", en ajoutant qu'il avait réuſſi à déterminer la vraie forme des arcs „ratione geometrica", et dans une lettre à Iſm. Boulliau du 22 janvier 1660 (T. III, p. 13) il va juſqu'à dire que cette „belle invention... eſt le fruit principal que l'on pouuait eſperer de la ſcience de motu accelerato, que Galilée a l'honneur d'avoir traictée le premier". Dans la Préface de l'„Horologium oſcillatorium" [6]) il appelle la découverte de la remarquable propriété de la cycloïde de poſſéder la „menſurandi temporis facultatem" le „fructus deſideratiſſimus, atque apex veluti ſummus" de la théorie de la chute des corps due à Galilée. Il voue à la démonſtration du tautochroniſme de la chute cycloïdale toute la Pars Secunda de ce livre [7]).

C'est peut-être grâce à l'importance pratique auſſi bien que théorique que la propriété du tautochroniſme poſſédait aux yeux de l'inventeur, que les notes où il a conſigné ſa découverte ſont ſi complètes que nous pouvons nous faire une idée de la genèſe de cette découverte dans ſon eſprit, depuis l'inſtant où il commence à entrevoir la juſteſſe du célèbre théorème juſqu'au moment où après avoir parcouru différentes phaſes ſa démonſtration va prendre la forme très exacte qu'elle poſſède dans l'„Horologium oſcillatorium". Nous pouvons donc voir dans ces notes la naiſſance et le développement de ſon idée avec une netteté rare dans les recherches hiſtoriques de ce genre.

La Première Partie (p. 392) montre que Huygens a fait ſa découverte en tachant de trouver une expreſſion pour le temps d'une très petite oſcillation du pendule ſimple. On conçoit aiſément qu'il ſe ſoit occupé de ce problème que la conſidération du pendule de ſon horloge ſuffiſait à lui ſuggérer. Il savait, tout auſſi bien que Merſenne [8]), que les oſcillations d'un pendule ſimple ne ſont pas ſans doute abſo-

---

[5]) Huygens avait commencé par faire usage de lames de forme empirique. Voir sa lettre à P. Petit du 1 nov. 1658, à la p. 271 du T. II.

[6]) À la p. 2 de l'édition originale.

[7]) Cette Pars est intitulée: „De Descensu Gravium & Motu eorum in Cycloïde". La Pars Tertia intitulée „De linearum curvarum evolutione & dimensione", est consacrée à la théorie des développées.

[8]) Voir p.e. dans les „Reflectiones physico-mathematicæ" faisant partie du „Novarum observationum physico-mathematicarum Tomus tertius" de 1647 (ouvrage nommé dans la note 9 de la p. 184) le Caput XIX „... Funependuli vibrationes non esse isochronas".

Dans son „Horologium" de 1658 (p. 12 de l'édition originale) Huygens écrit: „... vere asserunt non prorsus æquali tempore latiores ejusdem penduli ac angustiores vibrationes transire, sed his illas paulo plus insumere, quod facili experimento demonstrari potest. Nam si pendula duo, pondere ac longitudine æqualia, alterum procul à perpendiculo alterum parumper dimoveantur, simul dimissa, non diu in partes easdem una ferri cernentur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus". Dans une lettre du 28 nov. 1660 à Leopoldo

lument tautochrones comme Galilée l'avait cru [1]), mais qu'on peut les considérer comme approximativement tautochrones lorsqu'elles sont petites [2]). La question pratique se posait donc de calculer la période d'une petite oscillation. D'autre part ce calcul devait intéresser Huygens en sa qualité de géomètre. Lecteur assidu des „Discorsi" de Galilée, il n'avait pu manquer de remarquer que les théories de Galilée permettent le traitement complet de la chute verticale et de la chute suivant des plans inclinés mais qu'elles sont insuffisantes pour déterminer le mouvement d'un point pesant qui se meut suivant une circonférence de cercle située dans un plan vertical [3]). Il n'avait eu aucune peine pour combler une partie de cette lacune : avant le mois de décembre 1659 il était persuadé que le postulat de Galilée d'après lequel les vitesses finales acquises par des chutes d'une même hauteur le long de plans diversement inclinés sont égales, doit être étendu à des surfaces courbes [4]). La vitesse en chaque point de la circonférence parcourue par un point oscillant étant donc facile à déterminer, il était naturel de chercher une formule pour la période : Huygens ne pouvait prévoir que ses méthodes de calcul n'y suffiraient pas [5]).

Il réussit dans le premier morceau (Première Partie de cette Pièce, p. 392) qui porte la date du 1 décembre 1659, en traitant le problème pour de très petites oscillations, à démontrer leur tautochronisme approximatif. Sa démonstration

---

de Medicis (T. III, p. 197) Huygens dit qu'il avait constaté l'inégale durée des oscillations de différentes amplitudes „experientia ac ratione".

[1]) „Discorsi, Giornata I" (Ed. Naz. VIII, p. 130 et suiv.).

[2]) À la p. 13 de l'„Horologium" déjà cité dans la note 8 de la p. 345, Huygens dit avoir construit son horloge à pendule, afin de remédier autant que possible à l'inexactitude résultant de l'inégalité des périodes d'oscillation, de telle manière „ut quamlibet angustæ sint penduli vibrationes... Sic igitur oscillationibus universis exilioribus redditis, etiamsi harum aliæ alias latitudine quandoque excedant, singularum tamen tempora, experientia teste, nullo memorabili discrimine differunt".

[3]) Galilée („Discorsi", Giornata III, Ed. Naz. VIII, p. 205) applique en effet son postulat (voir la phrase suivante du texte) uniquement à des mouvements le long de plans inclinés quoiqu'il vérifie ce postulat par une expérience sur le mouvement circulaire, savoir l'expérience du pendule dont le fil vient se heurter contre un obstacle et dont le poids s'élève alors à la même hauteur qu'auparavant (l. c. p. 206). Les Propositions de la Troisième Journée traitent presque toutes le mouvement le long de plans inclinés; à un endroit seulement, dans le Scholium de la Prop. XXXVI (l. c. p. 263) il dérive, en passant à la limite, une certaine inégalité ayant rapport au mouvement circulaire d'un mobile se mouvant dans un plan vertical.

[4]) Ceci est regardé dans les différents morceaux comme une chose évidente. Comparez la Prop. VIII de la Pars Secunda de l'„Horologium oscillatorium" servant à rendre cette thèse plausible. Toute cette proposition se trouve presque textuellement dans le Manuscrit A, à la p. 169 écrite en oct. ou nov. 1659.

repoſe ſur l'identification de la circonférence de cercle décrite par le point matériel avec la parabole oſculatrice correſpondant au point le plus bas de cette circonférence. La découverte eſſentielle de cette Première Partie conſiſte dans ſon obſervation que le réſultat obtenu ſerait exact ſi la circonférence de cercle pouvait être remplacée par une autre courbe telle que les relations approchées qui exiſtent dans la figure entre la circonférence et la parabole du fait de leur identité ſuppoſée devinſſent des relations exactes, et que cette autre courbe eſt apparemment une cycloïde. Que Huygens ait remarqué que la cycloïde eſt la courbe qui ſatisfait aux exigences mentionnées, cela réſulte ſans doute de la connaiſſance intime qu'il avait de ſes propriétés: en 1658 et 1659 il s'en était beaucoup occupé à l'occaſion du concours inſtitué par Pascal [6]).

Le raiſonnement de Huygens dans ſa note du 1 déc. 1659, quoique convaincant pour lui-même, ne poſſédait nullement les qualités d'une démonſtration en règle. Pour arriver à une démonſtration formelle, Huygens énumère ſur une autre feuille détachée (Deuxième Partie de cette Pièce, p. 398—400) toutes les propoſitions employées, enſuite (Troiſième Partie, p. 401—403) il rédige de nouveau la démonſtration, en partant cette fois directement de la cycloïde. Le début du troiſième morceau fait défaut mais nous avons pu le reconſtruire.

Cependant cette démonſtration lui ſemblait encore inſuffiſante. La cauſe en eſt évidente: le raiſonnement ſe baſe ſur la diviſion de la ligne parcourue en un très grand nombre d'éléments à chacun deſquels correſpond un certain temps de chute qu'on peut déterminer en ſuppoſant le mouvement uniforme pour chaque élément. Tous ces temps étant repréſentés par des ordonnées, le temps total de la chute eſt cenſé être repréſenté géométriquement par la ſurface du diagramme des temps, considérée comme la ſomme de toutes ſes ordonnées.

Dans un quatrième morceau (Quatrième Partie de cette Pièce, p. 404) nous voyons Huygens faire un effort pour abandonner cette méthode fertile, mais théoriquement inſuffiſante. Il ne parle plus d'une ſurface conſidérée comme une ſomme d'ordonnées. Mais ſon effort n'aboutit pas, et le morceau eſt reſté à l'état fragmentaire.

Enfin la Cinquième Partie (p. 405) contient un nouveau raiſonnement, où non

---

[5]) Comme nous le remarquons aussi dans la note 4 de la p. 393, Huygens trouva plus tard une solution approchée de ce problème.

[6]) Consultez, à la p. 200 du T. XIV, l'Avertissement des „Travaux divers de Mathématiques de 1655 à 1659."

ſeulement la ſurface du diagramme des temps ne joue plus de rôle, mais d'où la parabole elle-même, dont la conſidération avait conduit à la découverte (voir la Première Partie) a diſparu. Cependant cette démonſtration s'appuie encore ſur une conception infinitéſimale du même genre que celle qui conſiſte à égaler une ſurface à la ſomme de ſes ordonnées (voir la Troiſième Partie): l'arc de cycloïde y eſt conſidéré comme la ſomme d'un nombre infini de ſegments de tangentes. Néanmoins Huygens ſemble d'abord avoir voulu laiſſer la démonſtration dans cet état: le morceau fait l'impreſſion d'être deſtiné à la publication [1]), et il y entreprend de juſtifier ces procédés infinitéſimaux [2]). Son raiſonnement ſe termine par les remarquables paroles: „Quod... requirerentur" (p. 412). Il y ſemble demander au lecteur compétent d'avoir confiance dans ſa technique de mathématicien et d'admettre qu'il pourrait donner une démonſtration plus rigoureuſe ſatisfaiſant aux exigences de la ſcience hellénique en matière de paſſage à la limite, mais de bien vouloir le diſpenſer du travail néceſſaire pour fournir la preuve de ſon art.

Ces conſidérations finales peuvent amener le lecteur de ce Tome à s'intéreſſer aux divers morceaux voués à la chute tautochrone pour une autre raiſon encore que le plaiſir d'aſſiſter à la genèse de cette célèbre découverte: elles nous rappellent les réflexions antérieures [3]) de Huygens ſur la méthode des indiviſibles de Cavalieri comparée avec les méthodes rigoureuſes des anciens, notamment avec celles d'Archimède, ainſi que ſes conſidérations de 1684 [?] ſur le même ſujet, déjà publiées dans le T. XIII (p. 752—753). Ces paſſages font voir que, bien que la prolixité des méthodes rigoureuſes lui ſemble pratiquement une gêne difficilement ſupportable à une époque où ce que nous appelons les ſciences exactes, ne poſſédant plus la nouveauté qu'elles avaient au temps hellénique, ſe développent rapidement, il ne s'eſt pourtant jamais départi de ſa conviction que tant en géométrie qu'en mécanique les démonſtrations doivent poſſéder, même pour les „periti geometriæ" mentionnés dans les conſidérations finales qui nous occupent, un haut degré d'évidence, c. à. d. d'exactitude potentielle, ſinon

[1]) Dans sa lettre du 28 nov. 1660 à Leopoldo de Medicis (T. III, p. 198) Huygens écrit: „Demonstrationem quod attinet in ea a principijs Galileanis non recessi et quam primum in patriam rediero typis committere ipsam est animus".

[2]) C'est sans doute à cette démonstration qu'il fait allusion dans la Préface de l'„Horologium oscillatorium" (p. 2 de l'édition originale) en disant: „Hanc [c. à. d. la „mensurandi temporis facultatem" de la cycloïde] cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologij editionem animadversa fuit), nunc eandem, demonstratione quàm potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus".

[3]) Voir la p. 158 du T. XI (datant de 1650) et la p. 337 du T. XIV (datant de 1659).

actuelle [4]), conformément à ce qu'il écrivait en 1650 à Fr. v. Schooten [5]), et à ce qu'il remarque en 1684 [?]: „Inventa vero claris et evidentibus demonſtrationibus comprobanda ſunt, quatenus id fieri poteſt. . . Omnino. . . curandum ut planum fiat ea quæ breviter dicuntur reduci poſſe ad cognitas abſolutasque ſeu veterum ſeu recentiorum demonſtrationes" [6]).

Lorsque Huygens publia „omnibus legendam" [7]) ſa théorie du tautochronisme de la chute cycloïdale [8]), il eſt à remarquer qu'il donna de ſon célèbre théorème une „demonſtratio. . . accuratiſſima", auſſi rigoureuſe qu'Archimède eût pu la déſirer.

En ſomme, la conſidération du développement de la théorie du tautochronisme depuis le moment du premier ſoupçon de l'exiſtence de cette propriété de la cycloïde jusqu'à la compoſition de la démonſtration magiſtrale qu'on trouve dans l'„Horologium oſcillatorium" nous amène à admirer également l'intuition géniale de Huygens et ſon grand talent de géomètre.

En 1662, lord Brouncker [9]) tacha lui auſſi de trouver „a demonſtration of the equality of vibrations in a cicloid-pendulum", mais cette prétendue démonſtration ne fut pas approuvée par Huygens [10]). Vers le même temps on fit à la „Royal Society" des expériences ſur ce ſujet qui d'après la lettre du 3 février 1662 de Moray à Huygens „ont reuſſi a merveilles" [11]). Comparez la note 3 de la p. 354.

3) Calcul de la longueur du pendule iſochrone pour différents corps oſcillants.

Le Père Merſenne fut le premier qui attira l'attention de Huygens ſur le mouvement oſcillant. En ſeptembre 1646 il écrivit à Conſtantijn Huygens père:

---

4) On trouve chez Huygens le mot „evidentia" dans le sens d'exactitude tant dans la lettre à v. Schooten (note 5) que dans le morceau de 1684 [?], T. XIII, p. 752. Mais on n'y trouve pas les adjectifs aristotéliques dont nous nous servons ici; comparez à ce sujet la note 4 de la p. 341.

5) Lettre de sept. 1650; voir la p. 561 du T. I.

6) Pendant l'impression de ce Tome nous ajoutons aux précédentes encore une Sixième Partie (p. 412—413), ou Huygens indique brièvement la marche de la démonstration publiée dans la Cinquième Partie.

7) Voir la note 2.

8) Prop. XII—XXVI de la Pars Secunda de l'„Horologium oscillatorium", p. 37—58 de l'édition originale.

9) Voir sur lui la note 2 de la p. 476 du T. I.

10) Voir les p. 28, 50 et 88 du T. IV, et les p. 70—74 du premier tome de l'ouvrage de Birch mentionné dans la note 1 de la p. 344.

11) T. IV, p. 27. Voir les remarques de Huygens à ce sujet dans sa lettre à Moray du 30 déc. 1661 (T. IV, p. 438).

„... ſi voſtre fils le deſire, ie luy enuoyerai le moyen de trouuer le centre de vertu, ou de percuſſion de toutes ſortes d'epées, et d'autres armes" (T. I, p. 21) et le 12 oct. ſuivant: „... ie veux enuoyer la regle generale pour trouuer le centre de percuſſion de tous les ſecteurs de cercle [1]) à Mr. voſtre fils". Il dit donc que pour un ſecteur de cercle le centre nommé ſe trouve à une diſtance du centre égale à $\frac{3}{4}\frac{\text{rayon. arc}}{\text{corde}}$, mais il ajoute que pour un triangle la choſe „eſt bien plus difficile, il y pourra penſer et conſulter ſon Maiſtre la deſſus" (T. I, p. 23). Le 28 oct. Chr. Huygens répond qu'il attend „avecq grand deſir quelques particularitez des centres de percuſſion" (T. I, p. 28). Le P. Merſenne lui écrit alors, le 8 déc., une lettre conſacrée presque excluſivement à ce ſujet (T. I, p. 45); il parle maintenant du „centre de percuſſion, ou d'agitation des corps ſuſpendus qui ont leurs vibrations libres comme le plomb pendu à vn filet ſuſpendu lequel i' appelle *funependule*".

C'était le traité de Baldi, intitulé „in Mechanica Ariſtotelis Problemata Exercitationes" [2]), qui avait amené Merſenne à s'occuper des „centres de percuſſion". En discutant (Quæſtio XIX, p. 128) la queſtion poſée par le philoſophe grec pourquoi un coup de hache fend ſi aiſément un morceau de bois, tandis que la hache immobile, même chargée d'un grand poids, n'arrive pas à produire cet effet, Baldi ajoute (p. 131): „Ad hæc ſuccurrit nobis pulcherrima quæſtio. Dubitari enim poteſt, vtrum ictus ex enſe efficacior ſit a parte quæ eſt circa aciem, aut circa

---

[1]) C'est là la leçon véritable. Dans la l. 15 de la p. 23 du T. I il faut également lire „secteur" au lieu de „sisteme".

Comparez sur le „centre de percussion" du secteur les lignes 9—13 de la p. 352.

[2]) „Bernardini Baldi Vrbinatis Gvastallae Abbatis in Mechanica Aristotelis Problemata Exercitationes, Mogvntiæ, Typis & Sumptibus Viduæ Ioannis Albini, MDCXXI". Ce livre se trouvait dans la bibliothèque de Constantijn Huygens. En effet, l'exemplaire de la bibliothèque de l'Université de Leyde porte sur la première page l'inscription: „Constanter. donum I. Golij viri amiciss[imi]". Nous possédons encore une lettre du 7 avril 1632 dans laquelle Const. Huygens qui s'intéressait à toutes les sciences, demande à Golius de lui renvoyer ce livre („De briefwisseling van Const. Huygens, uitg. door Dr. J. A. Worp, 's Gravenhage, Nijhoff", I, 1911, p. 348); il résulte de cette lettre et de la réponse de Golius (p. 349) que celui-ci lui en avait fait cadeau depuis longtemps.

[3]) „Ioannis de Gvevara cler. reg. min. in Aristotelis Mechanicas Commentarij, Romæ, Apud Iacobum Mascardum, MDCXXVII". Gueuara cite Baldi, mais ne se range pas à son avis. Selon lui c'est principalement dans l'extrémité, qui a la plus grande vitesse, que réside la force de l'épée: „... colligitur, quod & experientia comprobatur, prædicta omnia instrumenta maximam, ac præcipuam virtutem sortiri in extremo, quod magis distat à centro sui motus" (p. 182).

[4]) Ouvrage déjà nommé dans la note 9 de la p. 184 et dans la note 8 de la p. 345.

medium enſem, vel prope manubrium capulumve". Il émet l'opinion que l'épée, qui eſt cenſée tourner autour du poignet, frappe un objet de petites dimenſions le plus fortement lorsque ſon centre de gravité, qu'il place au milieu de la lame, vient s'appliquer ſur cet objet. Merſenne dans ſon „Tractatvs mechanicvs theoricvs et practicvs" qui fait partie du volume nommé dans la note 1 de la p. 332, reproduit, à la p. 84, la figure de Baldi et discute la queſtion, en citant auſſi Gueuara, autre commentateur d'Ariſtote [3]). Il dit que l'endroit où ſe produit la „percuſſio maxima" doit dépendre de la forme de l'épée (ou de la forme du corps employé en guiſe de marteau, lorsqu'il s'agit p. e. d'enfoncer un clou): „Cùm autem variæ ſint enſium figuræ, non poteſt eſſe vna ſolutio"; c'eſt ſa ſeule concluſion.

Mais bientôt l'idée lui vint que le point cherché pourrait bien être le „centre d'agitation" c. à. d. le point qui — lorsqu'au lieu de ſe ſervir du corps comme d'un marteau, on le ſuſpend au point du corps qui reſte par hypothèſe immobile (point qui correſpond au poignet dans le cas de l'épée), de ſorte qu'il peut oſciller parallèlement à un plan vertical donné — eſt ſitué ſur la droite qui joint ce point de ſuſpenſion au centre de gravité du corps, à une diſtance telle du point de ſuſpenſion que l'oſcillation parallèle au même plan du pendule ſimple ou „funependule" de cette longueur eſt iſochrone avec l'oſcillation conſidérée du corps lui-même. C'eſt ce qu'il écrit p. e. au Cap. X (p. 114) des „Reflectiones phyſico-mathematicæ" dans le recueil „Novarum obſervationum phyſico-mathematicarum Tomus III", publié à Paris en 1647 [4]); ce chapitre eſt intitulé „De nouo uſu funependuli ad centra percuſſionum in quibuſuis corporibus invenienda". Il eſt vrai qu'on n'y trouve guère d'arguments en faveur de l'identité des deux centres. En revanche Merſenne a fait de nombreuſes expériences tant ſur la longueur du pendule iſochrone que ſur le point „in quo digitus validiùs percutiatur". Il paraît donc que ſa conviction repoſe uniquement ſur l'expérience. Le fait que cette conviction n'a pas de fondement théorique eſt prouvé en outre par ce bout de phraſe (p. 116): „quanquam fortè puncta iſochrona tantiſper à centris percuſſionis, paulo altioribus vel inferioribus, differant". Dans le Cap. XI „in quo variæ referuntur obſeruationes ad centra percuſſionum attinentes", Merſenne diſtingue l'oſcillation, d'un triangle p. e., dans ſon plan („motum lævum & dextrum") de l'oſcillation perpendiculaire à ce plan („motum poſticum & anticum") [5]). Les premières expériences de Merſenne doivent dater

[5]) Voir sur les termes employés par Huygens pour distinguer ces deux mouvements, la p. 375 qui suit.

du commencement de 1646 au plus tard puisqu'il paraît déjà convaincu en ce temps de l'identité des deux centres. En effet, il résulte de la réponse de Descartes du 2 mars 1646 à une lettre de Mersenne que nous ne possédons plus, que celui-ci avait demandé quelle est à son avis la règle pour trouver le centre d'agitation; d'autre part nous avons vu que dans sa lettre à Const. Huygens de sept. 1646 Mersenne ne parle que du centre de percussion; c'est ce centre qui l'intéresse et c'est apparemment pour apprendre à connaître la place de ce centre-là dans un corps de forme quelconque qu'il demande à Descartes de déterminer celle du centre d'agitation. Quant à la règle mentionnée pour trouver le centre „de percussion ou d'agitation" dans le cas d'un secteur de cercle (Mersenne veut dire: d'un secteur de cercle oscillant dans son plan) — voir la lettre à Const. Huygens du 12 oct. 1646 citée à la p. 350 — elle est bonne, comme on peut s'en convaincre en consultant, à la p. 490 qui suit, la Pièce XII. Mersenne tenait cette formule, non pas de Descartes qui lui avait fait part en mars 1646 d'une „regle [générale]... pour trouuer [le] centre d'agitation" [1]), mais de Roberval [2]) qui prenait aussi part à la discussion. La règle générale de Descartes ne s'accorde pas avec la formule de Roberval pour le cas spécial du secteur de cercle; toutefois Mersenne, ce „vir... omnigenæ, sed indigestæ eruditionis" [3]), écrit à Chr. Huygens dans sa lettre du 8 déc. 1646, qu'il ne voit pas, puisque les corps ont diverses

---

[1]) „Œuvres de Descartes", éd. Adam et Tannery, T. IV, p. 366. Voir pour la discussion de la théorie proposée par Descartes les observations de Tannery dans ce T. IV à la p. 370.

[2]) „Obseruation de Mr. de Roberual sur le suiet de la precedente lettre de M. Descartes à M. Cavendische où il marque ses fautes" („Œuvres de Descartes", éd. nommée, T. IV, p. 420). On y lit, p. 422—423: „... si ... on entend que, comme la corde ... est à son arc ... ainsy soit IP (trois quarts de IN [c. à. d. du rayon]) à IQ, portion de IN, nous auons ... demonstré que le poinct Q sera le centre de percussion ou d'agitation ... du secteur de cercle". „... nostre demonstration est trop longue pour ce lieu".

La lettre mentionnée de Descartes à Cavendish est celle du 30 mars 1646 („Œuvres", éd. nommée, T. IV, p. 379).

Il faut remarquer cependant que Roberval ne comprenait guère le sens de ce qu'il avait trouvé, puisqu'il ajoute: „... quoy que le centre de percussion ou d'agitation fust assigné comme dessus, il ne paroist pas qu'il fust la regle ou distance requise pour les Vibrations ou balancement des corps, auquel balancement le centre de grauité contribuë quelque chose, aussy bien que le centre d'agitation ... Toutesfois, iusques icy les experiences se sont accordées d'assez pres auec mes conclusions du centre d'agitation; d'où i'ay conclu que le centre d'agitation y contribuë plus que le centre de grauité".

[3]) C'est Const. Huygens père qui s'exprime ainsi au sujet de Mersenne dans une lettre du 26 août 1639 à J. A. Bannier (Ed. Worp, T. II, p. 487; voir la note 2 de la p. 350).

figures, „qu'une ſeule regle y puiſſe ſatisfaire, ſi ce n'est celle que Mr. des Cartes, le plus excellent eſprit du monde à mon aduis, a donné". Il exhorte cependant Chr. Huygens à trouver lui-même une règle ſatisfaiſante: „... ſi quelque regle ſe peut trouuer auſſi vniverſelle pour... deſterminer [ce centre] geometriquement comme eſt mon filet pour le trouuer par experiment vous m'en ferez part". Voir auſſi les lettres de Merſenne du 8 et du 12 janvier 1647 (T. I, p. 50 et p. 59). Le 23 déc. 1646 (T. I, p. 557) Chr. Huygens écrit à Merſenne n'avoir trouvé „rien encor de ce qui concerne les centres de percuſſion" [4]).

Il réſulte d'une lettre de Huygens à M. Thevenot du 29 janvier 1665 (T. V, p. 209) qu'il n'a pas pris la peine de s'enquérir des conſidérations de Descartes et de Roberval à ce ſujet, avant d'avoir trouvé lui-même la règle générale demandée par Merſenne. Comparez la fin de la lettre du 10 oct. 1664 à Moray (T. V, p. 121). Ces conſidérations n'ont donc eu aucune influence directe ſur ſa découverte [5]).

Dans l'„Horologium oſcillatorium" de 1673 Huygens donne au début de la „Pars Quarta" un aperçu de l'influence exercée ſur lui et ſur d'autres ſavants par les lettres du Père Merſenne et raconte que ſon déſir de régler ſes horloges à l'aide d'un poids auxiliaire mobile (voir, aux p 425—431 qui ſuivent, la Pièce IV) et celui de trouver le moyen de définir une longueur invariable à l'aide du pendule („certæ... menſuræ definitionem abſolutiſſimam") furent pour lui, à côté du plaiſir d'inventer une théorie nouvelle, les motifs qui l'amenèrent à reprendre la queſtion. Obſervons en paſſant que, tant dans les Pièces qui ſuivent que dans l'„Horologium oſcillatorium", Huygens ne parle que d'un centre d'oſcillation ou d'agitation, nulle part, comme dans ſa lettre du 23 déc. 1646 que nous venons de citer, d'un centre de percuſſion [6]).

Il eſt vrai que le poids mobile ſervant à régler les horloges (voir, aux p. 425—431,

---

[4]) C'est probablement en ce temps qu'il ajouta dans son „boeckje" les mots „de motu pendulorum" à la liste des sujets qu'il se proposait de traiter (voir la note 19 de la p. 75 du T. XI). Plusieurs années après Huygens put annoter sur la lettre de Mersenne du 8 déc. 1646: „J'ay trouué cette regle en 1664" (voir la p. 47 du T. I).

[5]) Voir le sommaire de sa lettre à Thevenot du 14 mai 1665 (T. V, p. 355).

[6]) Nous avons déja vu que Roberval, comme Mersenne, admet l'identité des deux centres (voir la note 2); à bon droit, comme on l'a démontré plus tard.

En 1690 Huygens parle lui aussi de l'identité des deux centres. Voir à ce sujet les premières lignes de la p. 462 du T. IX, ainsi que la note 2 de la p. 461 et la note 3 de la p. 462 du même Tome.

la Pièce IV) ne fut inventé par Huygens qu'en 1661 [1]), tandis qu'il s'occupa déjà en 1659 du centre d'oscillation des pendules linéaires (voir, à la p. 385 qui ſuit, la Pièce II). Mais puisque dans cette Pièce II il conſidère un pendule linéaire qui porte deux poids, il eſt fort poſſible qu'avant d'exécuter ce calcul il avait déjà enviſagé un inſtant la poſſibilité de régler ſes horloges de cette manière.

Quant à la meſure univerſelle (voir le troiſième alinéa de la page précédente), il en eſt queſtion dans la Correspondance en décembre 1661 pour la première fois [2]). Moray écrit à Huygens le 23 décembre que „ſur la propoſition qui a eſté faite dans noſtre Aſſemblee il y a 15. iours, touchant une Meſure Vniverſelle, c'eſt à dire, telle que l'on la puiſſe faire exactement egalle en tous lieux ſans ſe la communiquer au preallable... l'on eſt apres pour voir ſi cela ſe peut faire par le pendule, adiuſté ſelon voſtre inuention, par des ſegments de Cycloeides... pour ſcauoir donc ſi cela ſe fait, nous auons fait faire des pendules a voſtre mode..." (T. III, p. 427—428) [3]). Comme Moray explique longuement ce qu'il faut entendre par une meſure univerſelle, il paraît bien que l'idée ne lui venait pas de Huygens [4]). Cela reſſort auſſi plus ou moins de la

---

[1]) Voir, à la p. 438 du T. III sa lettre à Moray du 30 déc. 1661. Il écrit: „J'ay trouuè depuis quelque temps le moien d'ajuster fort precisement à son heure mon horologe par un petit plomb mobile, etc." Dans les Manuscrits ce poids mobile („schuyflootie") est mentionné pour la première fois en 1661 (p. 23 du Mauuscrit B).

[2]) Beaucoup d'astronomes s'étaient déjà occupé de la question de savoir quelle doit être la longueur d'un pendule à secondes. Voir le Cap. XX du Lib. II de la Pars Prior du Tome I de l'„Almagestum Novum" de 1651 de J. B. Riccioli (ouvrage nommé dans la note 7 de la p. 402 du T. I): „De Perpendiculi Oscillationibus ad motus alios et tempora mensuranda idoneis, etc.", en particulier à la p. 87 la Prop. XII, Probl. IV: „Inuenire Perpendiculum, cuius una simplex vibratio æquiualeat uni Secundo Temporis Primi Mobilis".

[3]) On n'en trouve rien chez Birch (ouvrage cité dans la note 1 de la p. 344), du moins dans le résumé des séances de la „Royal Society" de décembre. Mais dans celui de la séance du 30 octobre 1661 Birch (I, p. 53) écrit: „Mr. Rooke was desired to procure two pendulums, one with cheeks, and the other without", et à la p. 54 (séance du 20 novembre) on trouve les mots: „Dr. Wilkins read his paper concerning a natural standard" qui peuvent se rapporter à ce sujet, d'autant plus qu'on rencontre le même nom a la p. 70 (séance du 22 janvier 1662, style nouveau), où Birch écrit: „The pendulum experiment was discoursed of by the lord viscount Brouncker, who brought in the account and schemes of it; and a committee was appointed for making trials of it, consisting of his lordship himself, Mr. Boyle, Sir William Petty, Dr. Wilkins, and Dr. Wren".

[4]) Comparez la note 5 de la p. 260 du T. VI. Il est vrai que la „History of the Royal Society by Th. Sprat" mentionnée dans cette note ne parut qu'en 1667 (London, Printed by T. R. for J. Martyn at the Bell without Temple-bar, etc.). On y trouve à la p. 314 l'assertion que l'idée „that there may be produc'd a Natural Standard for Measure from the Pendulum for vulgar use" est due au dr. Christopher Wren (comparez la note 18 de la p. 427 du T. III). Mais il est

réponſe de ce dernier (T. III, p. 438) qui écrit: „J'ay entre les mains celuy [le traité] de l'horologe, du quel une grande partie eſt dediée aux mouvements et particulierement j'y ay parlè de cet uſage du pendule pour la meſure univerſelle, dont vous dites qu'on a traitè dans votre aſſemblee..." Nous poſſédons de la main de Huygens [5]) le ſommaire du contenu du Traité de l'horloge, tel qu'il l'avait conçu en 1660 [6]); on y trouve les paroles: „menſura univerſalis ope penduli", ce qui prouve qu'il ſongeait à employer le pendule pour ce but, et qu'il ſe ſervait de l'expreſſion „meſure univerſelle", déjà avant d'avoir reçu la lettre citée de Moray; ce qui d'ailleurs reſſort auſſi de ſa réponſe citée. On peut en effet prendre un pendule de forme déterminée (p. e. une ſphère de grandeur et de poids déterminés ſuſpendue à une tige homogène de longueur et de poids déterminés, ou a un fil de longueur déterminée et de poids négligeable) qui marque les demi-ſecondes ou les ſecondes, et dire que la longueur de la tige ou du fil (ou cette longueur augmentée du rayon, ou du diamètre, de la ſphère) conſtitue l'unité de longueur; en admettant bien entendu, comme Huygens le faiſait alors, qu'un pendule déterminé a pour une amplitude donnée une même période partout [7]). En 1661 (T. III, p. 438 et 440) Huygens meſure la „longueur... pour marquer une demie-ſeconde"... „depuis le point de ſuſpenſion jusqu'au centre de la boule", le poids du fil étant apparemment négligeable. Mais le fait qu'il prend des boules de différents rayons et que ſuivant lui, la diſtance nommée reſtant invariable, la période reſte également la même, fait bien voir qu'il ne ſavait pas encore que le centre d'oſcillation de la ſphère ſe trouve en deſſous du centre de figure, et que la diſtance des deux centres dépend du rayon [8]). Il n'eſt pas étonnant que dans le ſommaire

impossible d'avoir une confiance absolue dans l'exactitude de cette affirmation, puisque nous lisons à la p. 315: „He [c. à. d. Wren] has made constant Observations on Saturn; and a Theory of that Planet, truly answering all Observations, before the printed Discourse of Hugonius [sic] on that subject appear'd"; ce qui prouve que Sprat n'était pas toujours bien renseigné (voir les p. 368, 384, 416 et 417 du T. III).

C'est à la p. 247 que Sprat mentionne le „universal Standard, or measure of Magnitudes, by the help of a Pendulum, never before attempted" (comparez la note nommée du T. VI).

5) Manuscrit A, p. 226.

6) La p. 202 du Manuscrit porte la date du 25 décembre 1659 et la p. 233 celle du 7 avril 1660. Nous publierons ce sommaire dans le Tome suivant.

7) Voir le quatrième alinéa de la p. 376, en partculier la note 2.

8) En 1662 Huygens fit de nouveau des expériences de ce genre; le 10 février il écrit à Moray (T. IV, p. 52): „... Je scay par experience que pour avoir un pendule dont chaque vibration soit de demie seconde, il suffit de faire en sorte que le diametre de la boule soit moindre seulement que la 6e partie de la hauteur du pendule, et qu'il est tout un si la boule est de plomb, d'yvoire ou de cristal, quand on ne prend que les petites vibrations, etc." Dans sa réponse du

mentionné les mots „menſura univerſalis ope penduli" ſoient précédés par les mots „regula ad inveniendam penduli longitudinem": il ſe rendait très bien compte du fait que pour donner une définition exacte et vraiment pratique de la meſure univerſelle il faut connaître le centre d'oſcillation; de cette façon le pendule qui bat les ſecondes ou les demi-ſecondes peut avoir une forme quelconque pourvu que la diſtance du point de ſuſpenſion au centre d'oſcillation ait une longueur donnée. Quoique dans le traité tel qu'il l'avait „entre les mains" en 1661 il pût parler déjà „de cet uſage du pendule pour la meſure univerſelle" avant de connaître la règle pour déterminer le centre d'oſcillation, il peut donc parfaitement dire dans l'„Horologium oſcillatorium" que le déſir de trouver le moyen de définir une longueur invariable à l'aide du pendule avait été pour lui un motif de chercher le centre d'oſcillation. Dans la Prop. XXV de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium" („De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione") il mentionne le fait que la place du centre d'oſcillation de la ſphère (comparez la Pièce XI, à la p. 470) ſe trouve à une diſtance du centre de figure qui dépend du rayon et ajoute: „Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem, etc." [1]).

En 1663 on prenait, paraît-il, à la „Royal Society" des expériences ſur l'oſcillation de corps, non ſeulement de diverſes matières, mais auſſi de diverſes formes [2]), ce qui peut avoir eu une certaine influence ſur Huygens et l'avoir déterminé à étendre ſes recherches théoriques de 1659 et de 1661, qui ne portaient encore que ſur des pendules linéaires, à des ſurfaces planes et à des corps de différentes formes oſcillant autour d'un axe déterminé. Il eſt vrai que les expériences exécutées ou projetées par la „Royal Society" n'avaient pas pour but de trouver le centre

14 mars 1662 (T. IV, p. 86) Moray écrit à-propos de ces expériences: „... si vous voulez prendre la peine d'examiner s'il y en a [c. à. d. s'il y a une différence de longueur] dans les pendules d'une seconde entière comme nous l'auons fait, vous trouuerez que non seulement les diferentes matieres [effet de la résistance de l'air], mais aussi les diferentes grandeurs des Balles de mesme matiere requierent des longueurs dont les diferences sont considerables".

[1]) Comparez sa lettre à Estienne du 21 septembre 1668 (T. VI, p. 258; voir sur Estienne la note 1 de la p. 490 du T. VI).

[2]) Birch, I, p. 205 (séance du 4 mars 1663) parle de corps „round, elliptical, square, etc." Nous y lisons que Hooke proposait de faire ces expériences dans l'air atmosphérique, ainsi que dans de l'air comprimé ou raréfié et que „Mr. Hooke was appointed curator of these experiments". Mais Birch ne nous apprend pas si les expériences ont réellement été exécutées.

[3]) Ce n'est que le 9 novembre 1664, après que Huygens eut trouvé la règle générale qui détermine la place du centre d'oscillation qu'on prit à la „Royal Society" (d'après Birch, I, p. 487) la

d'oscillation [3]): elles devaient servir seulement à la détermination de la résistance de l'air (comparez à ce propos les notes 1 et 2 de la p. 344), mais ce sujet est intimement lié à celui de la mesure universelle „ope penduli" comme on peut le voir par les passages cités dans la note 8 de la p. 355.

Considérons maintenant les Pièces II (p. 385—391) et IV—XIX (p. 414—555) qui suivent. Il y est partout question d'oscillations idéales, sans aucune friction ou résistance d'air. De plus les barres ou fils auxquels les lignes, surfaces ou corps oscillants sont suspendus sont considérés comme impondérables (excepté au début de la Pièce II), et ces objets eux-mêmes ont toujours une forme symétrique [4]).

Le principe fondamental de la Dynamique de Huygens est une extension du principe adopté par lui dans sa Statique [5]); nous avons déjà rencontré ce principe à la p. 56 de ce Tome: „en mécanique c'est un axiome très certain que par un mouvement des corps qui résulte de leur gravité le centre commun de leur gravité ne peut pas s'élever"; il s'agit du centre de gravité potentiel, c. à d. du centre de gravité des corps ou points matériels supposé qu'ils se soient élevés tous à la plus grande hauteur possible, ayant épuisé les vitesses qu'ils possédaient à un instant donné. Mais „pour trouver une base" (voir les p. 414—415) du calcul des centres d'oscillation, Huygens doit admettre en outre que dans le cas des oscillations idéales considérées, ce centre de gravité commun s'élève précisément à la hauteur d'où il est descendu, les vitesses finales, aussi bien que les vitesses initiales de tous les éléments qui constituent le pendule, étant évidemment nulles [6]); ce qu'on peut exprimer aussi (comparez les p. 21—23) en disant qu'il admet la réversibilité du phénomène, quoiqu'il ne se serve pas lui-même de cette expression. Dans certains cas [7]) il se figure que les globules — ou autres éléments [8]) infiniment petits et par-

résolution „of making simple pendulums isochrone to triangles and other figures and bodies differently suspended". Comparez les p. 374—375 qui suivent.

[4]) Excepté dans le cas du théorème général de la p. 461.

[5]) Voir les p. 21—24 de ce Tome et les deux premières pages (p. 331 et 332) du présent Avertissement, ainsi que la note 1 de la p. 56, laquelle est d'ailleurs mentionnée dans la note 1 de la page 332 nommée. Huygens a probablement adopté ce principe fondamental de la Dynamique en 1652 (voir la p. 7 et la note 8 de la p. 9 de ce Tome).

[6]) Comparez les „Hypotheses" I et II de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium".

[7]) Il est évident que ce sont des cas où le pendule est soit linéaire soit formé par une surface plane oscillant perpendiculairement à son plan.

[8]) Aux p. 385—387, 434—439, 441—442, 444—445, 447, 449—452 les éléments sont des globules; aux p. 505—507 et 517—521 ce sont de petits carrés, à la p. 447 le caractère des éléments n'est pas nettement déterminé, aux p. 457—458 ce sont des tranches horizontales

faitement durs — qui conſtituent le corps oſcillant viennent frapper, au moment où ils atteignent le point le plus bas de leur trajectoire, d'autres éléments égaux et également durs pouvant oſciller [1]) librement et ſéparément (p. 388—391, 415—425, 457—458). Dans d'autres cas [2]) ce ſont les éléments [3]) du corps oſcillant lui-même (et alors l'hypothèſe d'une dureté parfaite eſt ſuperflue) qui ſe détachent les uns des autres à l'inſtant nommé (ou à un inſtant quelconque, comme Huygens le ſuppoſe aux p. 436—437) pour exécuter chacun l'oſcillation [1]) libre mentionnée (p. 385—387, 434—439, 441—442, 444—445, 447—452, 487—488, 505—507). Dans tous les cas, comme nous l'avons dit, les viteſſes finales ſont nulles. Il faut évidemment admettre que les éléments qui exécutent des oſcillations [1]) libres et qui atteignent à des moments différents leurs plus grandes hauteurs, ſoient arrêtés et maintenus chacun dans ſa poſition finale. C'eſt à cette condition ſeulement que le centre commun de gravité remonte à la hauteur initiale. Dans le premier cas, celui où les éléments du corps viennent frapper d'autres éléments égaux, il faut qu'au moment du choc le „motus" ſoit conſervé (voir les huit dernières lignes de la p. 415). Il eſt évident que le „motus" eſt également conſervé dans le deuxième cas, où les éléments ſe détachent les uns des autres avec la viteſſe que chacun d'eux poſſède en ce moment. Huygens ſe ſert de l'expreſſion „motum ſurſum convertere" ou „motum ſurſum convertere quousque poſſunt" [4]) pour indiquer que chaque élément s'élève jusqu'au point où ſa viteſſe eſt entièrement épuiſée [5]). Nous parlerions d'une converſion de l'énergie [6]) cinétique ou force vive [6]) du mouvement en une quantité d'énergie potentielle [6]) égale à l'énergie potentielle primitive par rapport au même plan horizontal, mais il ne

découpées dans une surface verticale qui viennent frapper des éléments de même forme (voir la note 2 de la p. 458), enfin aux p. 489—490 ce sont des arcs de cercle, ou anneaux, concentriques. Au lieu de „globules" on peut aussi dire „particulæ" (p. 484) ou points pesants.

[1]) Nous parlons ici d'*oscillations* libres, pour fixer les idées. Il est évident qu'un élément qui possède une vitesse déterminée v peut s'élever à la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ soit en oscillant soit en s'élevant d'une autre manière.

[2]) Ce procédé est évidemment applicable dans tous les cas.

[3]) Voir la note 8 de la p. 357.

[4]) On trouve aussi (p. 507, lignes 4 et 5) l'expression: „celeritatem sursum convertere".

[5]) Par analogie avec l'expression „gravitatis descensus" dont Huygens se servira en 1662 (voir la note 5 de la p. 341) on pourrait dire que le „motus" est converti en „gravitatis ascensus", mais Huygens n'employe pas cette dernière expression: il dit (p. 417, quatrième ligne d'en bas): „altitudo ducta in gravitatem". D'ailleurs en disant que le „motus" est converti en „gravitatis ascensus" nous précisons trop la pensée de Huygens, pour qui apparemment (voir le texte) l'expression „motus" ne désigne pas ici une quantité nettement déterminée et cer-

faut pas se figurer que l'expression „motus" de Huygens est ici équivalente à notre expression „énergie cinétique". Chez lui le sens de „motus" se rapproche souvent de celui de „celeritas"; voir à la p. 33 la „Hypothesis III" et à la p. 41 la „Hypothesis V"; „motus quantitas" désigne généralement la quantité de mouvement mv ou Σmv; voir p. e. la Prop. VI de la p. 49 et les p. 91 et 98. Bien souvent aussi le mot „motus" a un sens plus général, non quantitatif. Dans le dernier alinéa de la p. 415 et dans l'expression „motum sursum convertere" le mot „motus" a

---

tainement pas la quantité mv^2 ou $\frac{1}{2}mv^2$: comparez la note précédente. C'est plutôt l'expression „vis motus" de Huygens (voir le troisième alinéa de la note suivante) dont le sens se rapproche de celui de notre expression „énergie cinétique".

[6]) Voir les notes 4 et 5 de la p. 341. Remarquons que le mot „énergie" aussi bien que le mot „potentiel" est un terme aristotélique. Pour Aristote une chose peut exister ἐνεργείᾳ, actuellement (en latin scolastique: actu) ou δυνάμει, potentiellement (en latin scolastique: potentia). Chez Aristote le mot ἐνέργεια ne désigne donc pas une substance (οὐσία), mais un état d'activité ou d'actualité. Du temps de Huygens le mot „énergie" figurait déjà dans l'optique ainsi que dans la mécanique; voir la note 8 de la p. 99 (ce fut Jean Bernoulli qui donna, en 1717, un sens précis non aristotélique à ce mot, savoir celui du travail d'une force; voir la p. 174 du Tome second de l'ouvrage de Varignon mentionné dans la note 2 de la p. 338); le terme „potentia" était souvent employé pour désigner la force en général (voir p. e. la troisième ligne d'en-bas de la p. 99 qui précède et l'ouvrage posthume de Leibniz: „Dynamica de Potentia et Legibus Naturæ corporeæ", publié par C. I. Gerhardt, dans le T. 6 de „Leibnizens mathematische Schriften", Halle, Schmidt, 1860, où l'on trouve à la p. 440 la Propositio 8: „Eadem semper potentia est in Universo").

Leibniz, en introduisant l'expression „vis viva", ne la définit pas par le produit mv^2: il parle de la „vis ordinaria [par opposition à la „vis" mentionnée dans le deuxième alinéa de la note 8 de la p. 199] cum motu actuali conjuncta, quam voco vivam" („Specimen dynamicum", p. 238 du T. 6 de l'édition de Gerhardt). Pour désigner mv^2 il employe parfois le mot „potentia" qui a d'ailleurs un sens plus général („potentiam oriri ex quadratis velocitatum in molis elementa ductis"; „Dynamica de Potentia", p. 430 de l'édition nommée); mais à la suite des discussions entre Leibniz et les Cartésiens l'expression „vis viva" ou „force vive" fut bientôt identifiée avec l'expression mv^2. Le coëfficient $\frac{1}{2}$ ne fut introduit qu'en 1829 par Coriolis; voir la p. IX de l'ouvrage mentionné dans la note 4 de la p. 247, dont la première édition parut en 1829 sous le titre „Le calcul de l'effet des machines".

Huygens en 1661 parle déjà de la „vis" d'un corps en mouvement (voir les lignes 2 et 13 de la p. 417). En 1690 il dit que les corps gardent leur „force". Voir les deux dernières lignes du texte de la p. 456 du T. IX et la p. 463 du même Tome, où l'on trouve l'expression „force ascensionelle" (comparez la note 2 de la p. 164 qui précède). Huygens dit „que les corps doivent garder leur *force ascensionelle* & que pour cela la somme des quarrez de leurs vitesses [c. à. d. Σmv^2] doit demeurer la même." Il n'a apparemment pas eu l'impression que les considérations très générales et plus ou moins métaphysiques de Leibniz sur le mouvement (le premier article de Leibniz sur ce sujet, intitulé „Brevis Demonstratio Erroris memorabilis Cartesii, etc." parut dans les „Acta Eruditorum" de 1686) contenaient quelque chose de plus que ce qu'il avait trouvé lui-même et pourraient être de quelqu'utilité pour „l'etablissement

apparemment ce ſens général, tout auſſi bien que dans la troiſième ligne d'en bas de la p. 434 et dans le titre du traité „De Motu Corporum ex Percuſſione".

L'application du principe fondamental nommé, joint à l'hypothèſe de la réverſibilité du phénomène (ou, ſi l'on veut, l'application du principe que le centre commun de gravité doit monter autant dans le cas où tous les points ſont libres que dans celui où ils compoſent un corps unique [1])) conduit Huygens à l'invention de pluſieurs procédés différents pour trouver la place du centre d'oſcillation, autrement dit, pour calculer la longueur du pendule iſochrone.

Partant du cas le plus ſimple, celui du pendule linéaire (p. 385—391 et 414—439), il conſidère enſuite quelques lignes et ſurfaces (et même, p. 448, une paire de pyramides infiniment effilées) oſcillant dans leur plan. Bientôt après avoir exécuté ces calculs il découvre (p. 458) une méthode générale pour trouver le pendule iſochrone avec une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Depuis ce moment il s'efforce (p. 462—469) à réduire l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan à celle d'une autre ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Vers le même temps il trouve la formule générale (p. 470, note 6) ſuivant laquelle la longueur du pendule iſochrone avec un corps oscillant quelconque eſt égale, comme on dira plus tard, au moment d'inertie [2]) du corps par rapport à l'axe de ſuſpenſion, diviſé par le produit de la „maſſe" du corps par la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe nommé [3]); cette formule rend poſſible la réduction cherchée de l'oſcillation plane à l'oſcillation perpendiculaire au plan de la figure (p. 462, note 3). Auſſitôt qu'il a découvert la formule générale Huygens cherche en outre le centre d'oſcillation de la ſphère; il réuſſit (p. 470) à réduire ce corps lui auſſi à une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Pour trouver les longueurs des pendules iſochrones avec l'ellipsoïde de révolution (p. 473) et quelques autres corps il ſe ſert d'autres procédés d'intégration. Il trouve enfin (voir les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477) une méthode générale pour les ſurfaces de forme ſymétrique oſcillant dans leur plan, ainſi qu'une méthode générale pour les corps oscillants de révolution (p. 482), toujours en appliquant la

des regles du mouvement" (voir les premières lignes de la p. 177 du T. X, où il faut lire, d'après le texte de la lettre de Huygens, „depend l'etablissement" au lieu de „depend de l'etablissement"). Comparez la note 7 de la p. 21.

[1]) Nous avons formulé le principe en ces termes dans la note 4 de la p. 385.

[2]) Voir la p. 378 qui suit, en particulier la note 5.

formule générale. La plupart de ces calculs ont été exécutés aux mois de ſeptembre et d'octobre de l'année 1664.

On trouvera dans les Pièces qui ſuivent des notes détaillées expliquant les méthodes de Huygens (voir p. e. les p. 470—477). Nous pouvons donc nous borner ici à énumérer brièvement ces différents procédés de calcul [4]).

Pour trouver le centre d'oscillation d'un nombre fini ou infini de points peſants compoſant un pendule linéaire, Huygens ſe ſert de ce qu'on peut appeler la „méthode directe", celle qui découle immédiatement du principe fondamental (Pièce II, p. 385—391; Pièce IV, p. 415—433 et Pièce V, p. 434—439); on y trouve déjà (p. 419) la formule générale pour ce cas particulier. Dans certains cas (p. 385—387; p. 391; p. 421—425) il y fait uſage d'une parabole (voir la note 4 de la p. 385 et les p. 421 et ſuiv.) pour effectuer la ſommation des produits des différents poids par les hauteurs qu'ils atteignent dans le mouvement libre; on peut parler alors de la „méthode de la parabole" (voir la Pièce IX, en particulier le troiſième alinéa de la note 2 de la p. 458).

La „méthode directe" peut encore être employée pour un pendule compoſé de deux points peſants ſitués ſur une ligne horizontale (p. 447) [5]), pour quelques lignes oſcillant dans leur plan [6]) (demi-circonférence de cercle, oſcillant autour du centre de ce cercle, p. 441; ligne droite horizontale, p. 444; ligne briſée, le point de ſuſpenſion étant ſitué au milieu de la droite qui joint les extrémités, p. 449—452), ainſi que pour une paire de ſurfaces triangulaires infiniment aigues (p. 448), pour une paire de pyramides poſſédant la même propriété (p. 448) et pour un ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle (p. 489—490), l'oſcillation ayant toujours lieu dans le plan de la figure. Toutes ces figures [7]) ſont décompoſées, comme nous l'avons dit, en une infinité d'éléments pouvant exécuter chacun le mouvement aſcenſionnel libre dont nous avons parlé [8]).

---

[3]) Voir p. e. la note 7 de la p. 485.

[4]) Sauf à nous étendre un peu plus longuement sur ce que nous appelons ici la „méthode des trois quarts" et la „méthode des quatre cinquièmes"; voir le dernier alinéa de la note 2 de la p. 448, ainsi que le dernier alinéa de la note 3 de la p. 449 et la note 6 de la p. 453.

[5]) Ce pendule oscille dans le plan formé par le point de suspension et les deux points pesants. Inutile d'ajouter (puisque nous avons dit généralement que les pendules considérés par Huygens ont une forme symétrique) que les deux poids sont égaux et également distants du point de suspension.

[6]) Ou, s'il s'agit d'une ligne droite, dans le plan formé par cette ligne et le point de suspension

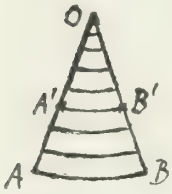
[7]) Excepté évidemment la figure composée de deux points pesants.

[8]) P. 357—358.

C'eſt apparemment en partant de ces réſultats que Huygens trouve les longueurs des pendules iſochrones avec certaines parties du cercle, et avec le cercle lui-même ſuſpendu en un point de ſon contour, ainſi qu'avec certains arcs de cercle, et avec la circonférence de cercle entière ſuſpendue en un de ſes points (p. 455), l'oſcillation ayant lieu ici auſſi dans le plan de la figure.

Il trouve en outre (p. 442) en ſe ſervant de la „méthode des trois-quarts", que nous expliquerons, la longueur du pendule iſochrone avec un demi-cercle ſuſpendu au centre de ce cercle, ainſi que celle du pendule correſpondant à un triangle iſoſcèle ſuſpendu au milieu de ſa baſe (p. 452—454) ou ſuſpendu à ſon ſommet (p. 456), l'oſcillation étant toujours plane.

[Fig. 3.]



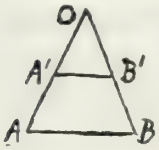
La „méthode des trois-quarts" conſiſte à calculer d'abord la longueur du pendule iſochrone correſpondant à ce qu'on peut appeler la ligne baſale de la ſurface conſidérée (demi-circonférence de cercle, ligne briſée, ou ligne droite horizontale dans les trois cas conſidérés par Huygens), ſuſpendue au même point et oſcillant latéralement, et à multiplier enſuite cette dernière longueur par $\frac{3}{4}$. Dans le cas de la Fig. 3 la ligne baſale de la figure plane OAB eſt AB, OA et OB étant des lignes droites. Huygens motive plus ou moins ſon procédé aux p. 442 et 453, mais, comme nous le diſons auſſi dans la note 2 de la p. 442 et dans la note 6 de la p. 453, ſon explication ne ſuffit guère pour convaincre le lecteur de la juſteſſe de cette méthode. Il reſſort de ſes paroles que cette méthode n'eſt pas généralement applicable, mais il ne dit pas clairement dans quels cas on peut l'appliquer; et il ne s'en ſert ni dans le cas de la Fig. 28 (voir la p. 448, en particulier le troiſième alinéa de la note 2 de cette page) ni dans celui du ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle (p. 489—490), où elle eſt applicable.

Huygens trouve la „méthode des trois quarts" en réduiſant l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan à l'oſcillation d'un pendule linéaire. En effet, tant à la p. 442 qu'à la p. 453 il ſubſtitue à la ſurface oſcillante un pendule linéaire dont la longueur eſt égale à celle du pendule iſochrone avec la ligne baſale de la figure conſidérée et dont la denſité eſt proportionnelle à la diſtance du point de ſuſpenſion (voir la Fig. 24 à la p. 442 et la Fig. 31 à la p. 452), de ſorte que le pendule iſochrone avec ce pendule linéaire a une longueur égale aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du pendule linéaire,

c. à. d. aux $\frac{3}{4}$ de celle du pendule iſochrone avec la ligne baſale homogène oſcillant dans ſon plan. Mais c'eſt préciſément cette ſubſtitution qu'on voudrait voir expliquée [1]). Le pendule linéaire en queſtion eſt compoſé des maſſes, en nombre infini, des anneaux ou bandes (voir la Fig. 3), ayant toutes la même largeur conſtante, dans lesquelles on peut découper la ſurface OAB, chaque maſſe étant concentrée dans le centre d'oſcillation de la bande ſuppoſée ſuſpendue ſeule au point O et oſcillant latéralement. Pour que la denſité de ce pendule linéaire puiſſe varier comme nous l'avons dit, il faut, dit-il, que les longueurs des pendules iſochrones avec les bandes forment une ſérie arithmétique (p. 453). Ceci indique que dans la penſée de Huygens la méthode n'eſt applicable que lorſque les lignes A'B' [Fig. 3] qui découpent la ſurface en bandes ayant toutes la même largeur conſtante ſont ſemblables et ont le point O comme centre de ſimilitude. En effet, lorſqu'il en eſt ainſi, le pendule linéaire qu'il conſidère peut être formé comme il le dit par les maſſes des bandes concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation; et les trois cas où il applique la méthode ſont tels. Or, nous démontrerons que dans les cas de ce genre la méthode eſt bonne.

On peut ſe demander plus généralement s'il eſt poſſible de découper une ſurface oſcillant latéralement, p. e. l'ellipſe de la Fig. 5 ou le triangle de la Fig. 4, en un certain nombre de bandes de telle manière que ſi l'on concentre la maſſe de chaque bande en ſon centre d'oſcillation et qu'on cherche enſuite la longueur du pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes ainſi concentrées, cette dernière longueur devient égale à la longueur du pendule iſochrone avec l'ellipſe ou le triangle donné. Ce qui n'eſt certainement pas permis, c'eſt de découper le triangle par des parallèles à la baſe arbitrairement choiſies en un nombre fini de bandes, p. e. en deux parties OA'B' et A'ABB', où OA' = A'A, et d'y appliquer le procédé décrit: on vérifie aiſément qu'on ne trouve pas de cette façon le centre d'oſcillation du triangle. Mais on peut chercher un mode ſpécial de découper le triangle (ou une des autres figures conſidérées par Huygens) en un certain nombre de bandes de telle manière qu'on trouve le vrai centre d'oſcil-

[Fig. 4.]



[1]) Il est fort possible que Huygens n'avait de la justesse de cette substitution qu'une certitude intuitive. Les pages qui suivent (p. 363—368) servent à justifier, et en même temps à étendre, sa méthode, nullement à reconstruire la marche de ses idées.

lation du triangle en cherchant le centre d'oſcillation des maſſes des bandes concentrées chacune en ſon centre d'oſcillation; et rien ne démontre qu'il eſt impoſſible de trouver d'une manière analogue la vraie longueur du pendule iſochrone avec une ſurface elliptique (Fig. 5) — ou une autre ſurface plane à laquelle la méthode des trois quarts telle que Huygens l'applique n'eſt pas applicable — en la découpant en un nombre fini ou infini d'anneaux ne poſſédant pas la propriété d'avoir une largeur conſtante.

[Fig. 5.]

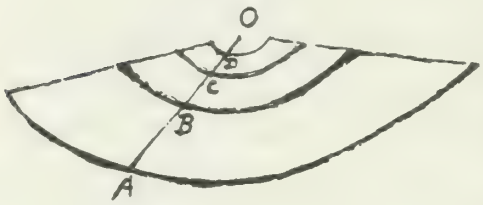
Nous ferons voir d'abord que la juſteſſe de la „méthode des trois quarts" [1]) peut être démontrée pour un cas différant de celui conſidéré par Huygens et en partant de ce réſultat nous démontrerons (deuxième et troiſième alinéa de la p. 366) la juſteſſe de la méthode dans le cas enviſagé par lui.

À cet effet, nous nous ſervirons de la formule générale pour la longueur du pendule iſochrone

$$l = \frac{I}{Mb},$$

où I déſigne le moment d'inertie [2]) de la ſurface (ou plus généralement du corps) par rapport à l'axe d'oſcillation, M la maſſe de la ſurface (ou du corps) et b la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe de ſuſpenſion. Il eſt vrai que Huygens n'avait apparemment pas encore trouvé cette formule générale [3]) au moment d'exécuter les calculs en queſtion, mais il doit l'avoir trouvée peu de jours après [4]).

[Fig. 6.]



Conſidérons une ſurface plane [Fig. 6 ou Fig. 7] [5]) compoſée d'un nombre fini de bandes ou d'anneaux ſemblables entre eux [6]) et ne poſſédant donc pas tous la même largeur conſtante, le point O étant par hypothèſe le point de ſimilitude des bandes. Soit $OA = r$, $OB = kr$,

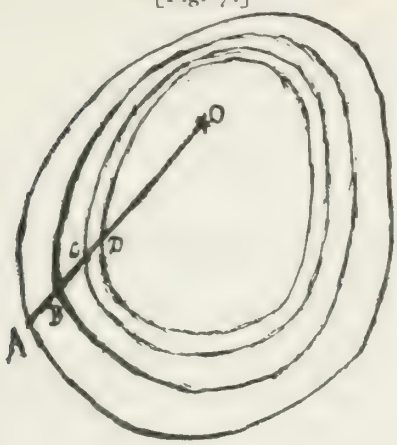
[1]) On verra en effet que la méthode mérite toujours ce nom dans le cas où la bande extérieure devient infiniment mince et se change donc en une „ligne basale", non homogène en général. C'est le produit de trois quarts par la longueur du pendule isochrone avec cette ligne basale qui donnera la longueur du pendule isochrone avec la figure plane.

[2]) Voir la note 5 de la p. 378 qui suit.

[3]) Comme il suppose le corps divisé en un nombre immense n de parties de même masse, cette

$OC = k^2 r$, $OD = k^3 r$, où la conſtante $k < 1$. On aura pour les bandes ſucceſſives, où la plus grande eſt nommée d'abord, $b = \rho_0, k\rho_0, k^2\rho_0, k^3\rho_0 \ldots$ reſpectivement; $M = \mu_0, k^2\mu_0, k^4\mu_0, k^6\mu_0 \ldots$; $I = i_0, k^4 i_0, k^8 i_0 \ldots$ Les longueurs des pendules iſochrones correſpondant aux différentes bandes ſeront $l = \lambda_0, k\lambda_0, k^2\lambda_0, k^3\lambda_0 \ldots$, où $\lambda_0 = \frac{i_0}{\mu_0\rho_0}$.

[Fig. 7.]



La longueur du pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes des bandes concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation ſera alors d'après la formule générale $\frac{\mu_0\lambda_0^2\,(1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots)}{\mu_0\lambda_0\,(1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots)}$ ou $\lambda_0 \frac{1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots}{1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots}$ (1).

Mais la longueur du pendule iſochrone avec la figure donnée ſera d'après la même formule $\frac{i_0\,(1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots)}{\mu_0\rho_0\,(1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots)}$ ou $\frac{i_0}{\mu_0\rho_0} \cdot \frac{1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots}{1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots}$ (2).

Les longueurs (1) et (2) étant les mêmes, il eſt permis de ſubſtituer à la ſurface oſcillante l'enſemble des maſſes des bandes ſemblables concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation. Or, ſi l'on ſuppoſe que le nombre des bandes s'accroît jusqu'à l'infini, de ſorte que le point O qui était extérieur à la ſurface formée par les bandes devient un point du contour de cette ſurface dans le cas de la Fig. 6 et de la ſurface elle-même dans le cas de la Fig. 7, les longueurs des pendules (1) et (2) deviendront égales à $\lambda_0 \frac{1 - k^3}{1 - k^4}$. Pour $k \to 1$, on trouve la longueur

---

formule a chez lui la forme $\frac{\Sigma r^2}{nb}$, ou Σr^2 désigne la somme des carrés des distances de toutes ces particules à l'axe d'oscillation. Comparez la note 1 de la p. 369 et la note 5 de la p. 378.

[4]) Voir sur la découverte de la formule générale, qui eut lieu avant le 10 octobre 1664, la note 6 de la p. 470. À la p. 452 on trouve la date du 29 septembre 1664.

[5]) Il n'est pas nécessaire que la surface considérée ait une forme symétrique.

[6]) Pour que les *bandes* puissent être semblables entre elles, il est évidemment nécessaire que les *lignes* qui limitent la surface considérée et celles qui la découpent en bandes soient également semblables entre elles.

$\frac{3}{4}\lambda_0$, où λ_0 eſt la longueur du pendule iſochrone avec la ligne baſale (ouverte dans le cas de la Fig. 6, fermée dans le cas de la Fig. 7) qui n'eſt homogène que dans le cas conſidéré par Huygens où les lignes ſemblables qui diviſent la ſurface en une infinité de bandes ſont telles que chaque bande a une largeur conſtante; ce qui évidemment n'eſt pas vrai dans le cas de la Fig. 5 p. e. ſans que pour cela la méthode des trois quarts ceſſe d'être applicable [1]). On peut p. e. conclure de la préſente théorie, après avoir démontré que la longueur du pendule iſochrone avec une circonférence de cercle de denſité linéaire quelconque (ſymétrique cependant par rapport à l'axe vertical), ſuſpendue en un de ſes points et oſcillant dans ſon plan, eſt égale au diamètre de cette circonférence (voir la note 3 de la p. 455), que le pendule iſochrone avec le cercle lui-même, ſuſpendu en un point de ſon contour et oſcillant dans ſon plan (cas de la Fig. 32 à la même page) a une longueur égale aux trois quarts du diamètre [2]).

Mais ſi la ſurface peut être diviſée par des lignes ſemblables, ayant le point O comme centre de ſimilitude, en bandes ayant toutes la même largeur conſtante — ce qui eſt le cas enviſagé par Huygens — nous pouvons maintenant démontrer comme ſuit que la concentration des maſſes des bandes en leurs points d'oſcillation eſt permiſe dans le cas d'une pareille ſurface ainſi diviſée en bandes, du moins lorsque le nombre des bandes devient infini, de ſorte que toutes les bandes deviennent infiniment minces.

Soit N le nombre des bandes, l la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface entière, oſcillant toujours dans ſon plan. Le pendule iſochrone avec l'enſemble des bandes depuis le point O jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ bande incluſivement ſera alors $\frac{n}{N}l$. Suivant la théorie qui précède (voir la première ligne de cette page) la longueur du pendule iſochrone avec la $n^{\text{ième}}$ bande à elle ſeule aura une valeur ſupérieure à $\frac{4}{3}\frac{n-1}{N}l$ et inférieure à $\frac{4}{3}\frac{n}{N}l$, c. à. d. une valeur $\frac{4}{3}\frac{n-q_n}{N}l$, où $q_n < 1$. Or, la maſſe de la $n^{\text{ième}}$ bande eſt $\frac{(n+1)^2-n^2}{N^2}$ M ou $\frac{(2n+1)}{N^2}$M. La longueur (l) du

[1]) Comparez la note 1 de la p. 364.

[2]) Le cercle est découpé en anneaux de la manière indiquée dans la Fig. 5, p. 364. L'anneau extérieur, infiniment mince, peut être considéré comme la ligne basale. Cette ligne pesante n'est pas homogène comme dans les cas considérés par Huygens.

pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes des bandes concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation ſera donc, d'après l'équation générale de la p. 364, déterminée, lorsque le nombre des bandes augmente indéfiniment, par l'équation

$$(l) = \lim_{N=\infty} \frac{\sum_1^N \left\{ (2n+1) \frac{M}{N^2} \left(\frac{4}{3} \frac{n-q_n}{N} l \right)^2 \right\}}{\sum_1^N \left\{ (2n+1) \frac{M}{N^2} \left(\frac{4}{3} \frac{n-q_n}{N} l \right) \right\}}$$

$$\text{ou } (l) = \frac{4}{3} l \lim_{N=\infty} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\sum_1^N (n-q_n)^2 (2n+1)}{\sum_1^N (n-q_n)(2n+1)} \right\}$$

On aura donc $(l) = \frac{4}{3} l \times \frac{3}{4} = l$. Ce qu'il fallait démontrer.

On peut appliquer une méthode analogue dans le cas où le pendule oſcillant eſt formé par un corps pouvant être découpé en tranches par des ſurfaces ſemblables entre elles et ayant pour point de ſimilitude le point de ſuſpenſion O, c. à. d. la projection du centre de gravité du corps ſur l'axe d'oſcillation. Le corps (comparez la Fig. 3, p. 362) peut être limité par une „ſurface baſale" et un cône, dont les génératrices relient le point O à tous les points du contour de la ſurface baſale; ou bien ce point O (comparez les Fig. 5 et 7) peut ſe trouver ſur la ſurface baſale fermée ou encore à l'intérieur du corps. Si l'on a dans le cas du corps (Fig. 6 ou 7) $OA = r$, $OB = kr$, $OC = k^2 r$, etc., donc $b = \rho_0$, $k\rho_0$, $k^2\rho_0$, etc. pour les tranches ſucceſſives, on aura $M = \mu_0$, $k^3\mu_0$, $k^6\mu_0$, etc., $I = \iota_0$, $k^5\iota_0$, $k^{10}\iota_0$, etc. Les longueurs des pendules iſochrones correſpondant aux diverſes tranches ſeront $l = \lambda_0$, $k\lambda_0$, $k^2\lambda_0$, etc., où $\lambda = \frac{\iota_0}{\mu_0\rho_0}$. La longueur du pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes des tranches concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation ſera alors d'après la formule générale $\frac{\mu_0 \lambda_0^2 (1 + k^5 + k^{10} \ldots)}{\mu_0 \lambda_0 (1 + k^4 + k^8 \ldots)}$ ou $\lambda_0 \frac{1 + k^5 + k^{10} \ldots}{1 + k^4 + k^8 \ldots}$. Et la longueur du pendule iſochrone correſpondant au corps donné ſera d'après la même formule $\frac{\iota_0 (1 + k^5 + k^{10} \ldots)}{\mu_0 \rho_0 (1 + k^4 + k^8 \ldots)}$, c. à. d. elle ſera égale à la longueur précédente. Lorſque le nombre des tranches devient infini du côté du point O, la longueur du pendule iſochrone deviendra $\lambda_0 \frac{1 - k^4}{1 - k^5}$. Pour $k \to 1$, on trouve la longueur $\frac{4}{5} \lambda_0$, où λ_0 eſt la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface baſale qui peut ne pas être

homogène. On peut donc appliquer aux corps de ce genre une méthode des quatre cinquièmes analogue à la méthode des trois quarts.

Dans le cas de la Fig. 27 (p. 447) les deux poids ou points pesants O et R peuvent évidemment avoir une forme quelconque pourvu qu'ils soient infiniment petits. Si l'on prend pour O et R deux petits arcs de la circonférence de cercle POR, le résultat du calcul de la p. 448 dans le cas de la Fig. 28 peut être obtenu immédiatement par l'application de la méthode des trois quarts. Mais si l'on donne aux poids O et R la forme de deux petites surfaces planes perpendiculaires respectivement aux droites AO et AR de la Fig. 27, le résultat du calcul de la p. 448 dans le cas de la Fig. 29 peut être obtenu immédiatement par la méthode des quatre cinquièmes, comme nous le disons aussi dans la note 3 de la p. 449.

Après avoir trouvé la longueur du pendule isochrone avec un cercle horizontal suspendu en un point de la verticale passant par son centre (voir la note 7 de la p. 481), Huygens aurait pu en déduire celle du pendule isochrone avec un cône droit suspendu en son sommet, s'il avait connu la méthode des quatre cinquièmes. La valeur qu'il trouve pour le cône dans la Prop. XXII de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium", et qu'il calcule d'une tout autre manière, s'accorde avec la valeur $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}+x\right)$, où y est le rayon de la surface basale (cercle) et x la hauteur du cône, valeur obtenue en multipliant par $\frac{4}{5}$ la longueur du pendule isochrone avec le cercle basal.

Observons encore que dans le cas du corps oscillant considéré le pendule linéaire qu'on peut substituer à ce corps a une longueur égale à celle du pendule isochrone avec la surface basale (homogène ou non), et une densité linéaire proportionnelle au carré de la distance au point de suspension: tandis que ce pendule linéaire était un triangle infiniment aigu pour la surface oscillante (Fig. 24 de la p. 442 et Fig. 31 de la p. 452), dans le cas du corps oscillant c'est un cône infiniment effilé.

La Pièce IX (p. 457—460) nous apprend (voir la note 2 de la p. 458) comment Huygens a trouvé la longueur du pendule isochrone avec une surface plane, oscillant perpendiculairement à son plan, en se servant d'abord de la méthode directe, et en transformant ensuite cette méthode dans la „méthode de l'onglet", lorsque la surface est suspendue en un point de son contour, et dans la „méthode du tronc", lorsqu'elle est suspendue à un point (ou plutôt à un axe) extérieur. Dès lors, l'application de la méthode directe pour les surfaces planes, oscillant

comme il a été dit, devient ſuperflue; il peut maintenant trouver la longueur du pendule iſochrone en prenant la diſtance de l'axe de ſuſpenſion à la projection ſur le plan de la figure du centre de gravité de l'onglet ou du tronc élevé ſur cette figure et limité par un plan oblique paſſant par l'axe de ſuſpenſion. Comparez la propoſition qui forme le dernier alinéa de la p. 503.

On conçoit qu'après la découverte de cette méthode, Huygens ſe ſoit efforcé, comme nous l'avons dit, de réduire l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan à celle d'une autre ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan; c'eſt ce qu'il effectue d'une manière ingénieuſe en découpant la ſurface donnée en tranches horizontales et en donnant à ces tranches la poſition verticale par une rotation de 90°, comme on peut le voir dans la Deuxième et la Troiſième Partie (p. 462 et 463) de la Pièce X. Comme nous le diſons dans la note 6 de la p. 470, il doit avoir découvert, avant de trouver cette méthode de réduction de l'oſcillation latérale à l'oſcillation perpendiculaire au plan de la figure, la formule générale pour la longueur du pendule iſochrone, laquelle n'eſt d'ailleurs, pour le cas de l'oſcillation perpendiculaire au plan de la figure, autre choſe que la miſe en équation de la méthode de l'onglet ou du tronc; tandis qu'elle peut être trouvée dans le cas d'un corps oſcillant quelconque par la méthode directe. Mais il ne ſonge pas encore en 1664 à donner à cette formule générale la place éminente qu'elle occupe à bon droit dans l'„Horologium oſcillatorium" de 1673 [1]).

En poſſeſſion de ces méthodes, Huygens réuſſit maintenant à réſoudre le problème capital (voir les p. 355—356): quelle eſt la longueur du pendule iſochrone avec une ſphère homogène ſuſpendue à un fil de poids négligeable? Il réduit la ſphère d'une manière ingénieuſe (Pièce XI, à la p. 470) à une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Comme cette ſurface eſt ſuſpendue à un axe qui lui eſt extérieur, il faut appliquer la méthode du tronc. Or, pour trouver la place de la projection ſur le plan de la figure du centre de gravité de ce tronc, Huygens ſe ſert d'une formule (voir la p. 472) qui permet de déterminer

[1]) En 1669 (voir à la p. 488 du T. VI le 9ième anagramme) Huygens formule comme suit le théorème exprimé par la formule générale $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$ (voir le premier alinéa de la note qui occupe la p. 471): „Figuræ cuilibet oscillatorio motu agitatæ isochronum est pendulum simplex cujus longitudo æqualis ei quæ fit cum quadrata omnium perpendicularium, ductarum a particulis minimis, in quas figura secari intelligitur, in axem oscillationis dividuntur per distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis multiplicem per numerum earundem particularum". Remarquons que les „particulæ minimæ" sont supposées égales entre elles.

cette place lorſqu'on connaît la projection ſur le plan de la figure du centre de gravité de l'onglet correspondant, c. à. d. de l'onglet obtenu en coupant le cylindre élevé ſur la figure plane par un plan oblique paſſant par une tangente à cette figure parallèle à l'axe d'oſcillation par lequel paſſe le plan oblique qui limite le tronc. Comme nous le diſons auſſi dans la note 1 de la p. 509, cette formule correſpond pour le cas ſpécial d'une figure plane en „mouvement ſolide" (p. 499) au Théorème XIX de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium", ſuivant lequel, lorſqu'un même corps eſt ſuſpendu ſucceſſivement à différents axes parallèles entre eux et ſitués tous dans un même plan avec le centre de gravité du corps, le produit de la diſtance de l'axe d'oſcillation au centre de gravité du corps par la diſtance de ce centre de gravité au centre d'oſcillation [1]) eſt conſtant [2]).

Huygens cherche enſuite (p. 473) la longueur du pendule iſochrone avec un ellipſoïde de révolution ſuſpendu en un point de ſon axe. Dans ce cas le corps entier ne peut plus être réduit à une ſurface plane, mais en décompoſant la formule générale $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$ [3]) en $x = \frac{\Sigma y^2}{nb} + \frac{\Sigma z^2}{nb}$ — où y et z déſignent les diſtances d'un point à deux plans perpendiculaires entre eux — , il eſt cependant poſſible de ſe ſervir de la méthode du tronc, comme on peut le voir dans la note 2 de la p. 473. Pour trouver le Σz^2 d'une ſurface plane (c. à.d. la ſomme des carrés des diſtances des particules égales qui conſtituent cette ſurface à un axe donné ſitué dans le plan de la figure) Huygens fait uſage des formules qu'on trouve à la p. 503 et dans la Pièce XVIII (p. 545) et auſſi dans l'„Horologium oſcillatorium" (Prop. VIII, IX, X et XI de la Pars Quarta).

Enſuite Huygens applique à une ellipſe oſcillant dans ſon plan (p. 476) une méthode de calcul analogue à celle dont il s'eſt ſervi dans le cas de l'ellipſoïde, ce qui le conduit, paraît-il (voir les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477) à formuler une méthode générale pour les ſurfaces planes ſymétriques oſcillant dans leur plan (voir, à la p. 515, la Pièce XVI): la longueur l du pendule iſochrone eſt dans ce cas $l = l_1 + \frac{l' z'}{b'}$, où l_1 eſt la lon-

---

[1]) C'est cette dernière distance que nous désignons à la p. 472 par „λ trunci".

[2]) Dans les anagrammes envoyés en 1669 à la „Royal Society" (p. 489 du T. VI, comparez la note 1 de la p. 369), Huygens appelle ce produit „rectangulum distantiarum".

[3]) Voir la note 3 de la p. 364 et la note 1 de la p. 369.

gueur du pendule iſochrone correſpondant à la même ſurface ſuſpendue de la même manière, mais oſcillant perpendiculairement à ſon plan, l' celle du pendule iſochrone avec la demi-figure oſcillant autour de l'axe de ſymétrie de la figure totale, z' la diſtance du centre de gravité de la demi-figure à cet axe de ſymétrie et b' la diſtance du centre de gravité de la figure entière au point de ſuſpenſion. Cette formule eſt appliquée au ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle (p. 487—489 et p. 527—529), ainſi qu'à la paire de triangles infiniment aigus (voir le dernier alinéa de la p. 361) ſuſpendus en un point de l'axe de ſymétrie (p. 491, 494, 533 et ſuiv.), à l'hexagone régulier (p. 495), au rectangle (p. 521—523), au triangle iſoſcèle (p. 523—525) et dans quelques autres cas (voir p. e. la note 2 de la p. 493).

À la p. 482 on trouve une énumération des ſommes de la forme Σy^4, Σy^3, $\Sigma y^2 z^2$, $\Sigma y^2 z$, et Σyz — où y et z déſignent les diſtances d'un point d'une ſurface plane ſymétrique à l'axe de ſymétrie et à un autre axe perpendiculaire au premier — qu'il faut connaître pour pouvoir déterminer la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface plane nommée oſcillant dans ſon plan, ainſi que celle du pendule iſochrone avec le corps obtenu par la rotation de cette figure plane autour de ſon axe de ſymétrie. Cette méthode générale pour les corps de révolution eſt appliquée au paraboloïde ſuſpendu à ſon ſommet (p. 483), ainſi qu'à l'hyperboloïde de révolution ſuſpendu de la même manière (Pièce XIX, à la p. 550).

Dans cette dernière Pièce, on trouve en outre une application de la méthode de calcul développée par Huygens dans la Prop. XV de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium", ce qui fait voir que cette méthode, du moins pour le cas particulier des corps de révolution, lui était déjà connue en 1665 (ou peut-être en 1664). Il s'agit de trouver le Σz^2 du corps, c. à. d. la ſomme des carrés des diſtances de tous les points peſants égaux qui conſtituent le corps, au plan de ſymétrie paſſant par l'axe d'oscillation. Huygens démontre à l'endroit nommé que cette ſomme Σz^2 eſt égale au produit de N (nombre des particules du corps) par une „ſurface" Z, déterminée par une formule qui dans le cas où le corps eſt de révolution ſe réduit à la proportion $\frac{1}{2} R : z' = \frac{1}{4} \rho^2 : Z$ [4]), où ρ eſt le rayon du cercle baſal,

[4]) Voir la note 4 de la p. 554.

tandis que R eſt la ligne de baſe (ED dans la Fig. 90 de la p. 550) et z' la diſtance à l'axe de ſymétrie du centre de gravité de la figure „quæ à latere eſt" (ſuivant l'expreſſion de Huygens à l'endroit cité), c. à. d. de la ſurface BKDEMB de la Fig. 90 nommée; cette ſurface plane eſt conſtruite de telle manière qu'entre chaque paire de ſections horizontales faites par les mêmes plans dans le corps de révolution et dans cette ſurface ſe trouve, peut-on dire, un même nombre de points peſants, la denſité de ces points étant uniforme tant pour le corps que pour la ſurface; en d'autres termes, la longueur p de la ſection faite dans la ſurface par un plan horizontal quelconque eſt proportionnelle à la ſurface P de la ſection faite dans le corps par ce même plan [1]); on peut dire, ſi l'on veut, que la figure „à latere" eſt le corps lui-même rabattu dans un plan [2]). Poſons $p = k\mathrm{P}$, où k eſt une conſtante.

La formule $\frac{1}{2}\mathrm{R} : z' = \frac{1}{4}\rho^2 : \mathrm{Z}$ ou $\Sigma z^2 = \mathrm{N}\frac{\rho^2 z'}{2\mathrm{R}}$ provient ſans doute [3]) de la détermination de Σz^2 qu'on trouve dans la note 4 de la p. 483. On peut ſuppoſer le corps de révolution diviſé en une infinité de cylindres de hauteur égale a. Pour chaque cylindre on a $\Sigma z^2 = \frac{1}{4} nr^2$, où z à la même ſignification que plus haut, tandis que r eſt le rayon du cylindre et n le nombre de points qu'il contient. Il contient donc $\frac{n}{\pi r^2 a}$ points dans l'unité de volume, de ſorte que $n = \mathrm{N}\frac{\pi r^2 a}{\mathrm{V}}$, où V repréſente le volume du corps entier. Le Σz^2 du corps entier eſt donc $\mathrm{N}\frac{\pi a}{4\mathrm{V}}\Sigma r^4$. Or, on a $z' = \frac{\Sigma \frac{1}{2} p^2}{\Sigma p} = \frac{1}{2} k \frac{\Sigma \mathrm{P}^2}{\Sigma \mathrm{P}}$, où $\mathrm{P} = \pi r^2$ et $\Sigma \mathrm{P} = \frac{\mathrm{V}}{a}$; donc $z' = k\frac{\pi^2 a}{2\mathrm{V}}\Sigma r^4$.

---

[1]) On trouve aussi des figures „à latere" de ce genre dans la Première et la Deuxième Partie de la Pièce XI (p. 470—474).

[2]) Dans la Troisième Partie de la Pièce X (p. 463—469) on trouvera un tronc „rabattu dans un plan".

[3]) Dans le calcul qui suit nous n'avons nullement la prétention de reproduire exactement le raisonnement qui a conduit Huygens à la proportion $\frac{1}{2}\mathrm{R} : z' = \frac{1}{4}\varrho^2 : \mathrm{Z}$. Nous saisissons cette occasion pour remarquer que Huygens ne se sert nulle part du symbole Σ, qui fut introduit par L. Euler en 1755 („Institutiones calculi differentialis, etc." cap. 1, § 26, p. 27). Quant au symbole π, celui-ci n'a probablement fait son apparition qu'au commencement du dix-

On a en outre $R = k\pi\rho^2$; donc $\frac{z'}{R} = \frac{\pi a}{2V\rho^2}\Sigma r^4$. L'expreſſion $N\frac{\pi a}{4V}\Sigma r^4$ peut donc s'écrire $N\frac{\rho^2 z'}{2R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons fait mention de la conſtance du „rectangulum diſtantiarum" (voir la note 2 de la p. 370) dans le cas d'une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan; à la p. 529 Huygens démontre la conſtance de ce „rectangulum" pour le cas d'une ſurface plane ſymétrique oſcillant dans ſon plan, en partant de la propoſition déjà établie, ainſi que de la formule générale (p. 370, dernière ligne) pour la longueur du pendule iſochrone avec une ſurface ſymétrique oſcillant dans ſon plan. Mais il n'établit pas encore la conſtance du „rectangulum" pour un corps oſcillant quelconque, comme il le fera en 1669 (voir le premier alinéa de la p. 370).

On trouve à la p. 461 une autre loi, également ſusceptible de généraliſation; ſuivant cette loi la période d'une figure plane oſcillant dans ſon plan eſt la même où que le point de ſuſpenſion ſe trouve ſur une circonférence de cercle ſituée dans le même plan et ayant ſon centre au centre de gravité de la figure. Huygens ne donne aucune démonſtration de cette loi, à laquelle il ſemble encore faire alluſion à la p. 525 (7ième ligne d'en bas). En 1669 il connaiſſait la loi généraliſée [4]) qu'on trouve auſſi dans l'„Horologium oſcillatorium" (Prop. XVI de la Pars Quarta); ſuivant cette loi la période d'un corps oſcillant donné a une valeur déterminée par la diſtance du centre de gravité de ce corps à l'axe d'oſcillation, et la direction de ce dernier.

On ne trouve pas encore dans les Pièces qui ſuivent la loi ſuivant laquelle le point de ſuſpenſion et le centre d'oſcillation peuvent échanger leurs places

---

huitième siècle (voir M. Cantor „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" III, 2te Aufl. Leipzig, Teubner [1901], p. 306). Dans l'„Horologium oscillatorium" la démonstration est beaucoup plus géométrique.

[4]) T. VI, p. 488, anagramme 10: „Figura quævis sive linea fuerit sive superficies sive solidum, si aliter atque aliter suspendatur agiteturque super axibus a figuræ centro gravitatis æqualiter distantibus, ut tamen idem semper sit oscillationis planum, sibi ipsi isochrona est". Tous ces axes forment donc un cylindre à section droite circulaire.

(„Horologium oſcillatorium", Pars Quarta, Prop. XX: „Centrum Oſcillationis & punctum ſuſpenſionis inter ſe convertuntur").

Les Pièces IV, XV et XVI étaient ſans doute deſtinées à être publiées; c'eſt pourquoi nous y avons ajouté une traduction françaiſe. Il en eſt de même de la Pièce XVIII [1]), à laquelle cependant nous n'avons pas ajouté de traduction, puisqu'on peut tout auſſi bien lire les Propoſitions IX, X et XI de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium" qui ſera publié avec une traduction [2]).

Le 10 octobre 1664 (voir la p. 120 du T. V) Huygens put écrire à Moray, c. à. d. à la „Royal Society", qu'il avait trouvé les centres d'oſcillation du triangle iſoſcèle ſuſpendu par le ſommet ou au milieu de la baſe et oſcillant dans ſon plan, ainſi que celui du cercle, etc. Il dit avoir „la determination generale pour tous triangles et rectangles, ſuſpendus par un des angles, ou par le milieu des coſtez". Dans les Pièces qui ſuivent on ne trouvera pas de calcul relatif à un rectangle ſuſpendu par un des angles, ce qui fait bien voir que tous les calculs de Huygens n'ont pas été conſervés [3]). Huygens écrit en outre avoir trouvé la longueur du pendule iſochrone avec une ſphère „ce qui ſert principalement à la meſure univerſelle" [4]).

Le 28 octobre 1664 (voir la p. 127 du T. V) il écrivit à de Sluſe avoir trouvé une règle univerſelle „ad plana et ſolida" (voir le dernier alinéa de la note qui occupe la p. 477 et à la p. 482 la Septième Partie de la Pièce XI), et dans ſa lettre du 31 octobre à Moray il fait également mention de ces „regles generales". Dans le ſommaire de ſa lettre à P. Petit du 30 octobre 1664 (voir la p. 129 du T. V) il fait mention non ſeulement de la ſphère mais encore du conoïde hyperbolique (ou hyperboloïde de révolution). Le calcul du pendule iſochrone avec ce conoïde

---

[1]) Et peut-être de la Pièce XVII moins importante.

[2]) Il en existe d'ailleurs une traduction allemande: c'est le N°. 192 d'„Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften" (éd. Heckscher et v. Oettingen, Leipzig, Engelmann, 1913).

[3]) Comparez la note 2 de la p. 456 et la note 1 de la p. 512. Huygens a fait beaucoup de calculs sur des feuilles séparées, une partie desquelles ont été collées dans le Manuscrit B (voir la note 2 de la p. 435). Ce sont les „brouillons" mentionnés à la p. 375.

[4]) Comparez les p. 355—356.

ſuſpendu à ſon ſommet que nous poſſédons et dont nous venons de parler (p. 371) date de plus tard (voir, à la p. 550, la Pièce XIX).

En novembre 1664 lord Brouncker (comparez le quatrième alinéa de la p. 349) tâcha d'établir un „principle" ou loi générale du centre d'oſcillation (voir la p. 144 du T. X), mais il ne réuſſit à trouver (ou plutôt à deviner) la place de ce centre que dans le cas de „l'agitation des figures planes ſur un axe qui eſt dans leur meſme plan" (d'après la remarque de Huygens au même endroit).

Le 21 novembre (p. 149 du T. V) Huygens fit connaître à Moray la place du centre d'oſcillation de la ſphère, mais ſans y ajouter de démonſtration; dans cette lettre il parle de nouveau de la meſure univerſelle [4]). Peu de temps après (voir la lettre du 13 décembre de R. Hooke à R. Boyle, à la p. 169 du T. V) on fit à la „Royal Society" des expériences pour vérifier l'aſſertion de Huygens „thereby to ſettle a common ſtandard for length". On avait d'ailleurs déjà fait le 16 novembre (Birch, I, p. 489) des expériences ſur les triangles mentionnés par Huygens dans ſa lettre du 10 octobre, et le 23 novembre le préſident (Birch, I, p. 495) avait fait connaître à la „Society" le „new way for making an univerſal meaſure, propoſed in a letter [la lettre nommée du 21 nov.] to Sir Robert Moray by Mons. Huygens", à la ſuite de quoi on décida de faire les expériences mentionnées par Hooke; elles furent faites (Birch, I, p. 500) dans la ſéance du 7 décembre, avec le réſultat que „Monſieur Huygens's rule was found to approach very near to it". Dans la ſéance du 21 décembre (Birch, I, p. 508) on fit encore des expériences ſur les cercles ſuſpendus en un point de leur contour qui confirmèrent la théorie de Huygens (voir la p. 455). Déjà dans ſa lettre du 7 novembre (T. V, p. 138) Moray avait écrit à Huygens: „On vous prie auec toute ſorte d'inſtance de nous vouloir communiquer toutes vos ſpeculations auec les propoſitions que vous auez dreſſees ſur ce ſuiet", mais Huygens s'excuſa dans ſa réponſe du 2 janvier 1665 (T. V, p. 187) en diſant: „en veritè je n'ay pas le temps de mettre au net ce que j'ay dans mes brouillons[3]) ſur ce ſujet et beaucoup d'autres". Ce n'eſt que le 4 ſeptembre 1669 qu'il envoya „ut adſerventur in Actis Societatis Regiæ" quatorze anagrammes, dont la plupart ſe rapportent à la force centrifuge et au centre d'oſcillation [5]). Mais la publication n'eut lieu qu'en 1673 dans l'„Horologium oſcillatorium".

---

[5]) La dernière se rapporte à la chute cycloïdale (comparez la note 2 de la p. 410). Huygens avait

On ne retrouve pas d'ailleurs dans ce dernier tous les ſujets traités dans les brouillons [1]).

Remarquons encore que la terminologie de Huygens n'eſt pas conſtante (comparez la p. 245). Ainſi l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan eſt appelée en 1664 „[agitatio] in plano ſuo" (p. 455); et l'oſcillation perpendiculaire à ſon plan „[agitatio] in latus" (p. 457; comparez la note 7 à cet endroit); enſuite (p. 461) l'oſcillation dans le plan eſt au contraire déſignée par „[agitatio] in latus"; dans la Pièce XV (p. 499), apparemment deſtinée à la publication, l'oſcillation dans le plan s'appelle „motus oſcillatorius planus" ou „motus planus" et l'oſcillation perpendiculaire au plan „motus oſcillatorius ſolidus" ou „motus ſolidus". Dans l'„Horologium oſcillatorium" ces deux mouvements s'appellent reſpectivement „[agitatio] in latus" et „[agitatio] in planum". (Defin. XI et XII de la Pars Quarta).

Nous avons déjà parlé de la „potentia", ainſi que de la „vis motus" de Huygens (2ième et 13ième ligne de la p. 417) qui n'eſt pas encore une quantité nettement déterminée (p. 359, premier et troiſième alinéa de la note 6) et nous pourrions répéter ici ce que nous avons dit à la p. 245 au ſujet du mot „gravitas" (comparez la note 2 de la p. 384).

On pourrait ſe demander comment il faut concilier le fait que Huygens attribue à un pendule donné la même période partout [2]) avec le réſultat trouvé auparavant (voir la p. 304 de ce Tome) ſur la diminution (apparente) de la gravité par ſuite de la rotation de la terre. Mais il convient de ſe rappeler que Huygens ne fait pas encore de diſtinction en ce moment entre le poids d'un corps

---

proposé lui-même (T. VI, p. 486) la méthode des anagrammes „pour eviter les disputes, et rendre a un chacun ce qui luy est deu dans l'invention des choses nouvelles".

Comparez la note 1 de la p. 369, la note 2 de la p. 370, la note 4 de la p. 373 et le dernier alinéa de la note de la p. 496.

[1]) Voir le dernier alinéa de la note qui occupe la p. 472.

[2]) Comparez la 8ième ligne d'en bas de la p. 355. Dans la Prop. XXV de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium" de 1673, déjà citée à la p. 356, Huygens dit qu'à l'aide du pendule à secondes on peut trouver le pied horaire „ubique gentium".

[3]) C'est par hypothèse et sous toutes réserves que nous lui prêtons ce raisonnement (comparez la fin de cet alinéa).

[4]) Voir la note 2 de la p. 224.

et ſa maſſe. Il avait trouvé par expérience (voir la note 7 de la p. 355) que le poids ſpécifique du corps oſcillant eſt ſans influence ſur ſa période. La formule générale pour la longueur du pendule iſochrone (voir la note 1 de la p. 369) confirme ce réſultat. Il a donc pu penſer que la diminution de la gravité par ſuite de la rotation de la terre eſt probablement ſans influence ſur la période des oſcillations [3]). À plus forte raiſon pouvait-on admettre à la „Royal Society" cette invariabilité de la période d'un pendule donné, puisqu'on n'y connaiſſait pas le réſultat du calcul mentionné de Huygens de la p. 304. Cependant l'idée que cette diminution (apparente) de la gravité pourrait avoir une certaine influence ſur la période d'oſcillation a traverſé l'esprit de Huygens déjà en 1666. À la ſuite du morceau que nous avons publié aux p. 323—324 de ce Tome, il écrit après quelques calculs: „2′7″ quibus horologium [sic] pendulum sub 45 gr. latitudinis lentius incederet una die quam idem sub polo... 2′18″ quibus horolog. lentius eſſet ſub æquin. [4]) in una die quam idem ſub latit. 45 gr." [5]). Nous reviendrons ſur cette queſtion lorsque nous publierons le „Discours de la Cauſe de la Peſanteur". Mais il eſt certain que Huygens n'a pas eu confiance dans l'exactitude de ſon raiſonnement à cet endroit, puisqu'il écrit encore en 1687 [6]): „... je vous prie... de me mander au plus toſt, ſi vous en avez d'autres informations qui nous perſuadent qu'il y a effectivement cette variation dans la nature [c. à. d. la variation de la longueur du pendule à ſecondes, obſervée par Richer] ce qui me ſemble fort vraiſemblable, quoyque je puiſſe auſſi rendre raiſon, en cas qu'elle ne s'y trouve pas" [7]).

Nous avons déjà fait voir plus haut (voir les p. 341—342) combien la netteté et la conciſion de quelques formules de Huygens paraiſſent remarquables lorsqu'on les compare avec les énoncés vagues ou ſcolaſtiques de beaucoup de ſes

---

[5]) Il résulte de la proposition énoncée dans le dernier alinéa de la p. 410 que la période d'une oscillation cycloïdale — et par conséquent aussi la période d'une petite oscillation circulaire — est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'accélération de la chute verticale libre. Si l'on admet que cette accélération est proportionnelle au poids apparent d'un même corps en divers points de la surface du globe terrestre — ce qui est évidemment exact — on retrouvera à fort peu près les résultats de Huygens, bien entendu en admettant la justesse des fractions $\frac{1}{165}$ et $\frac{1}{343}$ de la p. 324.

[6]) Dans sa lettre du 1 mai 1687 à Ph. de la Hire (T. IX, p. 130).

[7]) Comparez la lettre de Huygens du 24 avril 1688 aux Directeurs de la Compagnie des Indes (T. IX, p. 275), et la note 5 de la p. 230 (influence de Newton).

prédéceſſeurs. Quant à la conciſion, elle règne ſurtout dans les morceaux non deſtinés à être publiés [1]). Mais la formule générale [2]) du Manuſcrit B ſe trouve auſſi dans l'„Horologium oſcillatorium", ce qui fait bien voir que dans la penſée de Huygens l'exactitude et une certaine conciſion ne s'excluent pas [3]). Cette conciſion „in ſtatu nascendi" a eu une grande influence ſur le ſtyle de pluſieurs ouvrages de mécanique publiés après 1673. Bornons-nous ici à nommer la Mécanique d'Euler [4]) et à rappeler que c'eſt lui qui a donné le nom de „moment d'inertie" [5]) à la ſomme ou intégrale conſidérée par Huygens de diverſes maſſes multipliées chacune par le carré de ſa diſtance à un axe.

---

[1]) Il est impossible d'y méconnaître l'influence de Cavalieri. Comparez les notes de la p. 340. Il convient cependant de remarquer que Huygens et ses contemporains avaient compris (longtemps avant la découverte du „Traité de la Méthode" d'Archimède, nommé à la p. 192 du T. XIV) que les anciens se servaient aussi de méthodes analogues à celles de Cavalieri (voir la note 15 de la p. 5 du T. XII et la première ligne de la p. 753 du T. XIII).

[2]) Voir la note 1 de la p. 369, et le troisième alinéa de la note qui occupe la p. 471.

[3]) Comparez les p. 348—349.

[4]) L. Euler „Mechanica sive motus scientia analytice exposita", Petropoli, 1736. Voir la p. VII („Vorwort des Herausgebers") du „Tomus Primus" et la p. 3 („Præfatio" d'Euler) du „Tomus Secundus" de la nouvelle édition de cet ouvrage („Leonhardi Euleri Mechanica sive motus scientia analytice exposita edidit Paul Stäckel, Lipsiæ et Berolini", Teubner, MCMXII).

[5]) „Theoria Motvs Corporvm solidorvm sev rigidorvm", Avctore L. Evlero, Rostochii et Gryphiswaldiæ, A. F. Röse, MDCCLXV, p. 166, § 422: „Momentum inertiæ corporis respectu cujuspiam axis est summa omnium productorum, quæ oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur".

[PREMIÈRE PARTIE. STATIQUE.]

I [1]).

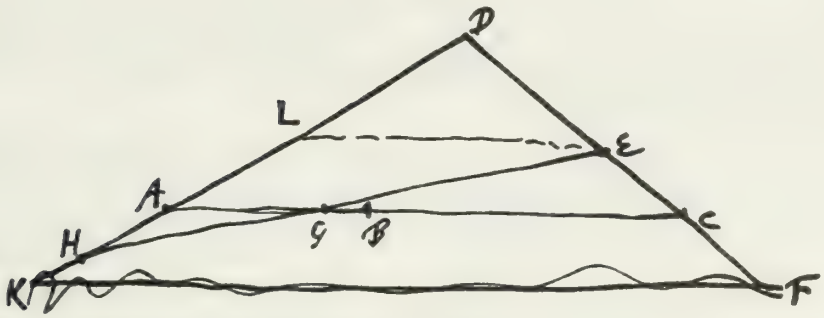
[1659.]

[Deux problèmes de 1659 ſur l'équilibre de différents poids ſuſpendus à des fils. Ce ſont les N°. 611 et 612 (p. 394 et 395) de notre Tome II].

II [2]).

[Oct. 1659] [3]).

[Fig. 1.]



1. AH ∾ EC [4]). HE, AC ſunt lineæ [5]) [Fig. 1].
Oſtendendum quod EG ——— GH = AD ——+—— DC [6]).
Sit EL parallela CA.

---

[1]) Manuscrit A, p. 90 et 92. On peut consulter sur ces mêmes problèmes la lettre de Huygens à D. Rembrandtz. van Nierop du 9 avril 1659 (p. 569—570 de notre T. VI), la réponse de van Nierop du 3 mai 1659 (p. 391—392 du T. II) et la réplique de Huygens du 10 mai 1659 (p. 571—573 du T. VI).

[2]) Manuscrit A, p. 156. Les §§ 1, 2, et 3 sont purement géométriques, mais le § 4 qui fait suite au § 3 traite un cas de statique.

[3]) La p. 155 porte la date du 11 oct. 1659 et la p. 157 est datée : oct. 1659.

[4]) Le signe ∾ indique l'égalité. Comparez la note 3 de la p. 7 du T. XI.

[5]) C. à d. des lignes droites.

[6]) C. à d. EG : GH = AD : DC. Comparez la note 19 de la p. 13 du T. XI.

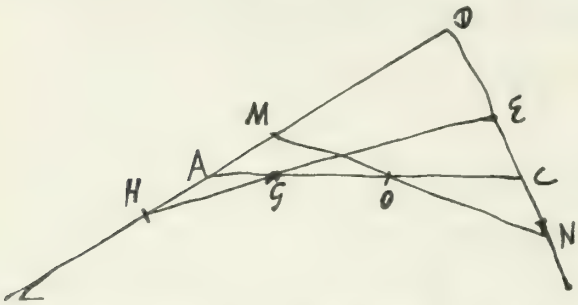
Ergo ut AD ad DC ita LD ad DE, et AL ad EC, ſive AL ad AH, nam AH ∞ EC.

Sed ut LA ad AH ita EG ad GH. Ergo EG ad GH ut AD ad DC. quod erat demonſtrandum.

2. Converſum quoque verum eſt; nempe ſi intra angulum ADE ducantur duæ HE, AC, fueritque ut AD ad DC ita EG ad GH, etiam HA, EC æquales erunt.

Nam quia ut AD ad DC ita AL ad CE, erit ergo AL ad CE ut EG ad GH, hoc eſt ut LA ad AH. ideoque EC æqualis AH.

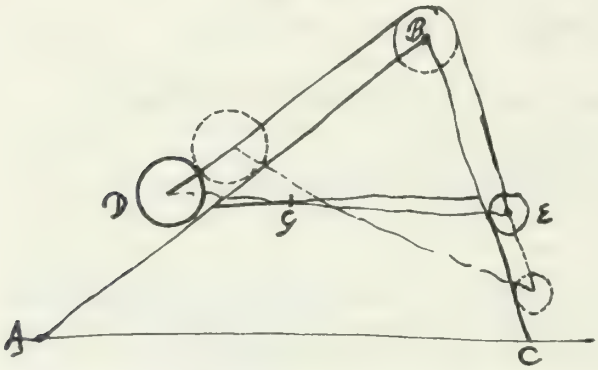
[Fig. 2.]



3. Secent rurſus ſe mutuo AC HE in G [Fig. 2], ſitque ut AD ad DC ita EG ad GH. Et ſumatur HM æqualis EN; et jungatur MN. dico eam ſecari à recta AC in O, ut ſit NO ad OM ſicut EG ad GH ſive ut AD ad DC.

Eſt enim AH ∞ EC per 2. Ergo has auferendo ab æqualibus HM, EN, relinquuntur æquales AM, CN. Ergo per 1. ut AD ad DC ita NO ad OM, ſive ut EG ad GH. quod erat oſtendendum.

[Fig. 3.]



[4.] Si fuerit triangulum ABC [Fig. 3] cujus latus AC horizonti parallelum, pendeantque ſuper ejus lateribus pondera fune colligata, D, E. quorum D ad E gravitas ſit ſicut latus AB ad BC; pondera quemcunque datum ſitum ſervabunt.

Quia centrum ipſorum gravitatis commune G non deſcendit etiamſi pondera moveri incipiant, ſed eadem ſemper manet altitudine, ut ex præcedentibus facile oſtenditur.

---

[1]) Manuscrit B, p. 123.

[2]) La p. 107 est datée: août 1662, et la p. 125 porte la date du 15 sept. 1662.

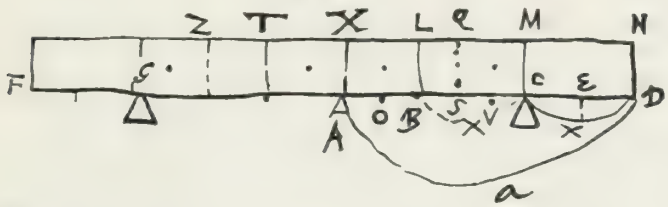
[3]) Il n'y a pas de „fulcrum" en ce point, comme la figure pourrait le faire croire. Lorsque plus

III [1]).

[1662] [2]).

Quæritur ubi ponenda fulcra G C ſub trabe FN [Fig. 4], ut tantundem ſit periculi rupturæ in A [3]) atque in C vel in G.

[Fig. 4.]



Sit DC ∞ x. AD vel AF ∞ a. Sit CB ∞ ∞ CD. Ergo pars BN cum æquilibret ſuper C, nequaquam incumbit medio A, ac ſimiliter pars TF. Sed ſola incumbit pars BT. Æquipollet autem pars BX ad rupturam faciendam in A non fultum parti QC ad rumpendum ſuper fulcrum in A, poſitis his partibus inter ſe æqualibus, quia ex utravis ruptura in C vel A par gravitatis fit deſcenſus [4]).

Ergo momentum ad rupturam in A fit multiplicando AB in diſtantiam OC. At momentum rupturæ in C, fit multiplicando CD in diſt. CE. quæ momenta æqualia eſſe oportet [5]).

Partis TB momentum ad faciendam rupturam in poſitis fulcris GC, idem eſt ac momentum duarum ſimul partium QC, ZG ſuper fulcro in A. Quarum unam QC tantum conſiderare opus ac ſi ad alteram partem A fulcri plane fixum eſſet libræ brachium [6]).

---

loin Huygens parle d'un „fulcrum in A", il s'agit d'un support imaginaire.

[4]) C. à d. (comparez la suite de cette Pièce) „posito angulo disjunctionis æquali". Huygens suppose que, lorsqu'une rupture se produit p. e. en MC, la partie MNDC de la poutre tourne autour de C d'un certain „angle de disjonction". Lorsque la rupture se produit en A, on peut considérer, si l'on veut, la rotation de la partie XNDA (ou de la partie XLBA) autour de C comme une rotation virtuelle. Par „gravitatis descensus" il faut entendre le produit du poids du corps considéré par la descente verticale de son centre de gravité. La thèse de Huygens (comparez la note 4 de la p. 383) d'après laquelle dans le cas considéré les deux ruptures en A et en C sont également probables lorsque le „travail" de la pesanteur est le même dans les deux cas, l'angle de disjonction (égal dans ce cas-ci à l'angle de rotation virtuelle; comparez la note 6) étant supposé le même, est correcte: ces „travaux" sont proportionnels aux moments de rupture. Si une rupture se produit en A, la demi-poutre AN aura la tendance de tourner autour du point C avec un moment égal à celui de la partie BX par rapport au point C, puisque le moment de la partie BN par rapport au point C est nul.

[5]) Les équations qui suivent expriment l'égalité de ces deux moments.

[6]) Si une rupture se produit en A et que les deux moitiés de la poutre descendent simultanément

$$\begin{array}{ll} & AB \infty a - 2x \\ & AO \infty \frac{1}{2}a - x \\ \text{ex} & AC \infty a - x \end{array} \Big\} \text{ s. [1]).}$$

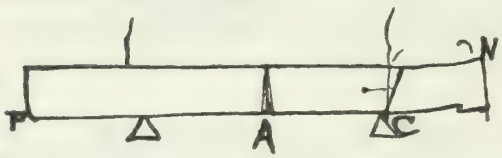
$$\begin{array}{ll} OC \infty AV \infty \frac{1}{2}a \\ AB \infty SC \infty a - 2x \end{array} \Big\} \text{ m. [2])} \qquad \begin{array}{ll} x & CD \\ \frac{1}{2}x & EC \end{array} \Big\} \text{ m.}$$

$$\frac{1}{2}aa - ax \qquad\qquad \frac{1}{2}xx$$

$$aa - 2ax \infty xx$$
$$\sqrt{2aa} - a \infty x$$

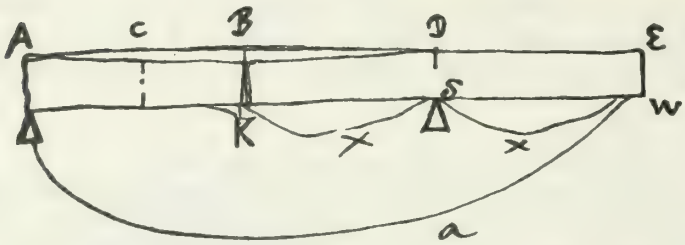
Ergo CD paulo major quam $\frac{1}{5}$ totius DF.

[Fig. 5.]



hic [Fig. 5] pofito angulo disjunctionis æquali confideravi defcenfum duarum medietatum trabis, facta ruptura in A [3]). Et partis CN cum rumpitur in C. convenit priori operationi.

[Fig. 6.]



Si AB ∞ BD ∞ ∞ DE [Fig. 6] non habebit AK tantum momenti ad rumpendum in K, ac DW ad rumpendum in S [4]). nam duo AK, KD duntaxat tantum habent momenti ad rumpendum in K [5]).

---

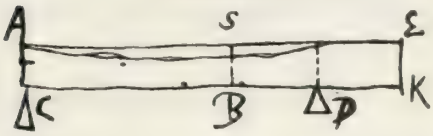
en tournant d'un même angle (infiniment petit) resp. autour des supports G et C, l'angle de disjonction sera le double de cet angle de rotation. Mais si la partie droite descend seule, l'angle de disjonction sera égal à l'angle de rotation, comme nous l'avons déjà dit dans la note 4.

[1]) s. = subtrahendo.

[2]) m. = multiplicando.

[3]) On peut en effet, au lieu de considérer le moment de la partie BX [Fig. 4] par rapport au point C, considérer directement le moment de la demi-poutre AN par rapport au point C: c'est le même moment sous une autre forme (comparez la note 4 de la p. 381).

[Fig. 7.]



pars AB [Fig. 7] ſolum gravitatem habet, reliqua BE nihil [6]). fulcra in C et D. quæritur ubi rumpi debeat CE. Reſp. ibi, ubi ſumto æquali angulo rupturæ, plurimum deſcendat gravitas compoſita è partibus ipſius AB [7]).

[4]) On trouve en effet que le moment de rupture en K est la moitié du moment de rupture en S. Si une rupture se produit en K, la partie AK aura la tendance de tourner autour du support gauche; si au contraire une rupture se produit en S, la partie DW tournera autour du support S. Le travail de la pesanteur est égal dans les deux cas en supposant les angles de rotation égaux, mais il n'est pas permis d'en conclure à l'égalité des moments de rupture : ce cas diffère du cas considéré à la p. 381 en ce que les parties AK et BW de la poutre exercent l'une sur l'autre dans la section BK une force verticale qui faisait défaut dans la section AX de la Fig. 4.

Néanmoins la règle indiquée dans la note 4 de la p. 381 est encore applicable au cas actuel, si l'on admet qu'en cas de rupture en A ce n'est pas la partie AK seule qui tourne d'un petit angle, mais que la partie BW tourne également (autour du point S) de telle manière que les deux parties continuent à cohérer au point B; l'angle de rotation de la partie AK est alors la moitié de l'angle de disjonction. Comparez les p. 335 et 336 de l'Avertissement qui précède.

[5]) C. à. d. le moment de DW par rapport à S est égal au moment de rupture qui existerait en K si la partie DW de la poutre était supprimée et que seule la partie AK, KD subsistait. En effet, dans ce dernier cas le moment de rupture en K serait égal au moment de la partie AK par rapport au support gauche, d'après les considérations de la p. 381. Mais, comme la partie DW existe, le moment en K doit avoir une valeur différente, que Huygens ne détermine pas.

[6]) C. à. d. la partie AB seule a un moment par rapport au point D, le moment de BE par rapport à D est nul.

[7]) Cette solution peut ne pas paraître évidente, mais le calcul la confirme. Si nous admettons, comme la figure l'indique, que CB = BK et BD = DK, nous pouvons poser CK = $2l$, CB = l, BD = DK = $\frac{1}{2}l$. Le moment de rupture à une distance x du point C est alors $\frac{P}{12l}(4lx-3x^2)$, où P est le poids de la poutre. Ce moment a une valeur maxima pour $x = \frac{2}{3}l$. Or, on trouve cette même valeur en appliquant la règle que Huygens énonce dans ce paragraphe. En effet, si une rupture se produit entre C et B de sorte qu'à une distance x du point C un angle de disjonction (infiniment petit) γ apparaît, les parties gauche et droite de la poutre, qui cohèrent encore en haut, auront tourné resp. autour de C et de D d'angles α et β, où $\alpha+\beta=\gamma$ et $\alpha x = \beta(1\frac{1}{2}l - x)$; il en résulte $\alpha = \frac{3l-2x}{3l}\gamma$ et $\beta = \frac{2x}{3l}\gamma$. Les centres de gravité des parties gauche et droite de la partie AB de la poutre sont descendus resp. de $\frac{1}{2}\alpha x$ et de $\beta(l-\frac{1}{2}x)$, et le travail correspondant de la pesanteur est le produit de $\frac{P}{2l}$ par $\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta(l-x)(l-\frac{1}{2}x)$, ce qui se réduit à $\frac{P\gamma}{12l}(4lx-3x^2)$. Ce travail est maximum pour $x = \frac{2}{3}l$. Comparez la démonstration plus générale donnée dans l'Avertissement (note 2 de la p. 335).

I [1].

24 Febr. 1659.

24 Febr. 1659.

Ex diverſis materijs, quarum inter ſe cognita ſit gravitas [2]) ſphæras conficere quæ per aerem aquamve æque cito decidant.

Sit data ſphæra AB [Fig. 1] v. gr. ex ligno cujus ad plumbum gravitas in aere ſe habeat ut *c* ad *d*. Oporteatque ex plumbo facere globum CD qui per aerem æque cito deſcendat atque ſphæra lignea AB.

[Fig. 1.]

ſit *b* gravitas ſphæræ AB.

$a^3 - x^3 - b \,/\, \frac{bx^3}{a^3}$ [3]) gravitas ſphæræ CD ſi eſſet è ligno.

$c - d - \frac{bx^3}{a^3}$ [3]) $/ \frac{dbx^3}{ca^3}$ gravitas ſphæræ CD ex plumbo.

gr. ſph. ad ſuperficiem ſuam ut grav. ſph. CD ad ſuperf. ſuam

$$b \text{ ———— } aa \text{ ———— } \frac{dbx^3}{ca^3} \text{ ———— } xx \text{ [4])}$$

$$bxx \infty \frac{dbx^3}{ca}$$

$$ca \infty dx$$

$$\frac{ca}{d} \infty x$$

Ergo ſicut gravitas plumbi ad gravitatem ligni ita ſit diameter ſphæræ ligneæ ad diametrum ſphæræ plumbeæ. hæc æque velociter atque illa decidet [5]).

---

[1]) Manuscrit A, p. 85. [2]) Dans cette Pièce, ce mot désigne tantôt le poids spécifique, tantôt le poids lui-même.

[3]) C. à. d. $a^3 : x^3 = b$: poids de la sphère CD en bois, donc ce dernier poids $= \frac{bx^3}{a^3}$.

[4]) C. à. d. $b : a^2 = \frac{dbx^3}{ca^3} : x^2$.

[5]) Comparez la note 1 de la p. 256 de ce Tome, où nous avons fait mention de la lettre de Huygens à Moray de 1661. Le même sujet fut discuté en 1662 dans la Correspondance avec Moray (voir les pp. 26, 35, 36, 46, 47, 60, 87 et 93 du T. IV).

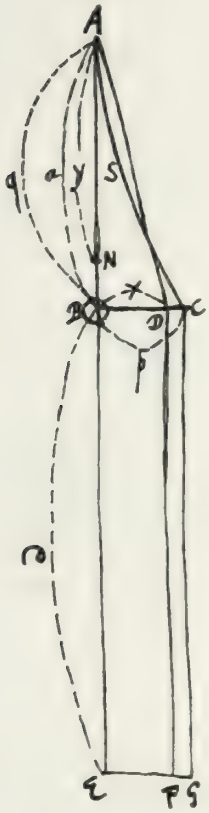
D'ailleurs déjà en 1646 Huygens s'était occupé de ce sujet (voir les p. 73—75 du T. XI) et les considérations qu'il expose contiennent implicitement le même résultat.

Sic, quoniam gravitas plumbi ad gravitatem ceræ eſt ut 828 ad 69, hoc eſt duodecupla; debebit diameter ſphæræ cereæ ad diametrum plumbeæ ſe habere ut 12 ad 1. gravitas ergo ut 144 ad 1, quoniam gravitas ſphæræ AB ad gravitatem ſphæræ CD eſt ut b ad $\frac{bdx^3}{ca^3}$, hoc eſt, (reſtituto valore x) ut ca^3 ad $\frac{dc^3a^3}{d^3}$ ſive ut dd ad cc.

Diameter cereæ ad diametrum marmoreæ eſſe debet ut $2\frac{2}{7}$ ad 1 ſive ut 16 ad 7, quia hæc ratio gravitatum. Ergo gravitas ſphæræ illius ad hujus gravitatem ut $5\frac{11}{49}$ ad 1.

Item quia ratio gravitatis ferri ſub aqua ad gravitatem marmoris ſub aqua ſe habet ut $2\frac{4}{5}$ ad 1, talis quoque ratio erit diametrorum in ſphæris æque cito per aquam deſcendentibus. ut nimirum major ſit marmorea.

[Fig. 2.]



II [1].

[1659] [2].

Virga ponderans AB cum appenſo in B pondere [Fig. 2] qua velocitate oſcillationes peragat? a repræſentat pondus virgæ AB [3], d refert pondus appenſum in B. p arbitraria longitudo. ASC parabola vertice A, q longitudo AB.

$$\frac{\frac{1}{2}ax + dx \infty \frac{1}{3}ap + dp \text{ [4]}}{x \infty \frac{\frac{1}{3}ap + dp}{\frac{1}{2}a + d} \text{ vel } \frac{2ap + 6dp}{3a + 6d}}$$

[1]) Manuscrit A, p. 177 et 178.

[2]) La p. 176 porte la date du 15 nov. 1659, et la p. 188 celle du 15 déc. 1659.

[3]) En choisissant convenablement la longueur qui représente l'unité de poids.

[4]) Il est possible que le feuillet précédent du Manuscrit A, que nous ne possédons plus (comparez la note 1 de la p. 318 de ce Tome),

$$p \text{———} \frac{\frac{1}{3}ap + dp}{\frac{1}{2}a + d} \text{———} q \left| \frac{\frac{1}{3}aq + qd}{\frac{1}{2}a + d} \infty\, y \right.$$ [1])

Ergo ut dimidia gravitas virgæ una cum appenſo pondere in B ad $\frac{1}{3}$ gravitatis virgæ una cum pondere in B, ita longitudo virgæ AB ad AN longitudinem penduli ſimplicis iſochroni virgæ cum appenſo pondere [2]).

---

contenait l'explication de ce calcul. D'ailleurs la p. 178 du Manuscrit (voir la suite de cette Pièce) donne également une partie de cette explication. Huygens suppose le pendule considéré en mouvement de telle manière que le point corporel B possède en son point le plus bas une vitesse qui lui permettrait d'atteindre une hauteur BC ou p s'il était libre. Cette hauteur est donc proportionnelle au carré de cette vitesse. Si l'on représente également par des lignes horizontales les hauteurs auxquelles pourraient s'élever les différents points pesants qui composent la barre AB, il est évident que les extrémités de ces lignes horizontales se trouveront sur la parabole considérée. Huygens part du principe que le centre commun de gravité doit monter autant dans le cas où tous les points sont libres que dans celui où ils composent un corps unique (comparez à ce propos l'alinéa qui commence en bas de la p. 415). De là il s'ensuit que, si l'on multiplie chaque hauteur par le poids correspondant, la somme sera la même dans les deux cas, bien entendu si les vitesses angulaires correspondant à la position verticale de la barre sont les mêmes dans les deux cas. Il en résulte que la surface ABC de la parabole (limite de la somme des produits des hauteurs par les poids), augmentée de la surface BCGE qui correspond au „pondus appensum", doit être égale à la surface du triangle ABD augmentée de celle du rectangle BDFE, où BD $= x$ représente la hauteur qu'atteignent en réalité le point B de la barre et le „pondus appensum". La ligne AD est bien une droite parce que les hauteurs auxquelles deux points de la barre s'élèvent simultanément sont proportionnelles à leurs distances du point A.

[1]) C. à. d. $p : x = q : y$, où y représente la longueur cherchée du pendule simple isochrone avec le pendule composé considéré. En effet, le point pesant du pendule simple isochrone et le point B décrivent des arcs semblables et le point pesant du pendule simple monte donc à une hauteur h déterminée par l'équation $h : x = y : q$; on en tire $h = \frac{xy}{q}$. Mais les vitesses angulaires du point B et du point pesant du pendule isochrone sont toujours les mêmes; les hauteurs auxquelles le point B supposé libre d'une part et le point pesant du pendule isochrone d'autre part peuvent monter en vertu des vitesses qu'ils possèdent au point le plus bas étant proportionnelles aux carrés de ces vitesses, seront donc aussi proportionnelles aux carrés de leurs distances à leurs points de suspension respectifs. On a donc $\frac{xy}{q} : p = y^2 : q^2$, ou $py = qx$, ce qu'il fallait démontrer. Huygens donne cette démonstration plus loin (voir la p. 417).

[2]) Pour $d = 0$, on trouve $y = \frac{2}{3}q$. Comparez la note 1 de la p. 388.

[3]) Lisez : $\frac{8}{9}q$.

[4]) Nous supprimons le calcul numérique. Lorsque le „pondus appensum" est 28 fois plus lourd que la barre et qu'on veut que le pendule composé soit isochrone avec un pendule simple de

Si $a \infty d$, fit $y \infty \frac{8}{9} a$ [3]).

[Fig. 2.]

$$\frac{\frac{1}{3}aq + qd}{\frac{1}{2}a + d} \infty y$$

$$\frac{1}{3}aq + qd \infty \frac{1}{2}ay + dy$$

$$q \infty \frac{1}{2}ay + dy \text{ per } \frac{1}{3}a + d$$

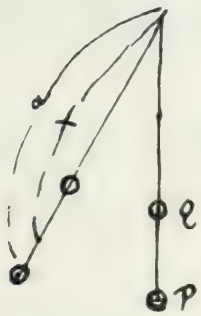
$$q \infty \frac{\frac{1}{2}ay + dy}{\frac{1}{3}a + d}$$

$$q \infty \frac{3ay + 6dy}{2a + 6d}$$

$a \infty 1$, $d \infty 28$, $y \infty 38$.

$$38\frac{19}{85} \infty q \text{ [4])}$$

[Fig. 3.]



$$\frac{acz}{x} + \frac{4}{9}\frac{acz}{x} \infty cz + \frac{2}{3}cz \quad \text{[Fig. 3] [5])}$$

$$\frac{13}{9}\frac{ac}{x} \infty \frac{5}{3}c$$

$$\frac{13}{3}a \infty 5x$$

$$13a \infty 15x$$

$$\frac{13}{15}a \infty x$$

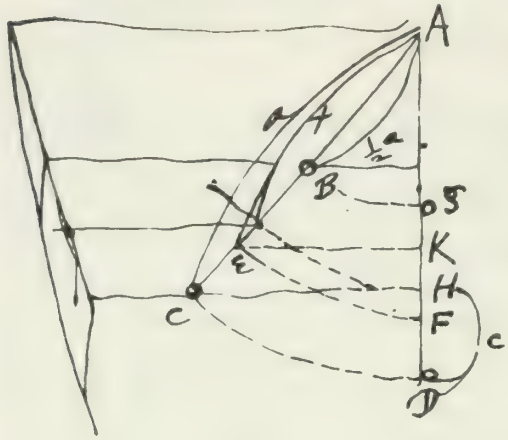
---

longueur 38, il faut donc donner au pendule composé une longueur $38\frac{19}{85}$. Le „pondus appensum" est considéré, tant ici que plus haut, comme un point matériel.

[5]) Huygens considère ici un pendule idéal dont le fil ou la barre est impondérable et porte deux

non ergo iſochrona ſunt pendula quorum alterum habet bina pondera æqualia in extrema parte, et triente ab extremo ut hic P, Q, alterum virgam æqualis ponderis cum pondere inferæ appenſo; licet virgæ centrum oſcillationis ſit $\frac{2}{3}$ à puncto ſummo [1]).

[Fig. 4.]



ABC [Fig. 4] eſt virga ſine pondere. AB ∞ BC. in B et C affixi ſunt globi æquales. quæritur cujus longitudinis pendulum oſcillationes æque veloces habiturum ſit cum pendulo ABC, bina pondera habente. ſit pendulum AE quod ſit ∞ ∞ $\frac{5}{6}$ penduli AC [2]). ad reſolvendum hoc problema imaginor globos C et B occurrere globis ſibi æqualibus D et S [3]). quo fiet ut pendulum poſt hunc occurſum omni motu privetur [4]). unde oportet D et S tanta vi percuti ut compoſitæ ex ijs gravitatis centrum aſcendat æque alte ac fuerat aſcenſurum ſi pendulum ABC motum continuaſſet; aſcendiſſet autem ad altitudinem ubi erat poſitis globis in B et C. Ergo percuſſorum globorum centrum gravitatis eo usque aſcendere debet. Duxi

points matériels de même poids, l'un en bas, l'autre un tiers de la longueur de la barre plus haut.

La longueur du pendule simple isochrone est appelée x. Le poids de chacun des points matériels s'appelle z. La hauteur que le poids P atteint réellement est désignée par la lettre c; la hauteur correspondante pour le poids Q est donc $\frac{2}{3}c$.

Si nous appelons p la hauteur que le poids P pourrait atteindre, s'il était libre, avec la vitesse qu'il possède au point le plus bas de sa course, on a d'après la première équation de la note 1 de la p. 386 $p : c = a : x$,
a étant la longueur de la barre impondérable comme on le voit dans la Fig. 3. On en tire

$$p = \frac{ac}{x}.$$

Pour le poids Q la hauteur correspondante est $\frac{4}{9}p$.

L'équation de Huygens exprime donc ici aussi que si l'on multiplie chaque hauteur par le poids correspondant, la somme sera la même dans le cas où tous les points sont libres que dans celui où ils composent un corps unique.

[1]) La dernière partie de cette phrase exprime le résultat trouvé dans le cas précédent lorsque le „pondus appensum" est supprimé (comparez la note 2 de la p. 386 et les p. 423 et 439).

igitur utrobique magnitudines in altitudines ad quas aſcendunt, unde ſummæ productorum utrobique æquales fieri debent [5]).

a —— $\sqrt{ax}$ —— celas CD [3]) liberi ∞ $b \Big/ \frac{b}{a}\sqrt{ax}$ cel. EF lib.

x —— a —— $\frac{b}{a}\sqrt{ax} \Big/ \frac{b}{x}\sqrt{ax}$ cel. CD coacti

qu. cel. CD lib. qu. cel. CD coacti alt. DH ad quam impellit C D lib.

bb —————— $\frac{bba}{x}$ —————— $c \Big/ \frac{ca}{x}$ altitudo ad quam impellit C D coact.

celeritas BO [3]) coacti eſt dimidia celeritatis CD coacti [5]).

---

[2]) C'est le résultat du calcul qui suit.

[3]) Dans la fig. 4 D et S désignent, comme l'on voit, deux globules contre lesquels les globules C et B vont choquer, tous les globules étant égaux entre eux. „Celeritas CD" désigne la vitesse que le globule C communique au globule D. De même „celeritas BS" serait la vitesse que le globule B communique au globule S. Mais Huygens écrit par inadvertance „celeritas BO" au lieu de „celeritas BS" et désigne encore une fois le globule S par la lettre O. La lettre S de la Fig. 4 a d'ailleurs plus ou moins la forme d'une lettre O corrigée en S.

[4]) Comparez la „Prop. prima" de la p. 33.

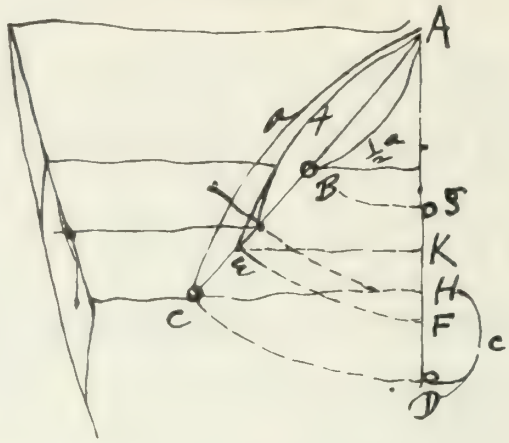
[5]) C'est ce qu'exprime l'équation $\frac{caz}{x} + \frac{\frac{1}{4}caz}{x} = cz + \frac{1}{2}cz$ qui suit. Cette équation correspond à celle du cas précédent représenté par la Fig. 3; seulement comme le poids supérieur se trouve cette fois, non pas à un tiers de la longueur du pendule mais au milieu du fil ou de la barre impondérable, le facteur $\frac{4}{9}$ du premier membre est remplacé ici par $\frac{1}{4}$ et le facteur $\frac{2}{3}$ du second membre par $\frac{1}{2}$. Supposer, comme Huygens le fait ici, que les globules B et C viennent choquer contre d'autres globules égaux et libres en leur communiquant toute leur vitesse, cela revient évidemment au même que de supposer que les globules B et C eux-mêmes sont mis en liberté au point le plus bas de leur parcours. Mais Huygens dérive ici l'expression $\frac{ca}{x}$ que l'on rencontre dans cette formule par un raisonnement différent de celui que nous avons suivi dans la note 5 de la p. 387 et qui correspondait à celui de Huygens dans le cas de la Fig. 2.

Voici le nouveau raisonnement. Comme AE ou AF représente la longueur x du pendule simple isochrone avec le pendule considéré, le temps d'une oscillation est le même pour le point E qu'il soit „liberum" ou „coactum", c. à.d. libre ou attaché au pendule composé. L'expression „celeritas EF lib.", égale à ce qu'on peut appeler la „celeritas EF coacti", désigne la vitesse que le point E possède en atteignant l'endroit F. „Celeritas CD liberi"

altitudo ad quam impellit B O [1]) coactum [2]) erit $\frac{1}{4}\frac{ca}{x}$.

z pondus utriusvis globi.

[Fig. 4.]



$$\frac{caz}{x} + \frac{\frac{1}{4}caz}{x} \infty cz + \frac{1}{2}cz \text{ [3])}$$

$$\frac{5}{4}\frac{ca}{x} \infty \frac{3}{2}c$$

$$10a \infty 12x$$

$$5a \infty 6x$$

$$\frac{5}{6}a \infty x$$

la vitesse que posséderait à l'endroit D le globule C, si AC était lui aussi un pendule simple. On aura:

$$\sqrt{a} : \sqrt{x} = \text{cel}^{\text{as}} \text{ CD liberi} : \text{cel}^{\text{as}} \text{ EF liberi},$$

ce qu'on peut écrire si l'on veut (comparez la note 1 de la p. 300)

$$a : \sqrt{ax} = b : \text{cel}^{\text{as}} \text{ EF liberi},$$

en désignant par b la „cel^{as} CD liberi". On en tire

$$\text{cel}^{\text{as}} \text{ EF liberi} = \frac{b}{a}\sqrt{ax},$$

donc aussi

$$\text{cel}^{\text{as}} \text{ EF coacti} = \frac{b}{a}\sqrt{ax}.$$

Mais la figure fait voir que

$$\text{cel}^{\text{as}} \text{ EF coacti} : \text{cel}^{\text{as}} \text{ CD coacti} = x : a.$$

On en tire

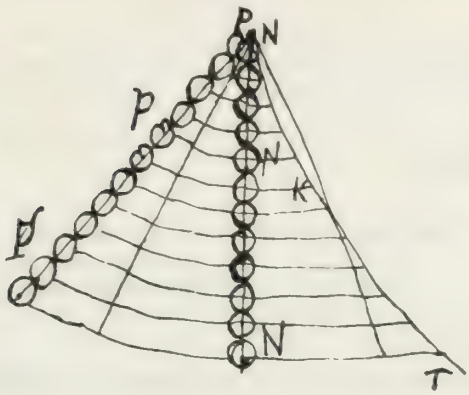
$$\text{cel}^{\text{as}} \text{ CD coacti} = \frac{b}{x}\sqrt{ax}.$$

„Altitudo ad quam impellit C D lib." veut dire: la hauteur à laquelle D parvient après avoir reçu de C la „cel^{as} CD liberi"; „altitudo ad quam impellit C D coact." veut dire: la hauteur à laquelle D (qui est toujours libre) parvient après avoir reçu de C la „cel^{as} CD coacti". On a donc

$$(\text{cel. CD lib.})^2 : (\text{cel. CD coacti})^2 = \text{la première hauteur} : \text{la deuxième}.$$

Or la première hauteur n'est autre que celle dont le globule C, parvenu en D, est descendu; c'est la hauteur DH ou c. On a donc:

[Fig. 5.]



altitudines ad quas aſcendent globi NNN [Fig. 5] impulſi a globis PPP, erunt ad parabolam aliquam PKT cujus vertex in P. Ex eo quod $\frac{ca}{x}$ inventa eſt altitudo [Fig. 4] ad quam impellit C D coactum [4]). nempe coactum incedere celeritate [5]) penduli AE ∞ x [6]).

$b^2 : \frac{b^2 a}{x} = c$: la hauteur à laquelle D parvient avec la „cel. CD coacti".

Cette dernière hauteur est donc $\frac{ca}{x}$, ce qu'il fallait trouver.

[1]) Voir la p. 389, note 3.

[2]) „Altitudo ad quam impellit B O coactum" (comparez la note 4 de la p. 389) désigne la hauteur à laquelle le globule B „coactum" fait monter par son choc le globule O (ou plutôt S, voir la note 3 de la p. 389) qui est toujours libre.

[3]) Voir la p. 389, note 5.

[4]) Comparez la note 2 qui précède. C'est le globule C qui est „coactum" et qui donne sa vitesse au globule D qui est libre.

[5]) Vitesse angulaire.

[6]) Voir pour la signification de x, de c et de a la Fig. 4. L'expression $\frac{ca}{x}$ déduite plus haut est indépendante, comme le montre cette déduction, de la distribution des poids du pendule composé linéaire. Dans la figure qui accompagnait cette déduction, le globule C était placé tout en bas du pendule composé, mais le raisonnement reste entièrement le même si l'on considère un globule placé plus haut. Or, dans la formule $\frac{ca}{x}$ la longueur x est une constante, pour un pendule composé donné, mais lorsque la distance a du globule considéré au point de suspension varie, la longueur c variera dans le même rapport, de sorte que le produit ca, et la hauteur $\frac{ca}{x}$, seront proportionnels au carré de la distance du globule considéré au point de suspension. Si l'on suppose tracées dans la figure dans le sens horizontal les hauteurs $\frac{ca}{x}$, chacune à partir du globule N correspondant, les extrémités se trouveront donc sur une parabole. C'est la parabole déjà tracée dans la Fig. 2 de la p. 385 au début de cette Pièce.

III [1]).

[1659] [2]).

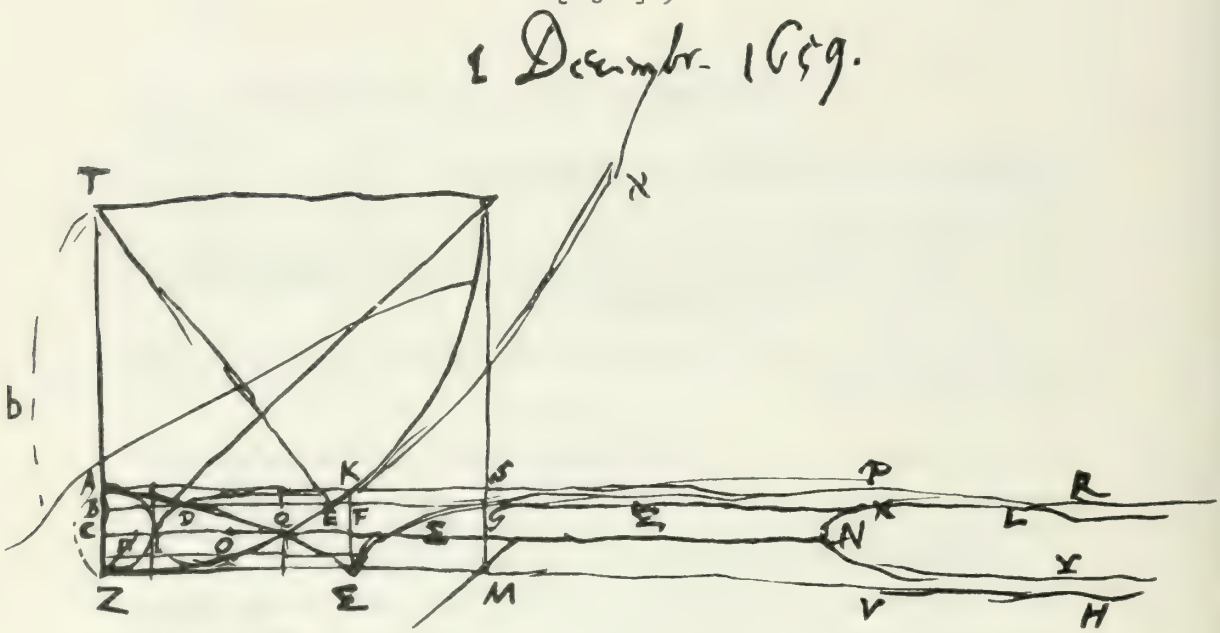
[Première Partie] [3]).

1 Decembr. 1659.

Hinc data fuit occaſio inventi de Cycloide.

Quæritur quam rationem habeat tempus minimæ oſcillationis penduli ad tempus caſus perpendicularis ex penduli altitudine [4]).

[Fig. 6.] [5])



[1]) La Pièce, qui traite du tautochronisme de la cycloïde, est empruntée aux p. 72—74 du Recueil „Chartæ Mechanicæ" (la numération des feuilles de ce Recueil date de 1928) et aux p. 187—188 du Manuscrit A.

Elle a été publiée par l'un de nous avec une traduction néerlandaise („De Ontdekking van het Tautochronisme der Cycloidale Valbeweging, eene bijdrage tot de 300e herdenking van den geboortedag van Christiaan Huygens op 14 April 1929", door E. J. Dijksterhuis, Euclides, Afl. 5, jaargang 1928/29, P. Noordhoff, Groningen); dans cette publication on retrouvera les figures de Huygens, mais plus correctement dessinées.

Tempus per particulam E [6]), ex K cadentis [Fig. 6], eſt ad tempus per particulam B cum celeritate ex AZ in ratione composita ex longitudine E ad B, hoc eſt ex ratione TE ſeu GB ad EB, et ex ratione ZΣ ſeu BF ad BΔ [7]), quæ ratio compoſita eſt quæ ▭ GBF ad ▭ EBD.

Ut ▭ EBD ad ▭ FBG ita BF ad BX, unde ut omnes BX ad omnes BF ita tempus per KZ ad tempus per AZ cum celeritate ex AZ [8]). Et tempus per KZ

---

[2]) La Première et la Cinquième Partie de cette Pièce ont été datées par Huygens.

[3]) „Chartæ Mechanicæ", p. 72 recto. Outre le texte imprimé ici la feuille contient différents calculs biffés qui nous paraissent étrangers au problème de la cycloïde.

[4]) Il apparaît donc que c'est la considération de la période d'une oscillation suivant un très petit arc de cercle qui a conduit aux recherches dont est sorti la découverte du tautochronisme de la chute suivant des arcs cycloïdaux.

Galilée s'était déjà sérieusement occupé du mouvement d'un corps grave suivant une circonférence de cercle verticale; voir la Giorn. III des „Discorsi", surtout la Prop. XXXVI (Ed. Naz. VIII, p. 261 et suiv.). À la p. 73 verso des „Chartæ mechanicæ" Huygens se propose de calculer le temps d'une oscillation circulaire de 180°, mais sans succès; il remarque: „Quæritur tempus per quadrantem circumferentiæ quod dubito an inveniri possit". Il ne réussit que plus tard à trouver une solution approchée de ce problème (voir le début de la Pars Prima de l'„Horologium oscillatorium").

[5]) Dans la Fig. 6 T est le centre et TZ le rayon d'un quart de circonférence, K un point quelconque de ce dernier. L'arc ZK de la circonférence est censé coïncider avec l'arc ZK d'une parabole ZKN à sommet Z et „latus rectum" 2TZ. AQΣ est une parabole congruente avec la parabole ZKN ayant son sommet en A. La genèse des autres courbes de la figure est expliquée dans le texte.

[6]) E est une partie infiniment petite de l'arc KZ, B sa projection sur AZ. L'auteur compare le temps t_1 d'une chute suivant E, lorsque le mobile part de K avec une vitesse nulle, avec le temps t_2 correspondant à un mouvement uniforme suivant B d'un point possédant une vitesse égale à celle que possède en Z un mobile tombant parti de A avec une vitesse nulle. Nous désignerons cette dernière vitesse par v_z.

[7]) Il faut lire: BD. Voir le premier Théorème de la Deuxième Partie qui suit (note 2 de la p. 398).

[8]) L'auteur introduit donc une ordonnée BX telle que $\frac{t_1}{t_2} = \frac{BX}{BF}$ (voir sur les temps t_1 et t_2 la note 6). Par conséquent, si l'on considère les éléments successifs B comme égaux entre eux, de sorte que t_2 est une constante, les ordonnées BX mesureront les temps t_1. Le temps de la chute suivant KZ, considéré comme la somme des temps t_1, sera donc représenté par la surface ASPR..NΥ..HVZA [Fig. 6] considérée comme la somme de toutes les ordonnées BX. On a par conséquent

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{t_2\,(\text{c. à. d. temps de parcours d'un élément déterminé B avec la vitesse } v_z)} = \frac{\text{omnes BX}}{\text{BF}}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z}{t_2} = \frac{\text{omnes BF}}{\text{BF}};$$

donc

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z} = \frac{\text{omnes BX}}{\text{omnes BF}} = \frac{\text{surf. AR..N..HZA}}{\text{▭ KZ}}.$$

ad tempus per AZ [1]) ut ſpatium infinitum [2]) ASPRLNYHVMZA ad 2 $\square$ KZ [3]).

$$\text{CO} \text{———} \text{CG} \text{———} \text{CF} \text{———} \text{CN}\ ^{4)} \qquad \text{CO} \infty \tfrac{1}{2}\,\text{CF}$$

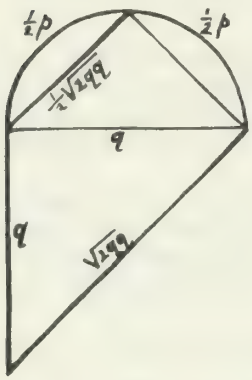
ergo CN ∞ 2BG.

ſit AZ ∞ c CF CN ∞ 2BG CI

ZM, TZ ∞ b. $\sqrt{2bc}$ ——— $2b$ ——— $\frac{1}{2}c \,\Big/\, \frac{bc}{\sqrt{2bc}}$ [5])

ſive $\sqrt{\frac{1}{2}bc}$ hæc eſt ipſa CO ∞ $\frac{1}{2}$ CF.

conſideratur AK applicata in circumferentia tanquam æqualis applicatæ in parabola ZK$\aleph$, cujus $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, cui eadem eſt parabola AQΣ. hoc eſt ſupponitur AK ∞ ZΣ [6]).



CΠ

p q ——— $\frac{1}{2}c \,\Big/\, \frac{\frac{1}{2}cq}{p}$

CI CF CΠ [7])

$\frac{1}{2}c$ ——— $\sqrt{2bc}$ ——— $\frac{\frac{1}{2}cq}{p} \,\Big/\, \text{aliud} \square \frac{q\sqrt{2bc}}{p}$ } m.

2

$\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$

CN

$2b$ ——— $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$

---

[1]) In margine: „tempus per AZ est æquale tempori motus æquabilis per AZ cum $^1/_2$ celeritate ex AZ".

[2]) C. à. d. un espace qui s'étend jusqu'à l'infini.

[3]) En effet, on a

$$\frac{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z \text{ (note 6 de la p. 393)}}{\text{temps de parcours de AZ lorsque le mobile tombant part du repos en A}} = \frac{1}{2}$$

(Galilée, De Motu Accelerato, Prop. I. „Discorsi", Giorn. III. Ed. Naz. VIII, p. 208).

[4]) F et G doivent être considérées ici comme des lettres courantes: lorsque B vient en C, F et

G seront les intersections de CN avec KΣ et SM respectivement.

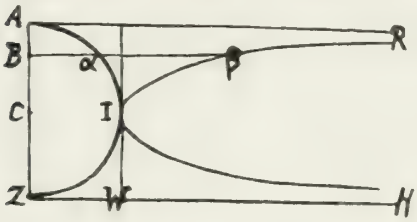
La définition de BX (note 8 de la p. 393), appliquée au point C au lieu de B, donne $\frac{CQ^2}{CF \cdot CG} = \frac{CF}{CN}$, où $CQ^2 = \frac{1}{2} Z\Sigma^2 = \frac{1}{2} CF^2$. Il s'ensuit que $CN = 2CG$.

Quant au raisonnement du texte, il faut l'entendre comme suit. Une droite CO est construite comme troisième proportionnelle à CF et à CQ. De $\frac{CQ^2}{CF^2} = \frac{1}{2}$, on tire donc $CO = \frac{1}{2} CF$. Dans la suite aussi l'auteur construit souvent des lignes ne servant qu'à représenter des expressions composées ayant la dimension d'une longueur (telles que l'expression $\frac{CQ^2}{CF}$ dans le cas considéré).

5) Dans la suite, aucun usage n'est fait de cette relation.

6) On vérifiera aisément que cette supposition revient à celle-ci: la circonférence (T; TZ) oscule en Z la parabole ZKN.

7) Dans ce qui suit l'auteur fait usage de la courbe à sommet I (voir la Fig. 6 et la Fig. ci-jointe).



La genèse de cette courbe est expliquée dans la quatrième Proposition de la Deuxième Partie de cette Pièce, à laquelle nous empruntons dès maintenant ce qui suit: $B\alpha$ étant une ordonnée quelconque de la demi-circonférence AZ, on détermine $B\beta$ de telle manière que

$$\frac{B\alpha}{CI} = \frac{CI}{B\beta}.$$

La Proposition citée dit en outre que la surface comprise entre la courbe ainsi construite, les asymptotes AR, ZH et la droite AZ est à celle du rectangle AW dans un rapport égal à celui de la demi-circonférence p au diamètre q.

Appelant cette surface O_2 et le „spatium infinitum" AR..N..HZA, considéré plus haut [Fig. 6], O_1, nous savons (voir la note 3, et la note 8 de la p. 393):

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{\text{temps de parcours de AZ, lorsque le mobile tombant part du repos en A}} = \frac{O_1}{2\square KZ}$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, $\frac{O_2}{\square AW} = \frac{p}{q}$.

Remplaçons $\frac{O_1}{2\square KZ}$ par $\frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{\square AW} \cdot \frac{\square AW}{2\square KZ}$ (1).

On peut remarquer que les ordonnées correspondantes BX et $B\beta$ sont dans un rapport constant, égal à celui des surfaces O_1 et O_2. En effet, suivant la troisième Proposition de la Deuxième Partie, on a la relation $\frac{BE \cdot BD}{CQ^2} = \frac{B\alpha}{CI}$,

de sorte que $$BX = \frac{BF^2 \cdot BG}{BE \cdot BD} = \frac{BF^2 \cdot BG \cdot CI}{CQ^2 \cdot B\alpha},$$

tandis que $$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}.$$

Dans le rapport $\frac{BX}{B\beta}$ la seule grandeur variable, $B\alpha$, disparaît. Pour déterminer ce rapport nous prenons le point B en C; il s'ensuit que $\frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI}$. L'équation (1) nous donne alors

$$\frac{O_1}{2\square KZ} = \frac{CN}{CI} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{CI}{2AK} = \frac{CN \cdot p}{q \cdot 2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p} \cdot AK},$$

où $AK = \sqrt{AZ \cdot 2TZ}$, si l'on considère AK comme ordonnée de la parabole ZKN. Puisque $TZ = b$ et $AZ = c$, on trouve en effet pour le rapport cherché la valeur $2b : \frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$.

Chez Huygens le raisonnement n'est pas absolument le même: il se conforme évidemment aux règles de la théorie des rapports suivant Euclide, telles qu'on les trouve dans le Cinquième Livre des Éléments. Suivant cette théorie la transformation des équations doit s'accomplir en appliquant la conclusion δι'ἴσου („ex aequo" ou „ex aequali") — Euclide V, 23 — d'après laquelle on dérive des équations

$$\begin{cases} a : b = c : d \\ b : e = d : f \\ e : g = f : h \end{cases}$$

l'équation $a : g = c : h$.

Or, on sait
$$\begin{cases} O_1 : O_2 = CN : CI \\ O_2 : \square AW = p : q \\ \square AW : \square KZ = CI : CF. \end{cases}$$

Pour tirer de ces équations une nouvelle équation „ex aequo", il faut d'abord transformer la deuxième équation de telle manière que son troisième terme devienne CI ou $\frac{1}{2}c$. C'est ce qu'on obtient en posant $p : q = \frac{1}{2}c : C\Pi$ d'où l'on tire $C\Pi = \frac{\frac{1}{2}cq}{p}$.

Il faut ensuite transformer la troisième équation de telle manière que son troisième terme devienne CΠ. On pose donc

$$CI : CF = C\Pi : \text{une quatrième longueur.}$$

Cette dernière est multipliée par 2, puisqu'il s'agit de comparer O_1 avec $2\square KZ$ (non pas avec $\square KZ$); on obtient ainsi $\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$. Le rapport cherché devient maintenant „ex aequo"

$$CN : \frac{2q\sqrt{2bc}}{p}.$$

Nous avons donc expliqué la signification de toutes les proportions qu'on trouve dans le texte.

ita erit ſpatium infinitum vertice N ad duplum ▭ KZ, hoc eſt ita tempus per KZ ad tempus per AZ.

ſed tempus per AZ eſt ad tempus per TZ ut $\sqrt{2bc}$ ad $\sqrt{2bb}$ [1]) hoc eſt ut $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$

Ergo ex æquo tempus per KZ arcum ad tempus per TZ ut $2b$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$ ſive ut b ——— $\frac{q}{p}\sqrt{2bb}$ hoc eſt ut p ——— $\sqrt{2qq}$. hoc eſt ut quadrans circumferentiæ ad ſuam ſubtenſam.

Quum AZ pro arbitrio ſumta ſit, fiatque ſemper tempus per KZ ad tempus per TZ ut p ad $\sqrt{2qq}$. ponendo nempe puncta K et E eſſe in parabola cujus vertex Z, $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, hinc vidi opus eſſe, ſi curvam velimus per cujus arcus quosvis in Z terminatos, tempora deſcenſus ſint æqualia, ut ſit ejus naturæ, ut quemadmodum ET curvæ perpendicularis ad applicatam EB, ita faciendo rectam datam ut GB ad aliam EB, cadat punctum E in parabolam vertice Z. Hoc autem Cycloidi convenire inveni ex cognita tangentis ducendæ ratione [2]).

---

[1]) D'après la Prop. I du traité „De Motu Accelerato" de Galilée („Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 208).

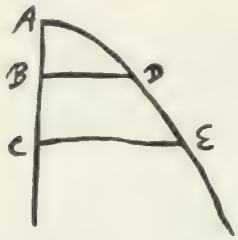
[2]) Ce dernier alinéa contient la découverte du tautochronisme de la chute cycloïdale. L'auteur observe que le résultat obtenu serait exact, si le point E se trouvait réellement sur la parabole ZKN et non pas sur la circonférence de cercle. Or, dans le cours du raisonnement E n'a été considéré qu'une seule fois comme un point de cette circonférence, savoir là où le rapport des éléments E et B (voir la note 6 de la p. 393) a été remplacé par $\frac{TE}{BE}$ ou $\frac{GB}{BE}$. Lorsqu'on substitue une autre courbe à la circonférence de cercle, de sorte que TE représente la normale en E, limitée par la verticale passant par Z, on n'aura plus TE = la longueur constante GB.

Mais si l'on pose $\frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$ (GB étant une longueur constante donnée), où BE' correspond à la „alia BE" du texte, et que E' est situé exactement sur la parabole ZKN, le raisonnement du texte reste valable en entier et le tautochronisme trouvé devient un tautochronisme exact.

Huygens remarque qu'il en sera ainsi, lorsque le point E se trouve sur une cycloïde (voir la cinquième Proposition de la Deuxième Partie qui suit).

[Deuxième Partie] [1]).

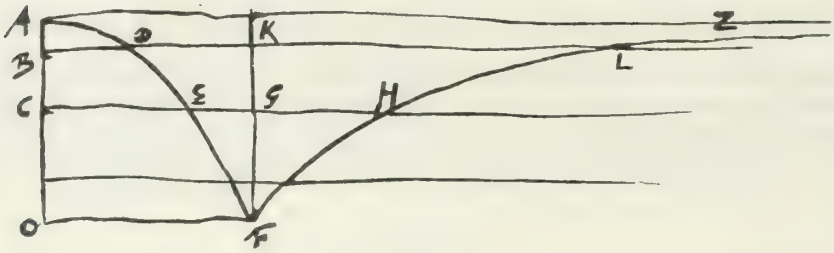
[Fig. 7.]



Sine quibus motus æquabilis in cava cycloide inveniri non poterat.

velocitates gravis cadentis ex A per AC [Fig. 7], esse in punctis singulis B, C, sicut applicatæ in parabola BD, CE [2]).

[Fig. 8.]



Tempora quibus grave ex A cadens [Fig. 8] particulas æquales conficit, puta in B et C, esse inter se sicut applicatæ BL, CH in curva FHL, ejus naturæ ut semper sint continue proportionales BD, BK, linea certa, et BL [3]).

Dictæ curvæ spatium infinitum OFHLZA esse duplum rectanguli AF [4]).

---

[1]) Chartæ Mechanicæ" p. 73 recto.

[2]) Cette Proposition est facile à démontrer: d'une part dans la parabole les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses, d'autre part les distances parcourues par un mobile tombant à partir du repos sont proportionnelles aux carrés des temps, donc aussi aux carrés des vitesses.

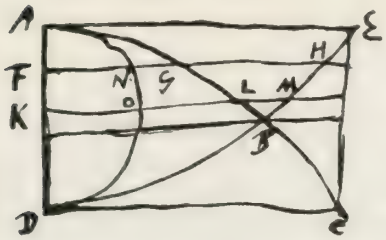
[3]) Comme BK est une constante, tout aussi bien que la „linea certa", la Proposition dit que BL est inversement proportionnelle à BD. Cette Proposition est une conséquence de la précédente. En effet, puisque les temps considérés sont inversement proportionnels aux vitesses, ils le sont aussi aux ordonnées correspondantes de la parabole. C. à. d. on a BL . BD = CH . CE, etc.

[4]) En effet, on a

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{temps de la chute suivant AO d'un mobile partant du repos}}{\text{temps de parcours de AO avec la vitesse constante } v_0 \text{ [vitesse finale de la chute suivant AO]}} =$$

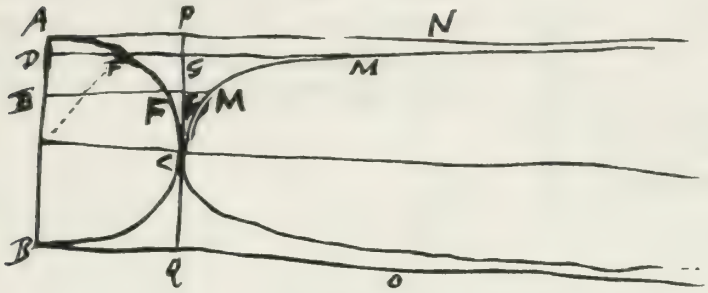
$$\frac{\text{omnes BL}}{\text{omnes OF}} = \frac{\text{surf. OFHLZA}}{\text{surf. } \square\text{AF}}.$$

[Fig. 9.]



Si ſint duæ ſemi-parabolæ [Fig. 9] quæcunque ad eundem axem ſed contrario ſitu, ut ABC, DBE, et ducantur applicatæ communes FGH, KLM, eandem eſſe rationem rectanguli HFG ad MKL quæ eſt partium dictarum applicatarum, ſemicirculo ſuper AD interceptarum, nempe quæ NF ad OK [5]).

[Fig. 10.]



Si ſemicirculum ACB [Fig. 10] tangat in vertice recta PCQ, ductisque ordinatis DFG, fiat ſicut DF ad DG ita hæc ad DM Eſſe ſpatium inter curvam CMM et aſymptotos ejus NA, OB, rectamque AB interjectum ad rectangulum AQ, ut ſemiperipheria ACB ad rectam AB [6]).

Si PQ diſtet a vertice C; tamen ſpatium curvæ quæ tunc orietur datum eſſe, poſita ſcilicet quadratura circuli [7]).

---

[5]) On a en effet $$\frac{FG \,.\, FH}{KL \,.\, KM} = \frac{\sqrt{AF \,.\, DF}}{\sqrt{AK \,.\, DK}} = \frac{FN}{KO}.$$

[6]) Nous émettons l'hypothèse suivante sur la méthode de démonstration de ce théorème par Huygens. Comparons les temps dans lesquels un mobile parcourt d'une part la demi-circonférence, d'autre part le diamètre AB, avec la même vitesse constante; ces temps seront entre eux comme p (la demi-circonférence): q (le diamètre). Or, on trouve une autre expression du même rapport en comparant un élément F de l'arc AB avec sa projection D sur le diamètre AB et en remarquant que

$$\frac{\text{le temps de parcours de F}}{\text{le temps de parcours de D}} = \frac{VF}{DF} = \frac{CV}{DF} = \frac{DM}{VC},$$

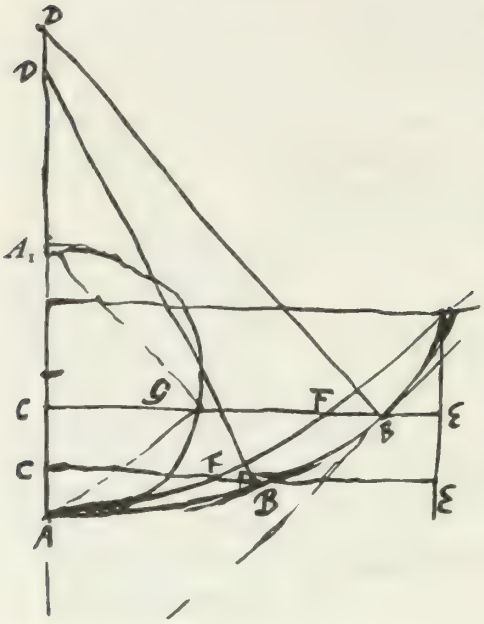
V étant le centre de la circonférence de cercle.

On en conclut, comme dans la note 8 de la p. 393, que

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{le temps de parcours de la demi-circonférence AB}}{\text{le temps de parcours du diamètre AB}} = \frac{\text{omnes DM}}{\text{omnes VC}} = \frac{\text{surf. ANMCOQBA}}{\text{surf. } \square \text{AQ}}.$$

[7]) Ce cas se présente dans la Fig. 6. Le „spatium infinitum" AR .. NT .. HZA est un „spatium datum"; c. à. d. une surface de grandeur calculable.

[Fig. 11.][1])



Curvam AB [Fig. 11] quæ ſit ejus naturæ, ut ductâ ipſi BD ad ang. rectos, quæ occurrat axi AD in D, faciendoque ut BD ad applicatam ordinatim BC, ita ſit recta quævis EC ad CF in eadem ordinata ſumptam, ſit FFA parabola; eam curvam eſſe Cycloidem [2]).

[1]) Nous avons ajouté à la Fig. 11 les lettres A_1 et G.

[2]) Considérons cette Proposition conjointement avec la remarque qui clôt la Première Partie de cette Pièce (voir la p. 397); tandis que l'auteur disait à cet endroit que la cycloïde possède la propriété en question, il avance ici qu'une courbe possédant cette propriété est nécessairement une cycloïde. Il peut avoir démontré la vérité du premier théorème de la façon suivante. AA_1 étant le cercle générateur de l'arc de cycloïde ABB [Fig. 11], et B un point quelconque de cet arc correspondant à la normale BD, on a suivant la propriété bien connue des tangentes à la cycloïde (voir à la p. 374 et suiv. du T. XIV la démonstration de Huygens): BD est parallèle à GA_1, lorsque BG est horizontale (parallèle à la tangente au point A_1 à la circonférence AA_1) et que G se trouve sur la circonférence AA_1. Par conséquent $\frac{BD}{BC} = \frac{A_1G}{CG} = \frac{AG}{AC}$. Or, si l'on prend F de telle manière que $\frac{BD}{BC} = \frac{CE}{CF}$, où CE est une longueur constante arbitraire, il s'ensuit que $\frac{AG}{AC} = \frac{CE}{CF}$ ou bien $CF^2 = \frac{AC^2 . CE^2}{AG^2} = \frac{AC^2 . CE^2}{AA_1 . AC} = \frac{CE^2}{AA_1} AC$, d'où l'on conclut que le lieu des points F est une parabole.

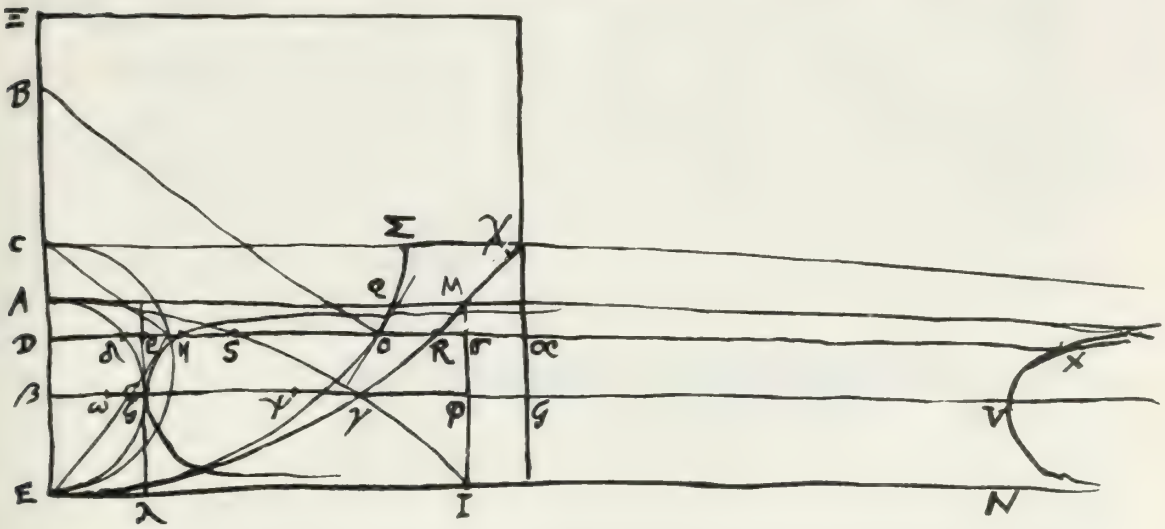
Quant au second théorème, Huygens peut l'avoir établi comme suit, en commençant par admettre que la courbe considérée possède le sommet A et l'axe de symétrie AD.

Le „latus rectum" de la parabole qui doit provenir de la construction étant p, prenons une longueur AA_1 telle que $CE^2 = p . AA_1$; puisse le cercle à diamètre AA_1 engendrer une cycloïde en roulant sur une perpendiculaire en A_1 à l'axe AD. La tangente au point d'intersection de cette cycloïde avec le prolongement de CG est parallèle à AG. Mais la tangente en B

[Troisième Partie.] [3])

Sed ſpatium infinitum $\zeta\eta$ eſt ad $\square$ Aλ ut ſemicircumferentia AζE ad AE, hoc eſt (ſi fiat ut $\frown$ AζE ad AE ita $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$) ut $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$. Ergo ex æquo erit ſpatium infinitum VX ad $\square$ Aλ ut Vβ ad $\beta\omega$ hoc eſt ut $2b$ ad $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. nam Vβ eſt ∞ $2b$ et $\beta\omega$ ∞ $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. ſit ut $\square$ Aλ ad $\square$ AI, hoc eſt ut $\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$

[Fig. 12.]

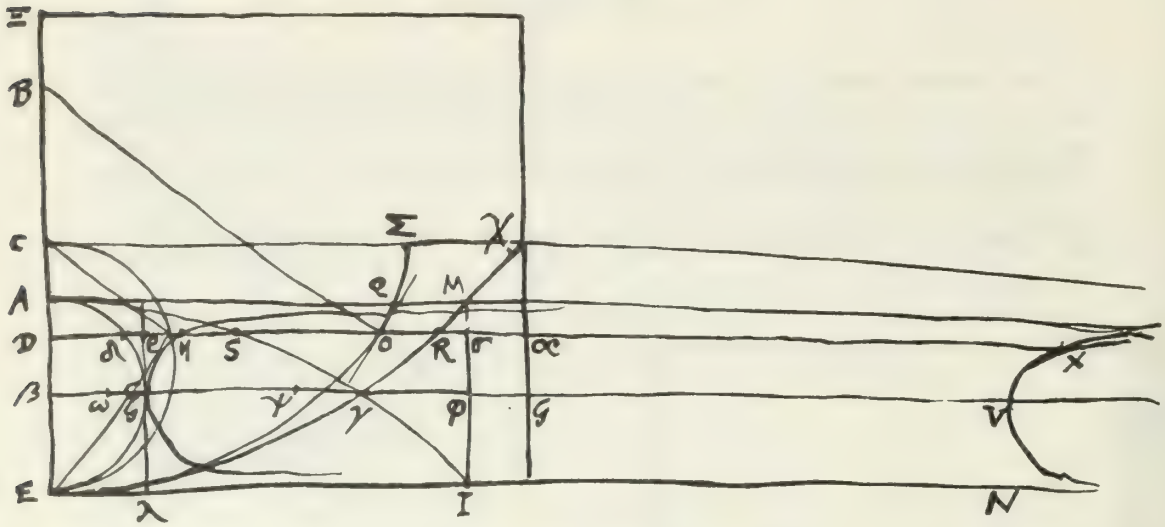


à la courbe primitive (lieu des points B) est également parallèle à AG: en effet, on a $\frac{CF^2}{CE^2} = \frac{AC}{AA_1}$, donc $\frac{AC}{AA_1} = \frac{BC^2}{BD^2}$ ou $\frac{AG}{AA_1} = \frac{BC}{BD}$ ou bien $\frac{CG}{A_1G} = \frac{BC}{BD}$, d'où l'on conclut que A_1G est parallèle à DB, partant AG parallèle à la tangente en B.

Du point A partent donc deux courbes possédant des tangentes parallèles entre elles en leurs points d'intersection avec une ordonnée quelconque perpendiculaire à AD. Huygens peut avoir reconnu intuitivement que ces courbes doivent être identiques, et il aurait pu donner, s'il l'eût fallu, une démonstration exacte de cette identité d'après une méthode analogue à celle par laquelle il prouve dans la Prop. III de la Pars III de l'„Horologium oscillatorium" une proposition du même genre pour deux courbes possédant des normales communes.

[3]) La Troisième Partie est empruntée à la p. 74 recto des „Chartæ Mechanicæ". Elle contient

[Fig. 12.]



[ut $\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$]

$$\frac{1}{2}c \text{ ——— } \sqrt{2bc} \text{ ——— } \frac{1}{2}\frac{cc}{p} \Big/ \frac{c\sqrt{2bc}}{p}$$

Ergo ſpatium infinitum VX ad ▭ AI ut Vβ ad $\beta\psi$

$$2b - c\frac{\sqrt{2bc}}{p}$$

unde ſpatium infinitum VX ad 2 ▭ AI
hoc eſt tempus per QOE ad tempus per AE ut b ——— $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$.

Sed tempus per AE eſt ad tempus per CE, hoc eſt, per dimidiam EΞ ut AM ad Cχ, hoc eſt, ut $\sqrt{2bc}$ ad b, hoc eſt ut $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{bc}{p}$.

Ergo ex æquo erit tempus per QOE ad tempus per CE ut b ad $\frac{bc}{p}$ hoc eſt ut p ad c.

Ergo ex quocunque puncto Q mobile deſcendat per curvam ΣQE erit tempus

---

un fragment d'un raisonnement analogue à celui de la p. 72 recto (voir la Première Partie de cette Pièce) mais formulé plus correctement. C'est le début qui fait défaut; celui-ci se trouvait sans doute sur une feuille brûlée, dont le dernier reste à bords carbonisés est attaché à la

descensus ad tempus descensus per perpendicularem CE ut p ad c, hoc est ut semicircumferentia ad diametrum.

Ergo ex quocunque puncto curvæ descenderit usque in E, semper æquale tempus impendet.

p. 74; on y lit de la main de Huygens: „pertinebat ad inventum de Cycloides Isochronismo".

La partie manquante de la déduction se reconstruit aisément (comparez à ce sujet le deuxième alinéa de la note de la p. 404):

Dans la Fig. 12 on a $C\chi = E\Xi = 2\,CE$; $C\chi$ est la base de la cycloïde; $E\Sigma$ est l'arc de cycloïde donné, Q le point où commence la chute avec une vitesse nulle, O un point quelconque de l'arc QE. La parabole $E\chi$ est le lieu des points R, déterminés par l'équation $\frac{BO}{DO} = \frac{C\chi}{DR}$. $C\chi$ est donc la longueur constante arbitraire qui s'appelait CE dans la cinquième Proposition de la Deuxième Partie (voir la Fig. 11 à la p. 400). ASI est une parabole à sommet A, congruente avec la parabole $E\chi$.

On a donc, en raisonnant comme dans le cas de la p. 72 recto (voir aux p. 393—397 les notes de la Première Partie):

$$\frac{\text{temps de parcours de l'élément O pour le mobile parti de Q}}{\text{temps de parcours de l'élément D avec la vitesse constante } v_E} =$$

$$\frac{BO}{DO} \cdot \frac{v_E}{v_D} = \frac{D\alpha}{DR} \cdot \frac{EI}{DS} = \frac{D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS}.$$

Posons

$$\frac{D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS} = \frac{DX}{D\sigma};$$

on aura alors, comme dans la Première Partie,

$$\frac{\text{temps de parcours de l'arc QE}}{\text{temps de la chute suivant AE}} = \frac{\text{omnes } DX}{2 \,.\, \text{omnes } D\sigma} = \frac{\text{surface AQ..XV..NEA}}{2.\ \text{surface} \square \text{AI}}.$$

Construisant ensuite $D\eta$ de telle manière que $D\delta : D\varepsilon = D\varepsilon : D\eta$, on aura

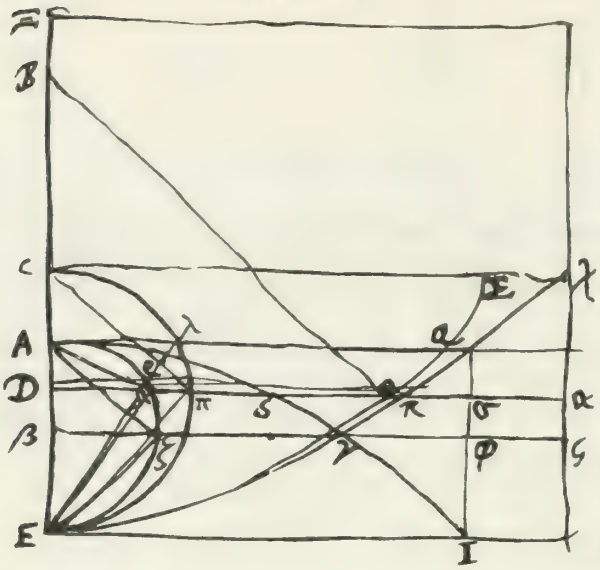
$$\frac{\text{surface AQ..}\eta\zeta\text{..NEA}}{\text{surface} \square A\lambda} = \frac{\text{demi-circonférence}}{\text{diamètre}}$$

(4ième Proposition de la Deuxième Partie, deuxième alinéa de la p. 399).

C'est par cette dernière proportion que commence le texte imprimé de notre Troisième Partie; la surface AQ..$\eta\zeta$..NEA y est désignée par $\zeta\eta$. Le reste du raisonnement est entièrement comparable à celui de la p. 72 recto (voir la Première Partie de cette Pièce). Pour faciliter la comparaison nous observons que $\beta\omega$ [Fig. 12] correspond à CΠ [Fig. 6], et c à q.

Quatrième Partie [1]).

[Fig. 13.]



Ponimus mobile defcendere per cycloidem ex puncto aliquo Q [Fig. 13] usque in E; et comparandum fit tempus hujus defcenfus cum tempore quo mobile cadit ex A in E motu naturaliter accelerato vel cum tempore huic æquali, quo nempe percurreret lineam AE motu æquabili et celeritate dimidia ejus quam acquirit in fine cafus per AE.

ΞEI angulus rectus. CE ∞ CΞ. ERχ eft parabola cujus latus rectum ∞ 2EΞ. cui fimilis eft oppofita ASI. CΠE eft circulus genitor cycloidis EOQΣ. AζE femicirculus. Aβ ∞ βE.

Tempus per particulam cycloidis in O, puncto quolibet, ad tempus per particulam perpendicularis in D, ponendo utramque particulam ijsdem parallelis horizontalibus includi, et celeritatem mobilis in O effe eam quam acquirit cadendo ex Q five ex altitudine AD, celeritatem vero mobilis in D effe dimidiam ejus quam acquirit cadendo ex AE; illud ergo tempus ad hoc habebit rationem compofitam ex ratione particulæ O ad particulam D, et ex ratione celeritatis qua peragitur particula D ad celeritatem qua peragitur O. per propof... Galilei de motu

[1]) Les pages examinées contiennent encore différentes rédactions ou projets de rédaction de la preuve de la propriété tautochrone de la cycloïde. En faisant suivre ici le fragment qu'on trouve à la p. 187 du Manuscrit A, nous observons l'ordre chronologique: ce fragment doit être postérieur aux Parties précédentes et antérieur aux deux démonstrations complètes qui suivent. En effet, dans le raisonnement considéré ici la parabole Eχ joue encore un rôle, tandis que dans la démonstration plus correcte elle ne paraîtra plus; mais d'autre part l'auteur cherche déjà à s'affranchir de l'emploi des courbes à sommets V et ζ de la Fig. 12.

Le raisonnement initial de cette p. 187 est conforme au début reconstruit du raisonnement qui se poursuit dans le morceau de la p. 74 recto des „Chartæ Mechanicæ" (voir la Troisième Partie qui précède et, à la p. 403, le deuxième alinéa de la note 3 de la p. 401); il confirme donc

æquabili. hoc eſt, et ex ratione celeritatis dimidiæ acquiſitæ caſu per AE ad celeritatem acquiſitam caſu per QO ſive AD. hoc eſt, et ex ratione dimidiæ EI ad DS, quia ASI eſt parabola. Eſt autem particula O ad D, ut OB (quæ cycloidi occurrit ὀρθογώνως) ad OD. hoc eſt ut CΠ ad ΠD, (nam CΠ eſt parall. BO). hoc eſt ut CE ad EΠ, hoc eſt in ſubduplicata ratione CE ad ED, ac propterea eadem quam habet Cχ ad DR. Ergo tempus dictum per particulam O ad tempus per D particulam, habet rationem compoſitam ex ratione $\frac{1}{2}$ EI ad DS, et Cχ ad DR. hoc eſt eam quam $\frac{1}{2}$ □ Cχ, EI, ſive $\frac{1}{2}$ □ αDσ ad □ RDS. hanc autem dico eſſe eandem quæ $\frac{1}{4}$ EI ad Dδ. nam quia □ αD, $\frac{1}{2}$ Dσ ad qu. βγ, ſive ad □ ſub Aβ et 2αD (nempe latus rectum parabolæ) ſive ad □ AE, αD, eſt ut $\frac{1}{2}$ Dσ ſive $\frac{1}{2}$ EI ad AE ſive ut $\frac{1}{4}$ EI ad ζβ. quadratum vero βγ ad □ RDS ut ζβ ad δD: erit ex æquo $\frac{1}{2}$ □ αDσ ad □ RDS ut $\frac{1}{4}$ EI ad Dδ.

[Cinquième Partie] [2]).

15 Dec. 1659.

Demonſtratio melior huc tandem redacta.

Sit dimidia cycloides ABC vertice A deorſum ſpectante et axe AD ad perpendic. [Fig. 14].

Et ex quocunque ejus puncto B deſcendat per ipſam mobile usque in A. Dico

---

cette reconstruction. La déviation commence là où le rapport $\frac{OB}{OD}$ est égalé à $\frac{C\Pi}{D\pi}$, c.à.d. au rapport de deux longueurs se rapportant au cercle CE qui engendre la cycloïde. On passe de là à la parabole ERχ en posant $\sqrt{\frac{EC}{ED}} = \frac{C\chi}{DR}$.

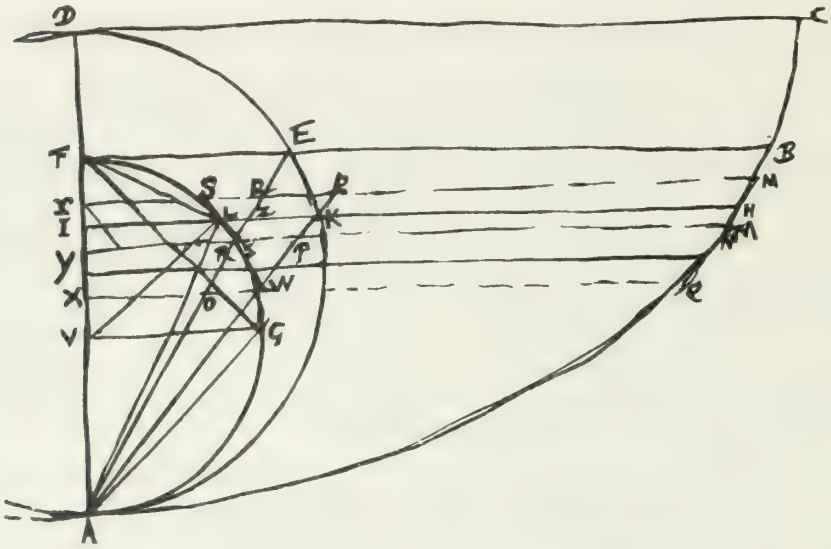
L'auteur trouve ensuite que l'expression $\frac{\frac{1}{2} D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS}$ est égale au rapport $\frac{\frac{1}{4} EI}{D\delta}$, de sorte que la courbe à ordonnées DX [Fig. 12] n'est plus introduite; mais il ne va pas plus loin: le morceau est resté à l'état fragmentaire.

[2]) Cette Partie est empruntée aux p. 188—191 du Manuscrit A. Elle contient une preuve complète de la propriété tautochrone de la cycloïde, preuve qui, il est vrai, ne satisfait pas

tempus hujus deſcenſus ad tempus caſus perpendicularis ex D in A, fore ut ſemiperipheria circuli ad diametrum. Ideoque ex quovis cycloidis puncto tempora deſcenſus æqualia eſſe [1]). Sit enim BF parallela CD, quam ſecet ſemicirculus genitor DEA in E et ducatur AE [2]).

Magna nec ingenijs inveſtigata priorum [3]).

[Fig. 14.]



Quia igitur tempori caſus per DA æquale eſt tempus deſcenſus per planum inclinatum EA *, ſive tempus quo tranſitur eadem EA motu æquabili et celeri-

* 6 pr. de motu accel. Galilei[4]).

---

encore aux conditions rigoureuses que l'auteur s'est imposées en rédigeant la démonstration définitive de l'„Horologium oscillatorium".

On trouve une deuxième rédaction de cette preuve aux p. 76—77 des „Chartæ Mechanicæ"; mais elle diffère trop peu de celle publiée ici pour qu'il soit nécessaire de la reproduire in extenso. Nous nous contenterons de la citer dans quelques notes et d'en emprunter les trois derniers alinéas (voir la note 1 de la p. 410).

[1]) On lit à la p. 76 recto des „Chartæ Mechanicæ" deux énoncés de cette proposition; ils ont été biffés tous les deux. Les voici:

„Tempora reciprocationum quibus mobile per cavam cycloidem naturali impetu descendit ascenditque, a quocunque cycloidis puncto dimissum illud fuerit sunt æqualia; Habentque singula eam rationem ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis quam circumferentia circuli ad diametrum".

„Tempora lationum reciprocarum mobilis per quoslibet cycloidis arcus inter

tate dimidia ejus quam acquirit mobile cadendo per EA *, vel per FA * perpendiculariter; Oſtendendum nobis eſt, tempus per partem cycloidis BA eſſe ad dictum tempus motus æquabilis per EA, ut ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

* 1 pr. *).
* ... G. *).

Deſcribatur ſuper FA ſemicirculus FGA, et intelligatur ei circumſcriptum polygonum ex tangentibus cujus unum latus ſit SLS. Poteſt autem tot laterum fieri ut à peripheria ipſa FLA quamlibet parum differat. Per contactum L ducatur HLKH recta parall. DC, cui item parallelæ ducantur ϒM, intercipientes polygoni latus SS, ut et rectam MHM, tangentem cycloidem in H, rectæ vero AE partem RR. Quod ſi ſingulis porro lateribus polygoni circa FLA deſcripti, eodem modo tangentes cycloidis reſpondentes conſtituantur, hæ tandem ſi infinitus numerus earum fuerit ipſam curvam conficient, et tempus deſcensus mobilis per omnes ejusmodi tangentes idem erit cum tempore deſcenſus per curvam BHA ſecundum ante expoſita [6]). Tempus deſcenſus per ſingulas earum ponimus non differre a tempore motus æquabilis per easdem celeritate ea quæ acquiritur caſu ex puncto B usque ad punctum contactus cujusque tangentis. Veluti pro tempore deſcenſus per MM uſurpabimus tempus quo tranſiretur MM motu æquabili, celeritate vero quanta acquiritur caſu per BH ſive per perpend. FI; nam hæ celeritates eædem ſunt ut oſtenſum eſt. atque ita in ſingulis tangentibus fieri intelligendum.

---

se sunt æqualia, habentque singula ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis eam rationem quam circumferentia circuli ad diametrum".

On lit encore en marge: „Theorema hoc proponatur ijs verbis quibus positum est in fine pag. præcedentis". Il s'agit apparemment de la p. 74 recto (voir, à la p. 401, la Troisième Partie de cette Pièce).

[2]) Ici il y a un signe de renvoi qu'on retrouve à la p. 189 du Manuscrit A.

[3]) Ovide, Métamorphoses, XV, 146.

[4]) Voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 221 (Prop. VI) et p. 208 (Prop. I).

[5]) Chez Galilée ceci n'est pas une proposition, mais un postulat; voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 205.

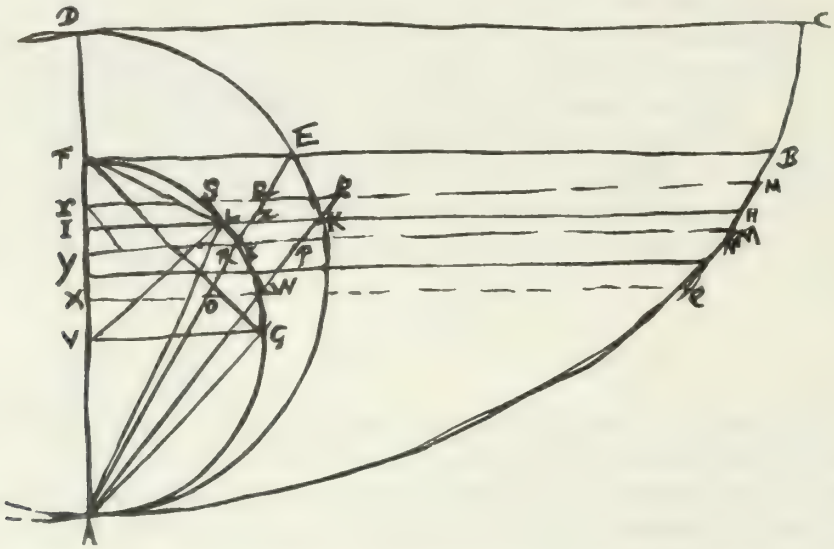
[6]) Voir la p. 411. Après cette phrase les mots „secundum quæ etiam" ont été intercalés. Ce sont les premiers mots de la remarque qu'on trouve in margine: „secundum quæ etiam tempus motus accelerati per singulas adæquabimus tempori cuidam motus æquabilis, videlicet ut pro tempore motus accelerati per MM sumatur".

À la p. 76 verso des „Chartæ Mechanicæ" une phrase qui exprime à peu près la même chose fait partie du texte lui-même. On y lit: „... per curvam BHA, secundum ante exposita. Secundum quæ etiam pro tempore descensus per MN usurpabimus tempus quo transiretur eadem MN motu æquabili, celeritate vero quanta acquiritur casu per BH".

Porro jungatur AK, et ſecet in PP parallelas ϒM. Jungantur item FL, LA, ut et FG, GA, ſecto prius ſemicirculo FGA bifariam lineâ VG ex centro eductâ. Quoniam itaque lineam MM tranſiri ponimus celeritate æquabili quanta acquiritur caſu per FI, lineam vero RR, celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur caſu per FA, habebit tempus per MM ad tempus per RR rationem eam quæ componitur ex ratione MM ad RR et ex ratione dimidiæ celeritatis acquiſitæ caſu per FA ad celeritatem acquiſitam caſu per FI *. Atqui celeritas tota ex caſu per FA eſt ad celeritatem ex caſu per FI in ſubduplicata [ratione] ſpatiorum FA ad FI [1]) ac proinde eadem quæ FA ad FL, ergo dimidia celeritas ex caſu per FA

* Galilei theor... de motu Æquab.

[Fig. 14.]



ad celeritatem ex caſu per FL ut VF ad FL. Itaque tempus dictum per MM ad tempus per RR habebit rationem compoſitam ex ratione MM ad RR et ex ratione VF ad FL. Eſt autem MM tangens [2]) cycloidem in puncto H parallela rectæ AK*, ideoque PP æqualis MM. Ergo tempus dictum per MM ad tempus per RR habebit rationem compoſitam ex ratione PP ad RR, hoc eſt, KA ad ZA, hoc eſt EA ad KA *, et ex ratione VF ad FL. Eſt autem ut EA ad KA, ita FA ad AL;

* theorema de tangente in hoc libro *) ſupra demons.

* nam tres hasce EA, KA, ZA proportionales eſſe facile oſtendi poteſt.

[1]) À la p. 76 verso des „Chartæ Mechanicæ" on trouve ici un renvoi à la Prop. 2 Galilei de motu accelerato. Voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 209.

[2]) On trouve ici les mots: „vide pag. præced. ad signum...". On trouve en effet le même signe au début du passage qui suit, à la p. 188 du Manuscrit A.

nam quia EA quadr. eſt æquale □° DAF, et KA qu. □° DAI, eſtque □ DAF ad □ DAI ut FA ad AI, hoc eſt ut qu. FA ad qu. AL; ergo et qu. EA ad qu. KA ut qu. FA ad qu. AL, ideoque EA ad AK ut FA ad AL, ſicut dicebamus. Ratio itaque temporis per MM ad tempus per RR, eadem eſt compoſitæ ex ratione FA ad AL et ex ratione VF ad FL, ac proinde eadem erit quæ □ AFV ſive $\frac{1}{2}$ qu. AF ad □ AL, LF. ſive, ſumtis horum dimidijs, eadem quæ trianguli FGA ad triangulum FLA. Sunt autem triangula hæc ſuper eadem baſi AF, ac proinde inter ſe ut altitudines GV ad LI. Ergo tandem tempus per MM ad tempus per RR erit ſicut GV ſive VL ad LI, hoc eſt ut tangens SSad ϒϒ[4]). hoc enim facile apparet[5]).

Eodem modo oſtendetur tempus deſcenſus motus accelerati per ſequentem cycloidis tangentem NQ eſſe ad tempus æquabile per RO, particulam rectæ AE inter easdem parallelas horizontales cum dicta tangente interceptam, ſicut tangens circuli SW ad rectam ϒX, quarum utraque inter easdem quoque iſtas parallelas interjicitur, atque ita de cæteris omnibus. Quia autem lineam totam EA, ac proinde ſingulas quoque partes ejus ponimus motu æquabili percurri, ſcilicet velocitate dimidia ejus quæ acquiritur caſu per FA, Idcirco neceſſario erit tempus per RR ad tempus per RO, ut ipſa longitudo RR ad RO, hoc eſt ut ϒϒ[4]) ad ϒX. atque ita ſimiliter cætera tempora per particulas rectæ EA inter ſe, ſicut particulæ ipſis reſpondentes in recta FA.

Sunt itaque magnitudines quædam rectæ ϒY, YX &c. et totidem aliæ tempora ſcilicet quibus percurruntur rectæ RR, RO &c., quarum unaquæque in prioribus ad ſuam ſequentem eadem proportione refertur qua unaquæque poſteriorum ad ſuam ſequentem. Quibus autem proportionibus priores ad alias totidem nempe ad tangentes circuli, SS, SW referuntur ijsdem proportionibus et eodem ordine poſteriores ad alias totidem referuntur, nempe ad tempora motus qualem diximus, per tangentes cycloidis MM, MQ. Ergo * quam rationem habent omnes ſimul priores ad omnes eas ad quas referuntur, hoc eſt quam tota FA recta ad totam ſemicircumferentiam FLA, eam habebunt omnes poſteriores ad omnes ad quas ipſæ ſimiliter referuntur, hoc eſt tempus quo tota EA percurritur motu æquabili, velocitate autem dimidia ejus quæ acquiritur caſu per FA, ſive, quod idem eſt, tempus motus accelerati per EA vel per DA; ad tempora omnia motus qualem diximus per tangentes cycloidis, hoc eſt ad tempus deſcensus per totam cycloidis portionem BHA. quod erat demonſtrandum.

* p. 2 de Conoid. et Sphær. Archim. [6]).

---

[3]) C. à. d. dans le Manuscrit A. Voir la p. 374 du T. XIV, déjà nommée dans la note 2 de la p. 400.

[4]) La figure [Fig. 14] a une fois la lettre ϒ et une fois la lettre Y.

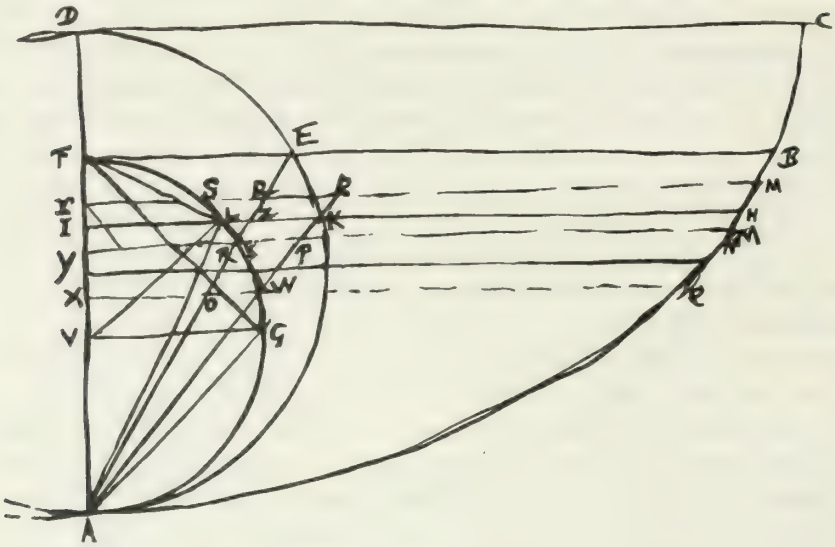
[5]) On lit ici: „Vide fol. sequens versum, ad signum ...". Le texte indiqué, qui suit, se trouve en effet à la p. 190 du Manuscrit A.

[6]) C'est la Prop. I dans l'édition moderne de J. L. Heiberg (Archim. Opera Omnia, Lipsiæ, in æd. B. G. Teubneri).

Coroll. tempus cafus per BH eft ad tempus casus reliqui per HA ut arcus FL ad arcum LA [1]).

Ex his facile etiam colligitur defcendente mobili ex B ad A, (fumtum autem eft punctum B ad lubitum) tempora defcenfus per partes quaflibet curvæ BA eam inter fe rationem habere quam habent arcus circumferentiæ FGA ijsdem parallelis horizontalibus intercepti quibus fingulæ earum partium continentur. Ita nimirum tempus per arcum BH erit ad tempus reliquum per arcum HA ficut arcus circumferentiæ FL ad arcum LA.

[Fig. 14.]



Conftat porro ubi grave per arcum cycloidis BA defcenderit, continuato motu per æqualem huic arcum ex altera parte axis afcenfurum temporaque utriusque motus æqualia futura, adeo ut in cavo cycloidis per quoflibet arcus reciprocationum fingularum tempora futura fint ad tempus lapfus perpendicularis per axem cycloidis ficut circumferentia circuli ad diametrum [2]).

[1]) Les trois alinéas qui suivent sont empruntés à la p. 77 verso des „Chartæ Mechanicæ". Comparez, à la p. 406, le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 405.

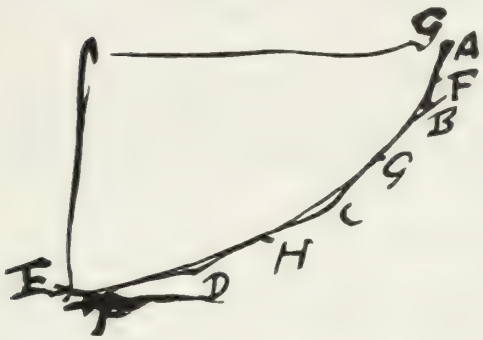
[2]) Cette Proposition s'exprime en notations modernes par la formule de la période d'une demi-oscillation cycloïdale $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, où l est le double du diamètre de la circonférence qui engendre la cycloïde.

Eadem vero omnia etiam in cycloide quæ in plano inclinato ſita ſit contingere manifeſtum eſt, ita nempe ut axem ad plani lineam horizontalem perpendicularem habeat. Eadem enim utrobique eſt demonſtratio.

hæc ante præcedens theorema legenda [3]).

De motu per cycloidem acturus curvam hanc quaſi ex infinita multitudine tangentium conſtare conſiderabo. Et rurſus pro tempore deſcenſus accelerati per omnes hasce tangentes, conſidero ſummam temporum quibus ſingulæ tangentes percurrerentur motu æquabili et velocitate quanta acquiritur ex caſu a principio deſcenſus ad usque punctum earum contactus. Ut hoc clarius fiat utque appareat ſummam iſtorum temporum non differre à tempore deſcenſus naturalis per tangentes infinitas ſint tangentes infinitæ ex quibus conſtat curva AB, BC, CD &c. [Fig. 15].

[Fig. 15.]



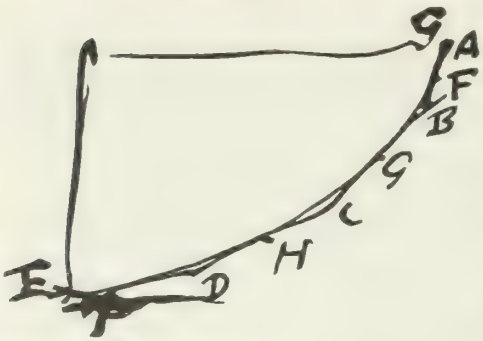
Primò igitur tempus deſcenſus accelerati per curvam AGE non differre ſumo à tempore deſcenſus cum per omnes rectas AB, BC, CD &c. mobile decurrit. nusquam videlicet offendendo, hoc eſt, ut velocitatem quam acquiſivit in fine cujusque lineæ, eam habeat moveri incipiens in linea ſequenti, ac deinceps eandem ſecundum leges motus acceleret. Quum autem tali deſcenſu unaquæque tangens velut CD percurratur motu paulatim accelerato, (nam cum ad finem ejus D pervenit mobile celerius utique movetur quam in principio C) ſi ponamus totam CD percurri motu æquabili celeritate illa majori quam habet mobile cum pervenit deſcendendo ad finem dictæ tangentis D, veniens ſcilicet ex A, hoc enim et in ſequentibus ſemper intelligi debet; conſtat tempus hujus motus brevius fore quam tempus quo mobile percurrit CD velocitate creſcenti ſeu deſcenſu naturali.

At contra, ſi totam CD percurri ponam motu æquabili et celeritate ea tantum quam habet in C, tempus hujus motus erit longius tempore motus accelerati per CD, quo fertur ſcilicet ex A veniens. Sed quoniam tangentem infinitè parvam pono ratione totius AE, ideo et discrimen celeritatis quam acquirit mobile, ſive deſcendat ex A usque in C, ſive ex A usque in D, ſive denique etiam ex A usque in H punctum, ubi CD curvam tangit, tanquam nullum eſt reputandum. Quare et tempus quod longius eſſe dictum eſt tempore deſcenſus natu-

[3]) Manuscrit A, p. 191.

ralis per CD ab illo tempore quod brevius esse dictum est, non differre existimandum: Ideoque nec utrumvis eorum à tempore descensus naturalis per CD. Unde itaque nec tempus motus æquabilis per CD, celeritate quæ acquiritur ex casu per AH, quod scilicet tempus inter illud longius breviusque medium quodammodo est, differre quicquam censendum est à tempore descensus naturalis per CD. Tale ergo medium tempus in singulis tangentibus pro tempore descensus naturalis per easdem tangentes ponimus; omniumque istorum temporum summam pro tempore per totam curvam usurpabimus.

[Fig. 15.]

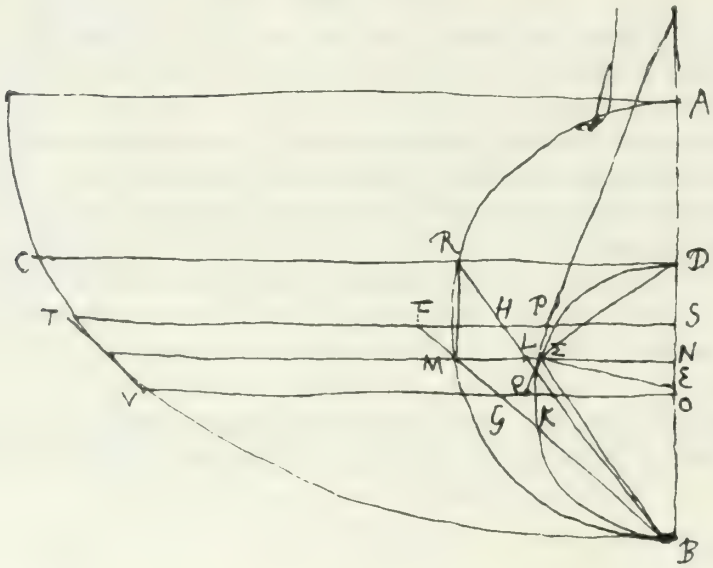


Quod tuto fieri posse periti geometræ facile perspicient neque desiderabunt puto ut longo ambitu illa exsequamur quæ ad demonstrationem more veterum geometrarum conscribendam hic requirerentur.

[Sixième Partie] [1]).

Magna nec ingenijs investigata priorum [2]).

[Fig. 15bis.]



Casus per AB [Fig. 15bis] ∞ per RB ∞ æquabilis per RB cum dimidia celeritate ex RB vel DB. Ostende tempus per TV seu FG cum celeritate ex DN esse ad tempus per HK cum celeritate dimidia ex DB ut PQ ad SO.

illud tempus est ad hoc in ratione composita ex ratione FG ad HK, hoc est, MB ad BL hoc est RB ad BM hoc est DB ad BΣ, hoc est, DΣ ad ΣN et ex ratione ED ad DΣ. Ergo eadem quæ ED sive EΣ ad ΣN hoc est PQ ad SO.

[1]) Cette Partie est empruntée a une feuille détachée datant probablement de la même époque (Chartæ Astronomicæ, p. 224 recto). La démonstration indiquée brièvement dans le texte correspond à celle de la Cinquième Partie qui précède.

[2]) Comparez la note 3 de la p. 407.

IV [1]).

[1661] [2]).

Du centre d'oſcillation

ou

Méthode pour trouver des pendules ſimples iſochrones avec des pendules compoſés linéaires donnés.

Conſidérons une barre AD [Fig. 16] inflexible et impondérable, à laquelle ſoient attachés les poids D à l'extrémité inférieure et E quelquepart entre A et D. On cherche le pendule ſimple HK qui exécute des oſcillations iſochrones avec le pendule linéaire compoſé AED, les gravités E et D ainſi que les longueurs AD et AE étant données.

Pour trouver une baſe de ce calcul, ſuppoſons que les globes B et C, après avoir exécuté les demi-oſcillations BE et CD rencontrent les globes égaux G et F [3]). Or nous prenons ceux-ci, de même que B et C, parfaitement durs; B et C tranſmettront donc tout leur mouvement aux globes G et F, et le pendule linéaire AED demeurera immobile. Par conſéquent lorſque les globes G et F retournent avec des viteſſes égales à celles qu'ils avaient reçues et frappent E et D [4]), ceux-ci recouvreront de leur part tout leur mouvement et remonteront d'après nos lois du mouvement les arcs EB et CD de la même manière qu'ils les avaient parcourus en ſens inverſe, ramenant évidemment en même temps la barre AD en AC. Il en réſulte que le centre de gravité compoſée des globes G et F, après qu'ils ont reçu de la part de E et de D leur mouvement et qu'ils ſe ſont élevés par ce mouvement auſſi haut que poſſible, atteint une hauteur égale à celle du centre de gravité des

---

[1]) Manuscrit B, p. 33—39.

[2]) La page 18 est datée: août 1661, et la p. 48 porte la date du 29 nov. 1661. On trouve à la p. 31 quelques notes sur le réglage d'une horloge en oct. 1661 qui sont reproduites sur la p. 46.

[3]) En marge: „vel poni posset sphaeras B, C peracta semivibratione a virga AD excuti". (On pourrait aussi supposer que les globes B et C fussent lancés dehors par la barre AD, après avoir exécuté une demi-oscillation).

IV [1]).

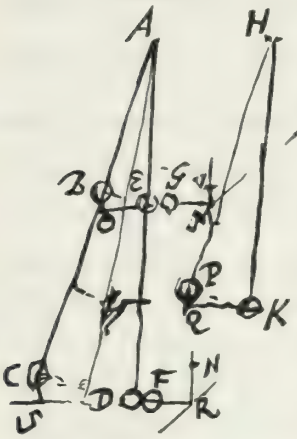
[1661] [2]).

De centro oſcillationis

ſive

Ad invenienda perpendicula ſimplicia iſochrona propoſitis perpendiculis compoſitis.

[Fig. 16.]



Virga inflexibilis AD [Fig. 16] nihil ponderans ſumatur, in qua pondera affixa ſint, D in ima extremitate, et E alicubi inter A et D. quæritur pendulum ſimplex HK perpendiculo AED compoſito iſochronas vibrationes habens. datis nempe gravitatibus E, D, et longitudinibus AD, AE.

Ad inveniendum calculi hujus fundamentum imaginemur ſphæras B et C poſtquam peregerunt ſemivibrationes BE, CD occurrere ſphæris æqualibus G et F [3]); ponimus autem tum has tum B et C perfecte duras; ergo omnem motum ſuum transferent in ſphaeras G et F, manebitque perpendiculum AED immobile [4]). Quare ſi viciſſim ſphæræ G et F revertantur ijſdem quas acceperunt celeritatibus ac percutiant E et D [5]), hæ ab ipſis omnem rurſus motum accipient, aſcendentque per noſtras leges motus per arcus EB, CD, uti prius deſcenderunt, nimirum ut virgam AD una auferant in AC. Hinc ſequitur ſphærarum G, F, centrum gravitatis compoſitæ, poſtquam ab E et D motum accepere eumque ſurſum quouſque poſſunt converterunt, centrum inquam hoc ad eandem altitudinem aſcendere in qua eſt centrum gravitatis ſphærarum B et C. Non poteſt enim altius eſſe; ſed neque humi-

---

[4]) D'après la „Prop. prima" de la p. 33.

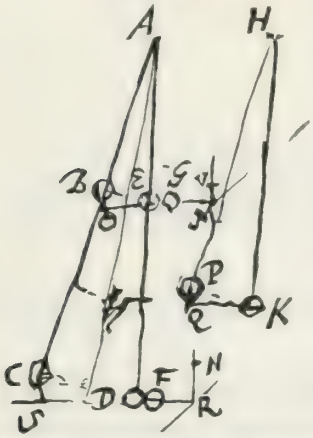
[5]) Les mêmes globules sont désignés tantôt par les lettres B et C, tantôt par les lettres E et D.

globes B et C. En effet, il ne peut être plus élevé. Mais il ne peut pas non plus être moins élevé parce que les globes G et F en retombant des hauteurs acquiſes mettent les globes E et D en mouvement avec une force qui les fait monter juſqu'en B et C, comme nous l'avons dit. Ceci eſt évident d'après la mécanique [1]).

Suppoſons maintenant que le pendule linéaire AED oſcille auſſi rapidement que le pendule ſimple HK. Appelons cette longueur HK x, et prenons AD $= a$, AE $= b$, le poids D $= e$, le poids E $= c$, et la hauteur CS (de laquelle celle de C ſurpaſſe celle de D) $= d$. Or, comme le pendule linéaire AED ſe meut par hypothèſe avec la même viteſſe avec laquelle ſe mouvrait le pendule ſimple HK, la viteſſe du poids D ſera à celle du poids K après que celui-ci aura parcouru, dans ſon pendule HK, un arc ſemblable, comme AD eſt à HK, c. à. d. comme a eſt à x. Mais le poids K s'élève par la force de ſon mouvement à la hauteur QP qui eſt $\frac{dx}{a}$. Par conſéquent le poids D avec ſa viteſſe déjà mentionnée, ou bien le poids F qui reçoit toute la viteſſe de D, peut monter à une hauteur qui ſera à la hauteur QP comme le carré de cette viteſſe eſt au carré de la viteſſe acquiſe par le poids K. Or, ces carrés ſont dans le rapport $a^2 : x^2$ et la hauteur QP $= \frac{dx}{a}$; par conſéquent, en prenant $x^2 : a^2 = \left(\frac{dx}{a}\right) : \left(\text{une autre quantité, ſavoir } \frac{ad}{x}\right)$, cette dernière ſera la hauteur, au-deſſus de la ligne horizontale DS évidemment, à laquelle peut monter le globe frappé F. En d'autres termes, ſi l'on prend [2]) (HK ou x) : (AD ou a) $=$ (la hauteur CS ou d) : $\left(\text{une quatrième longueur, ſavoir } \frac{ad}{x}\right)$, celle-ci (appelons-la RN) ſera la dite hauteur; et ceci doit être conſidéré comme un théorème. Par ce théorème on apprend auſſi à connaître la hauteur à laquelle montera le globe frappé G. En effet, comme HK ou x eſt à AG ou b, ainſi ſera la hauteur BO ou $\frac{bd}{a}$ à $\frac{b^2d}{ax}$, hauteur à laquelle G s'élève au-deſſus de la ligne horizontale EO; appelons cette hauteur MV. Pour que le centre de la gravité compoſée de G et de F, après qu'ils ont atteint les dites hauteurs, ſe trouve auſſi haut que le centre de la gravité compoſée de B et de C, il faut maintenant que le produit de la hauteur NR par le poids F ou D, augmenté du produit de la hauteur MV par le poids G ou E, c. à. d. l'expreſſion $\frac{ead}{x} + \frac{b^2dc}{ax}$, il faut, dis-je, que cette ſomme de deux produits ſoit égale à celle des deux produits qu'on obtient en multipliant la hauteur CS par le poids D et la hauteur BO par le poids E, ce qui fait $ed + \frac{bdc}{a}$.

lius quoniam recidentes ſphæræ G, F ab acquiſitis altitudinibus dant motum ſphæris E, D, cujus vi aſcendant in B et C, uti dictum fuit: hæc enim ex mechanicis clara ſunt [1]).

[Fig. 16.]



Ponamus jam perpendiculum AED æquè celeres vibrationes habere ac perpendiculum HK, quæ longitudo vocetur x, et AD ſit a; AE ∞ b, gravitas D ∞ e; gravitas E ∞ c, altitudo CS nempe qua altius eſt C quam D ∞ d. Quia ergo perpendiculum AED movetur celeritate eadem qua moveretur perpendiculum ſimplex HK, erit velocitas ponderis D ad velocitatem ponderis K in perpendiculo HK per ſimilem arcum vibrati, ut AD ad HK, hoc eſt ut a ad x. Sed pondus K vi motus ſui aſcendit ad altitudinem QP quæ eſt $\frac{dx}{a}$. Ergo pondus D dicta velocitate ſua, vel pondus F omnem ejus velocitatem accipiens, poteſt aſcendere ad altitudinem quæ ſit ad altitudinem QP ſicut quadratum hujus velocitatis ad quadratum velocitatis acquiſitæ ponderi K. ſunt autem hæc quadrata ut aa ad xx et altitudo QP ∞ $\frac{dx}{a}$, ergo faciendo ut xx ad aa ita $\frac{dx}{a}$ ad aliud nempe $\frac{ad}{x}$, erit hæc altitudo, nempe ſupra horizontalem DS, ad quam poterit aſcendere percuſſa ſphæra F. nempe ſi fiat [2]) ut HK, x ad AD, a, ita altitudo CS, d, ad aliam, $\frac{ad}{x}$, ea quæ ſit verbi gratia RN, erit altitudo dicta, atqüe hoc theorematis loco habendum, quo ſimiliter innoteſcit altitudo ad quam aſcendet percuſſa ſphæra G. ut enim HK, x, ad AG, b, ita altitudo BO, $\frac{bd}{a}$ ad $\frac{bbd}{ax}$ altitudinem quo aſcendet G ſupra horizontem EO, quæ ſit MV. Jam ut centrum gravitatis compoſitæ ex G et F, poſtquam ita aſcenderunt, ſit æque altum ac centrum gravitatis compoſitæ ex B et C, oportet, ut NR altitudo ducta in gravitatem F ſeu D, una cum producto altitudinis MV in gravitatem G ſive E, hoc eſt, $\frac{ead}{x} + \frac{bbdc}{ax}$, ut inquam hæc duo producta æquentur productis duobus ex altitudine CS in gravitatem D, et ex altitudine BO in gravitatem E, quæ ſunt $ed + \frac{bdc}{a}$.

---

[1]) Comparez les p. 21—22 qui précèdent.

[2]) En marge: „Theorema". L'équation $x^2 : a^2 = \frac{dx}{a} : \frac{ad}{x}$ correspond à l'équation $y^2 : q^2 = \frac{xy}{q} : p$ de la note 1 de la p. 386 et l'équation $x : a = d : \frac{ad}{x}$ à l'équation $y : q = x : p$ (ou $py = qx$) de la même note.

On aura donc
$$\frac{ead}{x} + \frac{b^2dc}{ax} = ed + \frac{bdc}{a}$$

$$ea^2d + b^2dc = eadx + bdcx$$

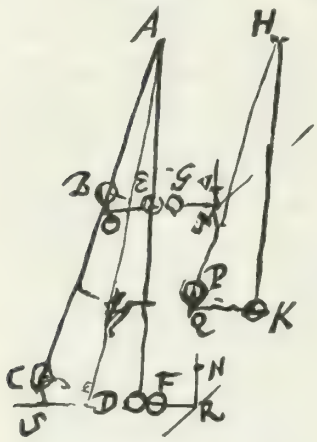
$$ea^2 + b^2c = eax + bcx$$

$$\frac{ea^2 + b^2c}{ea + bc} = x.$$

C'eſt donc là la règle univerſelle par laquelle on calculera aiſément la longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec un pendule compoſé [1]). Par exemple lorſque AE $= \frac{1}{2}$ AD et que les poids D et E ſont égaux, on aura $x = \dfrac{\frac{5}{4}ea^2}{\frac{3}{2}ea}$ ou $\frac{5}{6}a$.

Mais ſi, étant donnée la longueur du pendule linéaire AD et le poids D ainſi que le poids E, il faut fixer ce dernier à un certain point du pendule linéaire de ſorte que le pendule linéaire compoſé ſoit iſochrone avec un pendule ſimple de longueur donnée HK, on aura d'après l'équation précédente

[Fig. 16.]



$$\frac{ea^2 + b^2c}{ea + bc} = x$$

ou $\quad b^2c = bcx + eax - ea^2$

l'équation ſuivante: $b^2 = bx + \frac{ea}{c}x - \frac{ea^2}{c}$

$$b = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{ea}{c}x - \frac{ea^2}{c}},$$

équation dans laquelle le terme $\frac{ea^2}{c}$ eſt plus grand que $\frac{eax}{c}$, parce que a eſt plus grand que x. Par conſéquent l'équation a deux racines vraies [2]) dont chacune repréſente une longueur AE $= b$. Cependant ſi la longueur donnée HK ou x eſt plus grande que a, l'équation aura une autre forme et ne poſſédera qu'une ſeule racine vraie [2]), ſavoir $b = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{eax}{c} - \frac{ea^2}{c}}$, ce qui fait voir que la longueur b eſt plus grande que x et par conſéquent auſſi plus grande que a.

Eſt ergo
$$\frac{ead}{x} + \frac{bbdc}{ax} \infty ed + \frac{bdc}{a}$$
$$ea^2d + bbdc \infty eadx + bdcx$$
$$ea^2 + bbc \infty eax + bcx$$
$$\frac{ea^2 + bbc}{ea + bc} \infty x.$$

Hæc igitur eſt regula univerſalis, per quam longitudo penduli ſimplicis quod compoſito [1]) iſochronum ſit facile ſupputabitur. Ex. gratia ſi AE ſit $\infty \frac{1}{2}$AD et pondera D et E æqualia, erit $x \infty \frac{\frac{5}{4}eaa}{\frac{3}{2}ea}$, hoc eſt $\frac{5}{6}a$.

Quod ſi vero data longitudine perpendiculi AD et pondere D, itemque pondere E oporteat hoc affigere ad certum perpendiculi punctum, ita ut perpendiculum compoſitum ſit iſochronum perpendiculo datæ longitudinis HK, dabitur ex æquatione præcedenti

$$\frac{eaa + bbc}{ea + bc} \infty x$$
$$bbc \infty bcx + eax - eaa$$
hæc alia
$$bb \infty bx + \frac{ea}{c}x - \frac{eaa}{c}$$
$$b \infty \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{ea}{c}x - \frac{eaa}{c}}$$

in qua æquatione $\frac{eaa}{c}$ major eſt quam $\frac{eax}{c}$ quia a major quam x; habet igitur duas radices veras [2]) quarum utraque dat longitudinem AE ∞b. Quod ſi vero HK, x, major data ſit quam a, erit æquatio alterius formae, tantumque unam veram radicem [2]) habebit, nempe $b \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{eax}{c} - \frac{eaa}{c}}$, ubi b majorem fieri apparet quam x, ac proinde majorem quoque quam a.

---

[1]) C. à. d. avec un pendule composé linéaire.

[2]) Par le terme „radix vera" ou „racine vraie" Huygens désigne ici une racine positive.

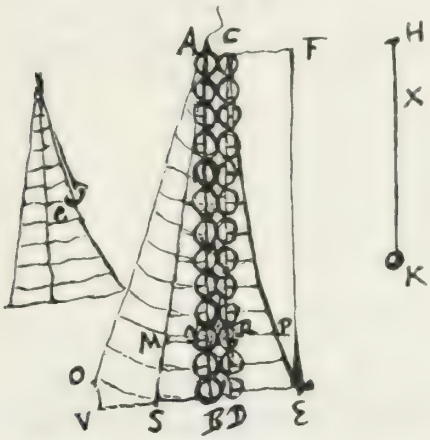
Pour trouver le pendule ſimple iſochrone avec une barre ou un cylindre (que je conſidère toutefois comme une ligne droite ſeulement ſans avoir aucun égard à ſon épaiſſeur) j'imagine au lieu de ce cylindre un nombre infini de petits globes formant une ligne droite rigide telle que AB [Fig. 17]. Si celle-ci ſe trouve d'abord en AO et parvient par une demi-oſcillation en AB, et que là chaque globule frappe un des globules de la ſérie CD leſquels ne sont pas attachés les uns aux autres, chacun de ces derniers prendra tout le mouvement du globule de la ſérie AB par lequel il a été frappé, et la barre AB demeurera immobile. Pour la même raiſon que plus haut il eſt donc néceſſaire que le centre commun de gravité de tous les globules CD, après qu'ils ont reçu le mouvement de la part des globules AB et qu'ils ſe ſont élevés par ce mouvement auſſi haut que poſſible, ſoit à la même hauteur que le centre de gravité des globules AB lorſque ceux-ci ſe trouvaient ſur la droite AO. Suppoſons maintenant que la barre AB ait ſes oſcillations iſochrones avec le pendule ſimple HK, dont la longueur ſoit appelée x. Poſons auſſi $AB = a$, et appelons d la hauteur OV à laquelle la droite BS eſt égale par conſtruction. Par conſéquent, d'après le théorème ſusmentionné [1]) la hauteur à laquelle s'élèvera par le choc le globe inférieur D ſera $\frac{da}{x}$. Soit DE cette hauteur et ſuppoſons tracée la parabole EC dont l'axe CF ſoit parallèle à DE et dont le point C ſoit le ſommet. Je dis que ſi du centre de chaque globule de la ſérie CD on tire une droite parallèle à DE juſqu'à la parabole EC, ces droites repréſenteront les hauteurs auxquelles monteront les globules correſpondants. En effet, joignons les points S et A par une droite. Comme OV, égale à SB, repréſente la hauteur de laquelle le globule le plus bas D eſt deſcendu, NM parallèle à SB et tracée à partir du centre d'un autre globule N ſera, dis-je, la hauteur dont le globule N eſt deſcendu. Mais pour trouver, en partant de ces données, la hauteur RP à laquelle montera le globule R frappé par N, il faut d'après le théorème nommé conſtruire RP d'après l'équation $HK : AN = NM : RP$. Par conſéquent $HK \times RP = AN \times NM$. Mais $HK \times DE = AB \times BS$, puiſque d'après le même théorème $HK : AB = BS : DE$. On a donc $AN \times NM : AB \times BS = HK \times RP : HK \times DE$, c. à. d. $= RP : DE$. Mais $AN \times NM : AB \times BS = AN^2 : AB^2$. Par conſéquent RP eſt à DE comme AN^2 eſt à AB^2 ou comme CR^2 eſt à CD^2, d'où il apparaît que le point P ſe trouve ſur la dite parabole EC.

Or, pour que le centre commun de gravité des globules CD, après que ceux-ci ſe ſont élevés chacun à ſa propre hauteur, ſoit auſſi haut que le centre commun des globules AB lorſqu'ils ſe trouvaient ſur la droite AO, il eſt néceſſaire que lorſqu'on multiplie chaque hauteur par le poids du globule correſpondant la ſomme de ces produits ſoit la même dans les deux cas. Mais comme le poids de tous les globules

[1]) Voir la note 2 de la p. 417.

Ad inveniendum perpendiculum iſochronon baculo ſeu cylindro, (quem tamen ut rectam lineam tantum conſidero nulla habita ratione craſſitudinis) imaginor ejus loco infinitum numerum ſphærularum in rectam lineam rigidam conjunctarum velut AB [Fig. 17]. Hæc ſi primum ſit in AO, ac ſemivibra tione perveniat in AB, ibique ſinguli globuli occurrant ſingulis ſeriei CD, qui non connexi ſint, accipiet horum quiſque motum omnem a globulo ſeriei AB à quo impulſus erit, manebitque virga AB immota. Hinc eadem ratione qua ſuprà, neceſſe eſt centrum gravitatis commune globulorum omnium CD, poſtquam a globulis AB motum accepere, eumque ſurſum quouſque poſſunt converterunt, æque altum eſſe ac centrum gravitatis globulorum AB cum eſſent in recta AO. Ponamus jam virgam AB iſochronas vibrationes habere perpendiculo ſimplici HK, cujus longitudo vocetur x. Et AB ſit a. altitudo OV cui æqualis ponatur BS linea, vocetur d. Itaque per theorema ſuperius [1]), erit altitudo ad quam aſcendet percuſſa ſphæra infima D, $\frac{da}{x}$, quæ ſit DE,

[Fig. 17.]



deſcripta autem intelligatur parabola EC, cujus axis CF æquidiſtans DE, vertex vero C punctum. Dico ſi à centro cujuſque globuli ſeriei CD ducantur rectæ ipſi DE parallelæ uſque ad parabolam EC, eas ſingulas exhibere altitudines ad quas aſcendent globuli unde eductae fuere. Jungatur enim recta SA. Cum igitur SB æqualis OV ſit altitudo unde deſcendit globulus imus D, erit NM, quæ parallela eſt SB atque educta ex centro globuli alterius N, erit inquam illa altitudo unde deſcendit globulus N. Hinc vero ut inveniatur altitudo RP ad quam aſcendet globulus R percuſſus ab N, oportet per theorema dictum facere ut HK ad AN ita NM ad RP. Itaque ▭ HK, RP æquale ▭° AN, NM. ſed ▭ HK, DE æquale eſt ▭° AB, BS, quia per idem theorema HK ad AB ut BS ad DE. Ergo ▭ AN, NM ad ▭ AB, BS ut ▭ HK, RP ad ▭ HK, DE, hoc eſt ut RP ad DE. Sed ▭ AN, NM eſt ad ▭ AB, BS ut quadratum AN ad quadratum AB. Ergo ut quadr. AN ad quadr. AB ſive ut quadr. CR ad quadr. CD ita eſt RP ad DE, unde liquet punctum P eſſe ad parabolam dictam EC.

Jam vero ut centrum gravitatis commune globulorum CD poſtquam ſingulæ ad ſuas altitudines aſcenderunt ſit æque altum ac centrum gravitatis commune globulorum AB cum eſſent in recta AO, neceſſe eſt ut ductis ſingulis altitudinibus in ſuorum globulorum gravitatem aggregatum productorum utrobique æquale efficiatur. Quia autem æqualis omnium globulorum eſt gravitas, concipiamus ſingu-

eſt le même, nous pouvons ſuppoſer que le poids de chacun d'eux eſt exprimé par la ligne de grandeur conſtante qui ſépare les centres de deux globules adjacents [1]).

Toutes ces petites lignes étant donc de part et d'autre multipliées par les hauteurs adjacentes, il apparaît qu'on obtient d'un côté pour ſomme des produits le triangle ABS, et de l'autre l'espace CPED compris entre la parabole CPE et les droites ED et DC. Ces eſpaces doivent donc être égaux entre eux. Or, le triangle ABS eſt égal à $\frac{1}{2}\,ad$ ou $\frac{1}{2}\,ed$ [2]), parce que $AB = a$ et $BS = d$. Et l'eſpace CPED eſt égal à $\frac{1}{3}\,\frac{da^2}{x}$ ou $\frac{1}{3}\,\frac{dae}{x}$, parce que $ED = \frac{da}{x}$ et $CD = a$; on en conclut que le rectangle CDEF eſt égal à $\frac{da^2}{x}$, et la ſurface CPED eſt le tiers de ce rectangle.

Donc
$$\frac{1}{2}\,ad = \frac{1}{3}\,\frac{da^2}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\,ed = \frac{1}{3}\,\frac{dae}{x}\ ^{2})$$
$$\frac{1}{2}\,x = \frac{1}{3}\,a \qquad\qquad \frac{1}{2}\,x = \frac{1}{3}\,a$$
$$x = \frac{2}{3}\,a \qquad\qquad x = \frac{2}{3}\,a.$$

Le pendule ſimple HK doit donc avoir une longueur égale à deux tiers de celle de la barre AB pour que les deux pendules ſe meuvent avec des oſcillations iſochrones.

Le centre d'oſcillation de la barre ſe trouve donc à $^2/_3$ du point de ſuſpenſion, et lorſqu'on attache à la barre en ce point un poids quelconque, ſes va-et-vient n'en deviendront ni plus rapides ni plus lents.

Mais ſi l'on ſuſpend un poids à l'extrémité inférieure de la barre, ou du moins en deſſous dudit centre d'oſcillation, ſon mouvement en ſera ralenti; et le contraire ſe produira ſi l'on attache un poids à un endroit plus élevé.

Suppoſons d'abord qu'un poids Q ſoit ſuſpendu à l'extrémité inférieure D [Fig. 18] d'une barre peſante CD, le rapport de la gravité de ce poids à celle de la barre étant donné. Si l'on déſigne comme plus haut la longueur de la barre par a et que la gravité de chacun des globules dont elle eſt compoſée par hypothèſe eſt repréſentée par les petites parties de la droite CD ou e [2]), parties que les globules conſidérés occupent ſur cette droite, le poids total de la barre ſera évidemment repréſenté par ſa longueur entière, c.-à.-d. par a [3]). C'eſt pourquoi ſi l'on prend une certaine droite telle que n qui ſoit à la longueur CD comme le poids Q eſt au

---

[1]) En marge: „harum æqualium linearum loco possunt quaevis aliae æquales sumi, puta partes rectæ e in totidem divisæ quot sunt globuli in CD". (Au lieu de ces lignes égales on peut prendre n'importe quelles autres lignes égales, p. e. les parties d'une droite e divisée en autant de parts qu'il y a de globules en CD).

[2]) Voir la note précédente.

[3]) En marge: „aut alias per e, quod rectius" (ou encore par e, ce qui conviendra mieux).

lorum gravitatem exprimi lineis æqualibus quæ inter binorum contiguorum centra interjacent [1]).

Quibus itaque utrinque in adjacentes altitudines ductis, apparet ex una parte pro ſumma productorum haberi triangulum ABS, ex altera vero ſpatium CPED parabola CPE et rectis ED, DC comprehenſum. quæ itaque ſpatia inter ſe æqualia eſſe oportet. Eſt autem triangulum ABS $\infty \frac{1}{2}ad$ vel $\frac{1}{2}ed$ [2]), quia AB ∞a, et BS ∞d. Spatium vero CPED $\infty \frac{1}{3}\frac{daa}{x}$ vel $\frac{1}{3}\frac{dae}{x}$, quia ED $\infty \frac{da}{x}$ et CD ∞a; hinc enim rectangulum CDEF fit $\infty \frac{daa}{x}$, cujus tertia pars eſt ſpatium CPED.

Ergo

$$\frac{1}{2}ad \infty \frac{1}{3}\frac{daa}{x} \quad \text{vel} \quad \frac{1}{2}ed \infty \frac{1}{3}\frac{dae}{x} \text{ [2])}$$

$$\frac{1}{2}x \infty \frac{1}{3}a \qquad \frac{1}{2}x \infty \frac{1}{3}a$$

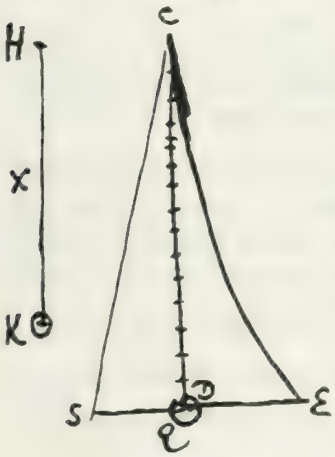
$$x \infty \frac{2}{3}a \qquad x \infty \frac{2}{3}a$$

Oportet igitur perpendiculum HK duas tertias habere longitudinis baculi AB ut vibrationibus iſochronis moveantur.

Igitur centrum oſcillationis baculi est $\frac{2}{3}$ à puncto ſuſpenſionis, quo loco quodcunque pondus baculo affigatur, nihilo velociores reditus aut tardiores acquiret.

Quod ſi autem in ima baculi extremitate pondus aliquod appendatur, vel tantum infra dictum oſcillationis centrum, eo lentior motus evadet, et contra ſi loco ſuperiore quid ponderis addatur.

[Fig. 18.]



Ponamus primum in parte ima D [Fig. 18] baculi ponderantis CD, appenſam gravitatem Q, cujus ad gravitatem baculi data ſit ratio. cum autem baculi longitudo ponatur ut modo ∞a, et ſingulorum quibus conſtare ponitur globulorum gravitas exprimatur particulis rectæ $\frac{e}{CD}$ [2]) quas in ea ſinguli globulorum occupant, totius proinde baculi gravitas per totam ſui ipſius longitudinem, nempe a, exprimetur [3]). quare ſi quæ recta ſumatur, ut n, quæ ſit ad longitudinem CD ſicut gravitas Q ad gravitatem baculi, ea recta n referet gravitatem Q, haud aliter ac ſingulæ particulæ quas in recta CD unuſquiſque globulorum baculum componentium occupat, ſui globuli gravitatem refert.

Eadem itaque qua prius repetita ratiocinatione

poids de la barre, cette droite n repréſentera le poids Q de la même manière que chacune des petites parties qu'occupe ſur la droite CD chacun des globules qui compoſent la barre, repréſente le poids du globule correſpondant.

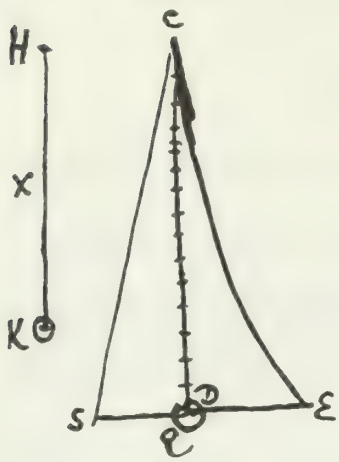
On trouve donc en répétant le raiſonnement précédent que d'une part à la ſomme des produits conſidérée, qui était repréſentée par le triangle CQS, il faut ajouter le produit de n par QS, c. à. d. nd, et que de l'autre il faut, là où il y avait la ſurface CDE, y ajouter le produit de n par DE, ſavoir $\frac{nda}{x}$.

$$\text{Donc } \frac{1}{2}ad + nd = \frac{1}{3}\frac{da^2}{x} + \frac{nda}{x}$$

$$\frac{1}{2}ax + nx = \frac{1}{3}a^2 + na$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}a^2 + na}{\frac{1}{2}a + n} \text{ ou } \frac{2a^2 + 6an}{3a + 6n}$$

[Fig. 18.]



$$\text{ou } a - \frac{a^2}{3a + 6n} = x$$

$$\text{ou } \frac{1}{2}ed + nd = \frac{1}{3}\frac{dae}{x} + \frac{nda}{x} \text{ [1]}$$

$$\frac{3}{2}ex + 3nx = ae + 3an$$

$$\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} = a, \text{ longueur de la barre}$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}ae + an}{\frac{1}{2}e + n}.$$

Autre application : ſi outre le poids inférieur Q [Fig. 19] un autre poids dont la gravité eſt repréſentée par la droite h eſt attaché à la barre ou perche peſante CD, il faudra ajouter de plus à la ſomme des produits d'une part le produit de LH par h, de l'autre celui de HG par h. En d'autres termes, poſant $CH = c$, il faudra ajouter d'une part $\frac{cdh}{a}$ et de l'autre $\frac{c^2dh}{ax}$. En effet, cette dernière expreſſion eſt le produit de HG par h, parce qu'à cauſe de la forme parabolique de EGC on peut poser (DC ou a^2) : (HC ou c^2) $= \left(\text{ED ou } \frac{da}{x}\right)$: HG, d'où l'on tire $HG = \frac{c^2d}{ax}$.

invenitur ad ſummam productorum ex una parte, quæ erat triangulum CQS, addendum productum ex n in QS, hoc eſt, nd; ex altera vero ubi erat ſpatium CDE, addendum productum ex n in DE, nempe $\frac{nda}{x}$.

Ergo
$$\frac{1}{2}ad + nd \infty \frac{1}{3}\frac{daa}{x} + \frac{nda}{x}$$

$$\frac{1}{2}ax + nx \infty \frac{1}{3}aa + na$$

$$x \infty \frac{\frac{1}{3}aa + na}{\frac{1}{2}a + n} \quad \text{sive} \quad \frac{2aa + 6an}{3a + 6n}$$

$$\text{sive } a - \frac{aa}{3a + 6n} \infty x$$

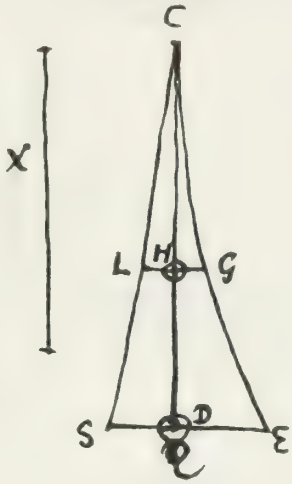
$$\frac{1}{2}ed + nd \infty \frac{1}{3}\frac{dae}{x} + \frac{nda}{x}\ ^{1)}$$

$$\frac{3}{2}ex + 3nx \infty ae + 3an$$

$$\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} \infty a \text{ longitudo virgæ}$$

$$x \infty \frac{\frac{1}{3}ae + an}{\frac{1}{2}e + n}$$

[Fig. 19.]



Porro autem ſi virgæ vel baculo ponderanti CD [Fig. 19], praeter pondus infimum Q affixum ſit aliud pondus H cujus gravitas exprimatur recta h, addendum erit inſuper ad ſummam productorum ex una parte productum ex LH in h; ex altera vero productum ex HG in h. hoc eſt, poſita CH ∞ c, inde addendum erit $\frac{cdh}{a}$; hinc $\frac{ccdh}{ax}$; hoc enim eſt productum ex HG in h, quia propter parabolam EGC, ſi fiat ut quadratum DC ∞ aa, ad quadr. HC ∞ cc, ita ED ∞ $\frac{da}{x}$ ad HG, fit hinc $\frac{ccd}{ax}$.

[1]) L'auteur répète le calcul en désignant cette fois le poids Q par la ligne e au lieu de la ligne a, conformément à la note 3 de la p. 422.

Par conſéquent $\frac{1}{2}ed + nd + \frac{cdh}{a} = \frac{1}{3}\frac{aed}{x} + \frac{adn}{x} + \frac{c^2dh}{ax}$

$$\frac{1}{2}aex + nax + chx = \frac{1}{3}a^2e + a^2n + c^2h$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}a^2e + a^2n + c^2h}{\frac{1}{2}ae + an + ch}.$$

De la même équation on peut auſſi tirer c, lorſque x et les autres grandeurs ſont données. On aura en effet

$$c^2 = cx + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}$$

$$c = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}.$$

On peut également, lorſque toutes les grandeurs excepté h ſont données, trouver cette dernière. On aura en effet

$$h = \frac{a^2n - nax + \frac{1}{3}a^2e - \frac{1}{2}aex}{cx - c^2},$$

dans le cas où la longueur x eſt plus grande que c [2]).

Dans l'équation $c = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}$

il apparaît que l'expreſſion $nax + \frac{1}{2}aex$ doit être plus petite que $a^2n + \frac{1}{3}a^2e$ parce qu'autrement l'équation ne peut avoir deux racines vraies [3]).

$$nax + \frac{1}{2}aex < a^2n + \frac{1}{3}a^2e$$

$$nx + \frac{1}{2}ex < an + \frac{1}{3}ae$$

[1]) Comparez sur la signification du signe ℞ la note 5 de la p. 230 du T. XI.

[2]) L'équation est valable aussi pour $c > x$. Comparez la note 1 de la p. 428. Huygens veut dire sans doute que pour $c > x$ il serait préférable de changer les signes de tous les termes de la fraction.

[3]) Voir la note 2 de la p. 419.

Ergo
$$\frac{1}{2}ed + nd + \frac{cdh}{a} \infty \frac{1}{3}\frac{aed}{x} + \frac{adn}{x} + \frac{ccdh}{ax}$$

$$\frac{1}{2}aex + nax + chx \infty \frac{1}{3}a^2e + aan + cch$$

$$x \infty \frac{\frac{1}{3}a^2e + aan + cch}{\frac{1}{2}ae + an + ch}$$

Ex eadem vero æquatione datis ipſa x et reliquis invenietur c: erit enim

$$cc \infty cx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}$$

$$c \infty \frac{1}{2}x \text{ ℓ } ^{1)} \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}$$

Rurſus datis omnibus præter h invenietur et ipſa.
Erit enim

$$h \infty \frac{aan - nax + \frac{1}{3}a^2e - \frac{1}{2}aex}{cx - cc}$$

ſi nempe x major quam c [2]).

In æquatione
$$c \infty \frac{1}{2}x \text{ ℓ } \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}aae}{h}}$$

apparet $nax + \frac{1}{2}aex$ minus eſſe debere quam $aan + \frac{1}{3}a^2e$, quia alias duas veras radices [3]) æquatio habere nequit.

$$nax + \frac{1}{2}aex \,\|\, ^{4)} aan + \frac{1}{3}aae$$

$$nx + \frac{1}{2}ex \,\|\, an + \frac{1}{3}ae$$

---

[4]) Signe pour indiquer que le premier membre est inférieur au second. Comparez la note 15 de la p. 236 du T. XII.

$$x < \frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}$$ [1]).

Considérons un pendule d'horloge dont les demi-oscillations dénotent les secondes, lequel est donc isochrone avec un pendule simple de 38 pouces du pied de Rhynlande [2]). Supposons le poids de la barre égal à $\frac{1}{28}$ de celui du plomb qui y est suspendu; et qu'il y ait en outre un petit poids en plomb mobile possédant une gravité égale à $\frac{1}{3}$ de celle de la barre. On demande où il faut placer ce petit poids sur la barre pour que le pendule fasse avancer l'horloge d'une minute en 24 heures [3]). En multipliant 24 par 60 on obtient 1440; c'est le nombre des minutes comprises dans 24 heures. Retranchez-en une puisqu'on désire une marche plus rapide d'une minute, il en reste 1439. Or le carré du rapport $\frac{1440}{1439}$ est à peu près $\frac{1440}{1438}$ ou $\frac{720}{719}$. Par conséquent si l'on suppose la longueur du pendule simple qui était de 38 pouces divisée en 720 parties égales et qu'on donne 719 de ces parties à un autre pendule simple, l'horloge mise en mouvement par ce pendule devancera l'autre d'une minute en 24 heures [4]).

Mais comme nous supposons le pendule linéaire, composé d'un poids et d'une barre d'airain, isochrone avec le pendule simple de 720 parties, il faut

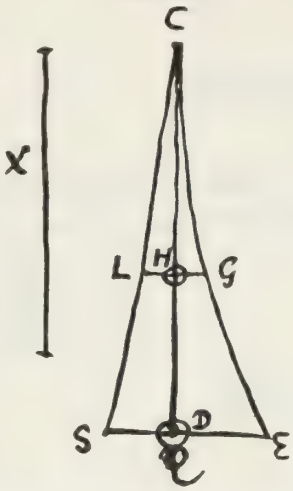
---

[1]) Huygens ne considère apparemment que les racines positives de l'équation, parce qu'il suppose que le petit poids h en H (Fig. 19) se trouve sur la barre elle-même et non pas sur son prolongement dans le sens QC. La grandeur c est donc nécessairement positive. D'après son calcul il y aura deux racines positives (deux valeurs de c inférieures à x) lorsque le pendule isochrone x, correspondant au cas où le petit poids est attaché à la barre, est plus court que le pendule isochrone $\frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}$ correspondant au cas où le petit poids est absent; ce qui indique que le petit poids se trouve pour chacune de ces valeurs de c au-dessus du centre d'oscillation tel qu'il était lorsque le petit poids était absent. Il n'est pas nécessaire cependant que c soit inférieure à x, pour que le petit poids se trouve sur la barre (et non pas sur son prolongement dans le sens CQ): théoriquement (puisque le poids Q est considéré comme un point) Huygens aurait pu considérer aussi le cas où $x > \frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}$, et par conséquent la valeur positive correspondante de $c > x$ (l'autre valeur de c étant négative), et où en même temps $c < a$. Dans ce dernier cas, contrairement au précédent, où les deux racines de l'équation étaient positives, le petit poids retardera évidemment les oscillations.

$$x \left\| \frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e} \right. \text{ [1]}$$

Sit perpendiculum horologij quod ſingulis vibrationibus ſecunda ſcrupula denotet, nempe æquipollens perpendiculo ſimplici 38 pollicum pedis Rhenolandici [2]. Gravitas virgæ ſit $\frac{1}{28}$ gravitatis appenſi plumbi; exiguum vero plumbum mobile ſit $\frac{1}{3}$ gravitatis virgæ. quæritur quo loco hoc virgæ imponendum ſit ut uno ſcrupulo primo citius ſpatio 24 horarum perpendiculum incedat [3]. Ductis 24 in 60 fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima horis 24 continentur, ex his unum aufer quia uno ſcrupulo citius petitur, ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438, ſive 720 ad 719. Ergo ſi perpendiculi longitudo quæ erat 38 unc. diviſa intelligatur in partes æquales 720, earumque 719 alij perpendiculo tribuantur, hoc perpendiculo horologium agitatum præcedet alterum illud in 24 horis uno ſcrupulo primo [4].

[Fig. 19.]



Quia autem perpendiculum, compoſitum ex pondere et virga aenea iſochronum ponitur perpendiculo ſimplici partium 720, inveniendum primum eſt virgæ

[2]) 38 pouces rhénans $= 38 \times \frac{31,39}{12}$ c.M. $= 99,40$ c.M.

[3]) A la p. 44 du Manuscrit B on trouve une colonne de chiffres indiquant les „divisiones virgæ penduli 38 pollicum secunda scrupula singulis vibrationibus facientis, in quarum divisionum punctis plumbum mobile statuere oportet, prout citius lentiusve horologium incedere cupiamus", à laquelle correspond une autre colonne de „temporis partes quibus anticipabit pendulum simpl. in 24 horis" (voir la p. 67 de notre T. IV). On y lit aussi: „plumbum mobile est $\frac{1}{3}$ ponderis virgæ aeneæ, hæc vero $\frac{1}{28}$ ponderis inferius appensi", ce qui fait bien voir que Huygens dans le calcul du texte considérait un cas réel. Comparez la lettre de Huygens à R. Moray du 30 déc. 1661 (T. III, p. 438), où il écrit: „J'ay trouuè depuis quelque temps le moien d'ajuster fort precisement a son heure mon horloge par un petit plomb mobile que j'applique a la verge de cuivre du pendule, le plomb d'en bas demeurant toujours ferme". Dans la lettre de Huygens à Moray du 17 février 1662 (T. IV, p. 59) il est question du même pendule et d'un petit poids mobile trois fois plus lourd (comparez sa lettre à Estienne du 7 sept. 1669, à la p. 490 du T. VI).

[4]) Comparez, a la p. 149 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" le texte de la Prop. XXIII („Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo secundario, quod super virga penduli, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit").

d'abord trouver la longueur de la barre à l'aide de l'équation ſuſmentionnée $\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} = a$. Or, nous avons ici

$$720 = x$$
$$28 = n$$
$$1 = e,$$

il en réſulte

$$a = 724\frac{4}{17}.$$ C'eſt la longueur cherchée.

Calculons maintenant la longueur c en nous ſervant de l'équation qu'on trouve plus haut

$$c = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}},$$

en poſant

$$\begin{cases} x = 719 \\ n = 28 \\ e = 1 \\ h = \frac{1}{3} \\ a = 724\frac{4}{17}, \end{cases}$$

c. à. d. cherchons la place du poids mobile h par la vertu duquel le pendule conſidéré, compoſé d'une barre d'airain et d'un poids de plomb à ſon extrémité inférieure, puiſſe avancer d'une minute en 24 heures.

L'équation

$$c = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{nax - na^2 + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}$$

eſt maintenant équivalente à la ſuivante :

$$c = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 3.28ax - 3.28a^2 + \frac{3}{2}ax - a^2}$$

ou $\left(\text{pour } a = 724\frac{1}{4}\right)$

$$c = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + 85\frac{1}{2}ax - 85a^2}$$

longitudo per æquationem ſuperius poſitam, $\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} \infty a$. Eſt nempe hic

$$720 \infty x$$
$$28 \infty n$$
$$1 \infty e$$

ſitque $a \infty 724\frac{4}{17}$. longitudo quæſita ∞a.

Jam ex æquatione ſuperiori

$$c \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}aae}{h}}$$

inveniamus quantitatem c poſitis

$$x \infty 719$$
$$n \infty 28$$
$$e \infty 1$$
$$h \infty \frac{1}{3}$$
$$a \infty 724\frac{4}{17},$$

hoc eſt quæramus locum plumbi mobilis h cujus ope pendulum dictum, compoſitum ex virga aenea et plumbo in ima extremitate uno 1′ citius incedat ſpatio 24 horarum.

Idem autem nunc valet æquatio

$$c \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{nax - naa + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}aae}{h}}$$

atque hæc

$$c \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx + 3.28ax - 3.28aa + \frac{3}{2}ax - aa}$$

ſive $\left(a \infty 724\frac{1}{4}\right)$

$$c \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx + 85\frac{1}{2}ax - 85aa}$$

ou

$$c = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 85\frac{1}{2}a(a - x) + \frac{1}{2}a^2}.$$

On trouve $c = 617{,}20$, comme cela reſſort du calcul ſuivant [1]).

parties	pouces		parties	pouces
720 :	38	=	617,20 :	32,574 [2])

[1]) Nous supprimons ce calcul.

[2]) C. à. d. 720 parties : 38 pouces = 617,20 parties : 32,574 pouces. Le pendule simple qui était

ſive

$$c \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - 85\frac{1}{2}a \text{ in } \overline{a - x} + \frac{1}{2}aa}$$

ſit $c \infty 617{,}20$ ut in ſubjecto calculo videri eſt [1]).

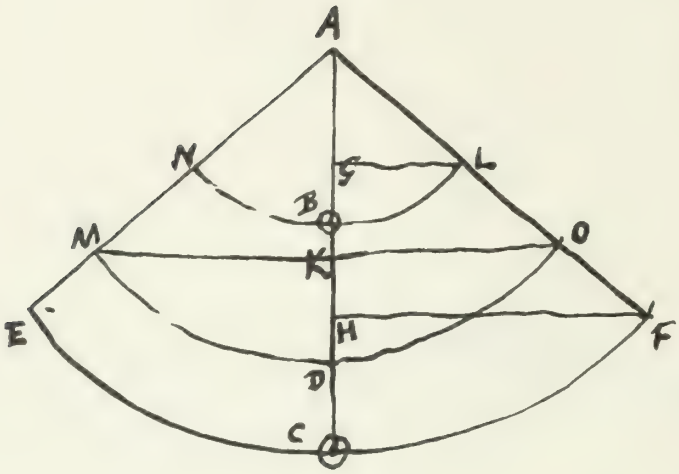
partes	pollices		
720	38	617,20	32,574 pollices [2]).

divisé en 720 parties, avait une longueur de 38 pouces. La distance du petit poids mobile *h* au point de suspension, pour laquelle on vient de trouver 617,20 parties, est donc de 32,574 pouces.

V [1].

[1664] [2].

[Fig. 20.]



Dato pendulo composito ex duabus gravitatibus in lineam inflexibilem conjunctis, invenire in ea punctum quod in transitu penduli per cathetum, eadem celeritate feratur qua pondus penduli simplicis cujus longitudo æqualis distantiæ dicti puncti a puncto suspensionis. et ostendere quod pendulum hoc simplex composito isochronum est.

Sit compositum pendulum ABC [Fig. 20] suspensum in A, pondera habens B et C. idque cadere intelligatur ex AE in AC. Manifestum igitur est pondus B minorem celeritatem in B acquisivisse quam si solum pendulo longitudinis AB annexum fuisset, quia pondus C ex longitudine AC agitatum, celeritatem brevioris penduli non assequitur, ideoque ex parte remoratur. At rursus pondus C celeritatem majorem in C acquisivit quam pondus penduli simplicis longitudinis AC, quia a pondere B celeriorem motum affectante aliquatenus impellitur, idque tanto magis quanto ipsum B respectu C majus erit. Itaque inter B et C punctum aliquod reperiri necesse est ut D quod perveniente pendulo ABC ex AE in AC, tantam celeritatem

[1]) Manuscrit B, p. 188—190.

acquiſiverit quantam haberet pondus ſimplicis penduli longitudinis AD peracto arcu ſimili MD. Quod itaque punctum D ut inveniatur, ſit AC ∞ d, AB ∞ e; quantitas ponderis C vocetur c; quantitas ponderis B vocetur b. ductisque FH, LG et MK perpendicularibus in AC, vocetur altitudo HC, h. Quæſita vero longitudo AD ſit x.

Quum igitur ſit AC ad CH ut AD ad DK, itemque ut AB ad BG, erit DK ∞ $\frac{hx}{d}$, BG ∞ $\frac{he}{d}$. Jam quia punctum D eam celeritatem acquirit quam haberet pondus penduli ſimplicis AD poſt deſcenſum per arcum MD, hoc eſt eam, qua id pondus ad eandem unde venerat altitudinem per arcum DO aſcenſurum eſſet, hoc eſt ad altitudinem DK ∞ $\frac{hx}{d}$, cumque celeritas puncti D ad celeritatem ponderis C ſit ſicut AD ad AC hoc eſt ſicut x ad d. ſicut autem quadratum celeritatis puncti D ad quadr. celeritatis ponderis C, ita altitudo ad quam aſcenditur celeritate puncti D, hoc eſt altitudo DK ∞ $\frac{hx}{d}$ ad altitudinem ad quam aſcenderet pondus C ſi poſt deſcenſum per arcum EC a pendulo compoſito liberum evaderet. Si igitur fiat ut xx ad dd ita $\frac{hx}{d}$ ad aliud, nempe $\frac{dh}{x}$, hoc deſignabit altitudinem ad quam aſcenderet pondus C. Eadem ratione altitudo ad quam aſcenderet pondus b invenitur ∞ $\frac{e^2h}{dx}$. ductis autem utriſque altitudinibus hiſce in ſua pondera, ſumma productorum, quæ erit $\frac{chdd + heeb}{dx}$, æqualis ſit oportet ſummæ productorum ex altitudine HC in pondus C, et ex altitudine BG in pondus b, quæ eſt $hc + \frac{heb}{d}$, quia nimirum poſterior ſumma æquatur producto ex deſcenſu centri gravitatis communis ponderum C et B in ipſa pondera, prior vero producto ex aſcenſu centri gravitatis dictorum ponderum in eadem pondera, quæ producta æqualia inter ſe eſſe neceſſe eſt, cum aſcenſus centri communis gravitatis æqualis ſit deſcensui ſuo. Itaque

$$\frac{chdd + bhee}{dx} \infty hc + \frac{heb}{d}.$$

---

[2]) La p. 171 est datée: 7 oct. 1664, et la p. 214 porte la date du 28 oct. 1664. Entre la p. 187 et la p. 188 quelques feuillets ont été collés dans le Manuscrit; le premier de ces feuillets (voir la p. 467) porte la date du 13 oct. 1664.

En 1928, les feuillets qui constituent le Manuscrit B ont été numérotés de nouveau. Cette numération nouvelle embrasse aussi les feuillets collés dans le Manuscrit. Nous continuerons cependant à citer le texte d'après la numération ancienne, sauf dans les cas où il s'agit d'un des feuillets collés dans le Manuscrit.

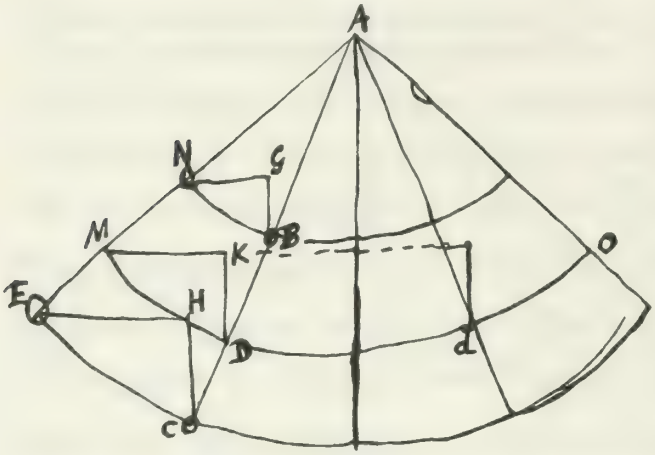
In qua æquatione deleto ubique h et reliquis ut opus eſt tranſpoſitis fit

$$\mathrm{AD}\, x \infty \frac{cdd + bee}{cd + be}.$$

Oportet itaque ſingulas gravitates ducere in longitudines à quibus affixæ ſunt; et ut ſumma horum productorum ad producta ſingula, ita facere ſingulas longitudines, reſpective ad alias; hæ enim ſimul additæ conſtituent diſtantiam inter A et punctum D [1]).

Quod ſi vero quæratur in dicto pendulo compoſito punctum D quod deſcenſu penduli ex AE in AC, ita ut EC ſit pars tantum arcus deſcendentis, velocitatem eam acquirat quam pondus penduli ſimplicis longitudinis AD acquireret peracto arcu ſimili: notatis rurſus altitudinibus arcuum EC, MD, NB, quæ ſint CH, DK, BG, quæque eandem et hic inter ſe rationem ſervant quam longitudines CA, DA, BA: Eodem quo prius ratiocinio, literis eadem denotantibus, invenietur longitudo AD eadem quæ et ante reperta fuit, nempe $x \infty \frac{cdd+bee}{cd+be}$:

[Fig. 21.]



Quum igitur punctum D in pendulo ABC ita ut ſupra repertum, quolibet loco arcus per quem tranſit, ea velocitate feratur qua pondus penduli ſimplicis longitudine AD, perſpicuum est pendulum hujus longitudinis eodem tempore cum pendulo compoſito ABC ſemioſcillationem perficere per arcum ſimilem. Unde et per arcum aſcendentem eadem celeritate feretur. ut ex prop... [2]) manifeſtum. Adeoque pendulo compoſito iſochronon erit. Atque hoc de quibuslibet pendulis compoſitis

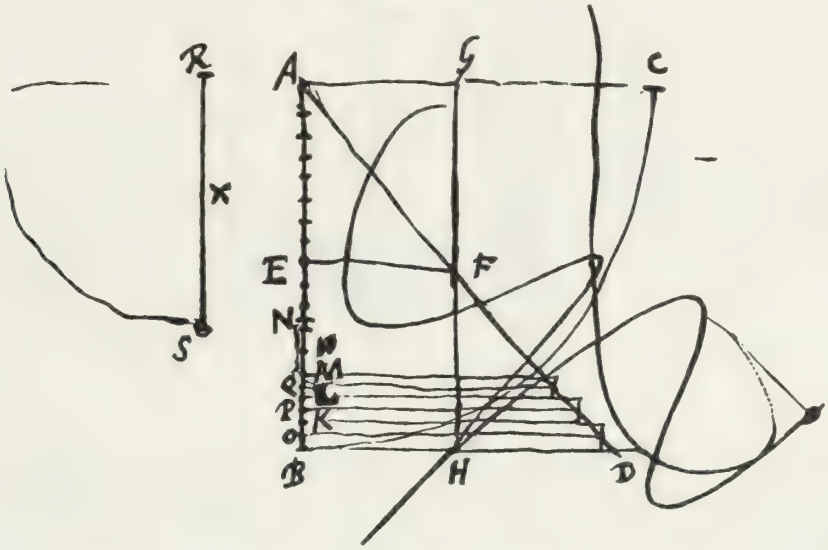
[1]) C. à. d. on a: $\mathrm{AD} = \alpha + \beta$, où $cd + be : cd = d : \alpha$ et $cd + be : be = e : \beta$. Comparez la quatrième ligne de la p. 419.

[2]) Huygens n'avait apparemment pas encore mis par écrit la proposition qu'il jugeait à propos de citer.

eadem ratione verum eſt. unde et vice verſa conſtat, pendulum ſimplex quod compoſito iſochronon eſt, ſi æquali angulo cum pendulo compoſito removeatur a perpendiculari, atque inde cadere permittatur, ſemper plumbum penduli ſimplicis peractis ijsdem angulis cum compoſito, eam celeritatem habere quam punctum in compoſito quod longitudine penduli ſimplicis diſtat a ſuſpenſione.

Virgae ponderanti ſive lineae rectae gravitate praeditae, alteroque capite ſuſpenſae, pendulum ſimplex iſochronon reperire[3]).

[Fig. 22.]

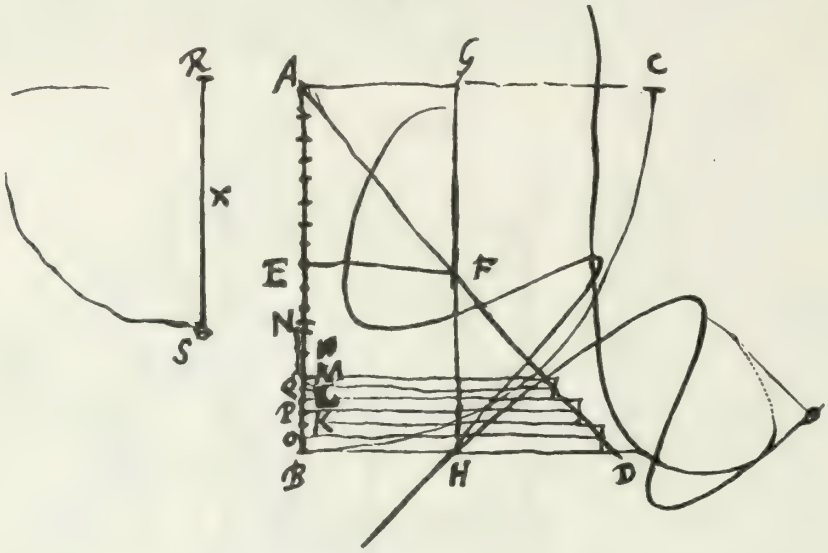


Sit virga ponderans AB [Fig 22] ſuſpenſa in A, cui iſochronon quæratur pendulum ſimplex RS. Sit AB ∞ *a*. diviſaque intelligatur virgae longitudo in partes æquales BK, KL, LM &c. quarum ſingulæ vocentur *e*. ſintque centra gravitatis dictarum partium O, P, Q &c; itaque æqualiter quoque ſeſe excedent

[3]) Toute cette partie jusqu'à la fin de la Pièce IV a été biffée par Huygens, comme on peut le voir dans la Fig. 22. Nous la reproduisons néanmoins parce qu'elle conduit pour le cas considéré de la barre ou ligne pesante d'une façon très simple à l'équation qui donne la longueur x du pendule simple isochrone, savoir $\frac{1}{2} a^2 x = \lim. \sum_{o}^{a} y^2 \Delta y$.

lineæ AO, AP, AQ &c. quæ dicantur, b, c, d, &c. Penduli vero ſimplicis quæſiti longitudo RS ſit x; quod cum iſochronon debeat eſſe virgæ AB, eodem igitur tempore peragent arcus ſimiles, quos quadranti integro æquales ponamus, ita ut virga AB cadat ex AC in AB, poſito angulo BAC recto. Eritque celeritas puncti O ubi virga venerit in AB ad celeritatem ponderis penduli S ſimiliter per quadrantem moti, ſicut longitudo OA, ſive b, ad x. ſimiliterque celeritas puncti P ad celeritatem ponderis penduli S ut AP, ſive c, ad x, atque ita porro. Sicut autem

[Fig. 22.]



quadratum xx ad quadratum AO hoc eſt bb, ita erit altitudo ad quam aſcendet pondus S ad altitudinem qua aſcendere poterit pars virgæ BK ſi libera atque a virga reliqua ſeparata fieri intelligatur poſtquam cum ipſa venit ex AC in AB.

Atqui pondus S aſcendit ad eandem unde venit altitudinem quae eſt SR ∞ x. Ergo quia ut xx ad bb ita x ad $\frac{bb}{x}$, erit $\frac{bb}{x}$ altitudo dicta ad quam pars virgæ BK uti diximus aſcenderet. Simili ratione altitudo ad quam aſcenderet pars KL invenitur ∞ $\frac{cc}{x}$, et altitudo ad quam aſcenderet pars LM eodem modo fit $\frac{dd}{x}$. et ſic de cæteris. ductis porro ſingulis hisce altitudinibus in partes virgæ æquales e, quarum centra gravitatis ſunt O, P, Q, fit ſumma productorum $\frac{bbe}{x} + \frac{cce}{x} + \frac{dde}{x}$ &c quæ quidem ſumma æqualis eſſe debet producto ex diſtantia centri gravitatis virgæ à puncto ſuſpenſionis quæ est $\frac{1}{2}a$ in ipſam virgam a, quia ita centrum gravitatis

partium omnium e, ſurſum motarum poſtquam a virga liberae ſunt, tantundem aſcendiſſe reperietur atque centrum gravitatis virgæ, hoc eſt partium earundem omnium, deſcendit, quod neceſſario fieri debere oſtenſum eſt ſupra prop... [1]). Eſt itaque

$$\frac{bbe + cce + dde \,\&c}{x} \infty \frac{1}{2} aa,$$

ductisque omnibus in x, fit

$$bbe + cce + dde \,\&c \infty \frac{1}{2} aax \text{ [2])}.$$

Sit jam BD æqualis AB cui inſiſtat ad angulos rectos, et ſit AN æqualis diſtantiæ centri gravitatis trianguli ABD ab recta AC, hoc eſt, ſit AN $\infty \frac{2}{3} a$ [3]).

---

[1]) Même remarque que plus haut, note 2 de la p. 436.

[2]) Ce qu'on pourrait écrire (comparez la note 3 de la p. 437) $x = \frac{2}{a^2}\int_0^{a} y^2 dy$.

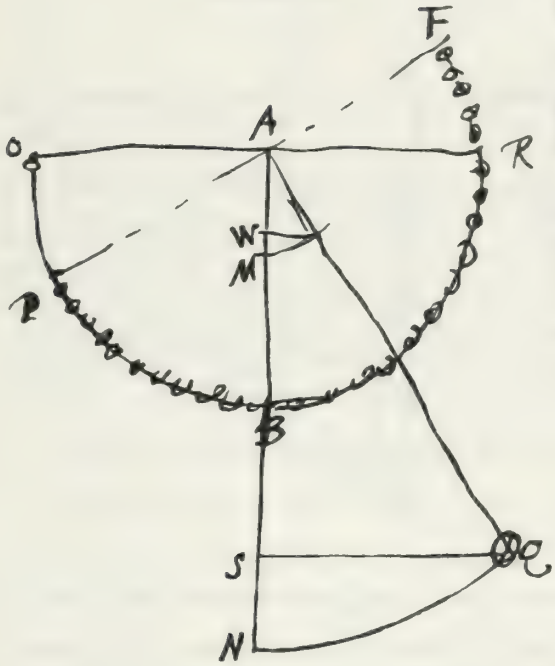
[3]) Huygens n'a pas achevé ce morceau. On peut trouver la limite de la somme considérée $bbe + \ldots$ (ou $\int_0^{a} y^2 dy$) en multipliant la surface du triangle ABD par le double de la distance de son centre de gravité à la droite AB, c. à. d. par AN, suivant le théorème de Pappus, mieux connu sous le nom de théorème de Gulden ou Guldin, dont Huygens fait mention en 1653 (voir la note 5 de la p. 280 du Tome XIV): il faut considérer le cône engendré par la révolution du triangle ABD autour de AB. On trouve ainsi $x = \frac{2}{3} a$.

VI [1]).

[1664] [2]).

[Première Partie] [3]).

[Fig. 23.]



BR ∞ q [Fig. 23 [4])]
RA ∞ r M centrum gravitatis $\frown$
AM ∞ $\frac{rr}{q}$
MW ∞ c
AN ∞ x [5])

AM	MW	AN	NS
$\frac{rr}{q}$	c	x	$\frac{cxq}{rr}$ [6])

[1]) La Pièce est empruntée aux pages 61—64 du Manuscrit B.

[2]) La p. 59 porte la date du 7 oct. 1662, les pp. 62 et 63 celle du 18 sept. 1664. Comme le sujet traité dans les pages précédentes n'a aucun rapport avec la recherche des centres d'oscillation, tandis que les pp. 61, 62, 63 et 64 y sont toutes consacrées, il est probable que la p. 61 fut écrite peu de temps avant les suivantes. Comparez d'ailleurs la lettre du 10 oct. 1664 de Huygens à Moray (T. V, p. 120) où il dit: „Ces jours passez je suis tombé dans une speculation... J'ay cerché des pendules simples isochrones a des triangles et autres figures et corps, diversement suspendus", etc.

[3]) Manuscrit B, p. 61.

[4]) Comme la figure l'indique, Huygens se propose de calculer la longueur du pendule isochrone avec une demi-circonférence de cercle, suspendue au centre de ce cercle; il suppose à cet effet la demi-circonférence composée d'une infinité de globules.

[5]) C'est la longueur du pendule isochrone.

[6]) C. à. d. NS $= \frac{cxq}{r^2}$ d'après l'équation $\frac{r^2}{q} : c = x : \text{NS}$.

ut qu. celer.is ponderis N ad qu. celer.is ponderum in ⌒ alt. NS

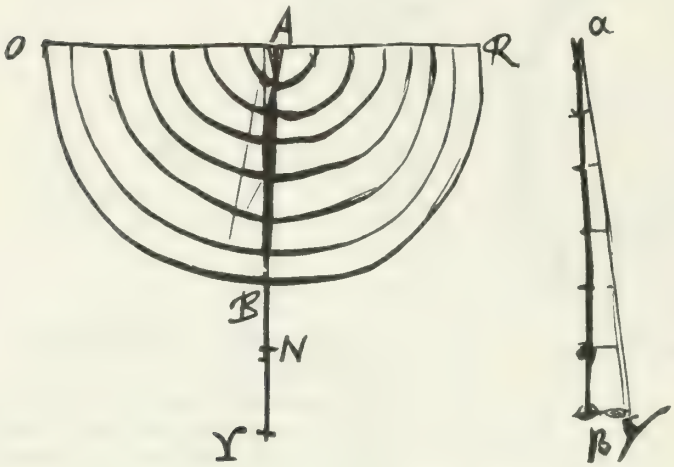
$$xx \text{ ---------- } rr \text{ ---------- } \frac{cxq}{rr}$$

altitudo ad quam aſcendent ſingula pondera ſemicircumferentiæ FBP [1])

$$\frac{\frac{cq}{x} \infty c \text{ [1])}}{q \infty x}$$

Ergo longitudo penduli AN ſemicircumferentiæ OBR ex A centro ſuſpenſæ iſochroni, debet æqualis eſſe ipſi quadranti BR.

[Fig. 24.]



Hinc ſemicirculo OBR [Fig. 24] iſochronon pendulum AN habebit $\frac{3}{4}$ quadrantis RB, quantum nempe pendulum iſochronon triangulo $\alpha\beta\gamma$, cujus longitudo $\alpha\beta$ æqualis AY ſeu quadranti RB [2]).

[1]) L'équation $x^2 : r^2 = \frac{cxq}{r^2}$: altitudo ad quam etc., d'où l'on tire que cette dernière hauteur est $\frac{cq}{x}$, s'obtient par la considération que, si à un moment donné (le moment où le diamètre PF, Fig. 23, est horizontal) les globules sont mis en liberté et s'élèvent chacun à la plus grande hauteur possible, l'ascension est la même pour chacun d'eux puisqu'ils ont tous la même vitesse. Le centre de gravité s'élève donc autant que chaque globule. Mais dans le mouvement réel ce centre s'élève à la hauteur c. Les deux hauteurs doivent être égales d'après le principe fondamental mentionné à la p. 386 dans la note 4 de la p. 385.

[2]) Pour trouver la longueur du pendule isochrone avec un demi-cercle suspendu au centre de ce cercle et oscillant dans son plan, Huygens suppose, comme la figure l'indique, le demi-cercle divisé par une infinité de demi-circonférences concentriques et équidistantes. D'après le résultat obtenu plus haut les longueurs des pendules isochrones avec chaque partie S du plan comprise entre deux demi-circonférences avoisinantes sont connues. Comme dans le cas du triangle isoscèle, où il exprime clairement cette idée (voir la p. 453 qui suit), Huygens

admet que pour obtenir la longueur du pendule isochrone avec le demi-cercle, il suffit de prendre celle du pendule isochrone avec l'ensemble des „masses" oscillantes des pendules isochrones correspondant à toutes les parties S du plan, en donnant à chaque pendule le poids (ou la masse) de la partie correspondante du plan. Cette proposition est correcte dans le cas considéré quoiqu'en général on arriverait à un résultat erroné si l'on découpait à cet effet un plan (ou corps) oscillant en des parties quelconques. Comme Huygens n'indique pas son raisonnement dans le cas du demi-cercle, nous nous contenterons ici de faire voir comment on pourrait obtenir la longueur du pendule isochrone par la considération directe du mouvement des globules dont le demi-cercle se compose par hypothèse.

Le centre de gravité du demi-cercle est situé à une distance $\frac{2}{3}\frac{r^2}{q}$ du point A. Si nous appelons c' l'ascension de ce centre de gravité dans le mouvement réel, x' la longueur du pendule isochrone avec le demi-cercle et N'S' l'ascension de la masse oscillante du pendule isochrone, nous aurons, comme plus haut (voir la dernière équation de la p. 441),

$$\frac{2}{3}\frac{r^2}{q} : c' = x' : \mathrm{N'S'}, \text{ d'où } \mathrm{N'S'} = \frac{3}{2}\frac{c'x'q}{r^2}.$$

Ensuite $x'^2 : r^2 = \frac{3}{2}\frac{c'x'q}{r^2}$: la hauteur dont monte chacun des globules libérés de la demi-circonférence extérieure. Cette hauteur est donc $\frac{3}{2}\frac{c'q}{x'}$. Elle est égale à l'ascension du centre de gravité des globules qui composaient la demi-circonférence ou, si l'on veut, la partie infiniment mince du demi-cercle située entre cette demi-circonférence et la demi-circonférence avoisinante. En supposant que cette partie contient n globules de „masse" 1, le produit de sa masse par l'ascension nommée sera $\frac{3}{2}n\frac{c'q}{x'}$. Si nous supposons en outre que le demi-cercle est découpé en tout en n parties S, il faudra accorder p globules à la $p^{\text{ième}}$ partie S, et le produit de sa masse par l'ascension du centre de gravité correspondant, lorsque tous les globules s'élèvent librement, sera $\frac{3}{2}n\frac{c'q}{x'}\left(\frac{p}{n}\right)^3$. La somme des produits pour toutes les parties S sera $\frac{3}{2}\frac{c'q}{n^2x'}[n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots 1]$.

Le nombre total des globules étant $\frac{1}{2}n(n+1)$, le produit de la masse totale par l'ascension de son centre de gravité dans le mouvement réel sera $\frac{1}{2}n(n+1)c'$.

En égalant les deux expressions on trouve pour $n \to \infty$

$$\frac{3}{8}n^2\frac{c'q}{x'} = \frac{1}{2}n^2c' \quad \text{donc} \quad x' = \frac{3}{4}q.$$

Mais ce raisonnement paraît trop algébrique pour pouvoir être considéré comme un raisonnement de Huygens. Comparez les notes 2 et 3 des p. 448 et 449. Voir aussi pour un raisonnement plus géométrique dans un cas analogue la Deuxième Partie de la Pièce XII qui suit (p. 489).

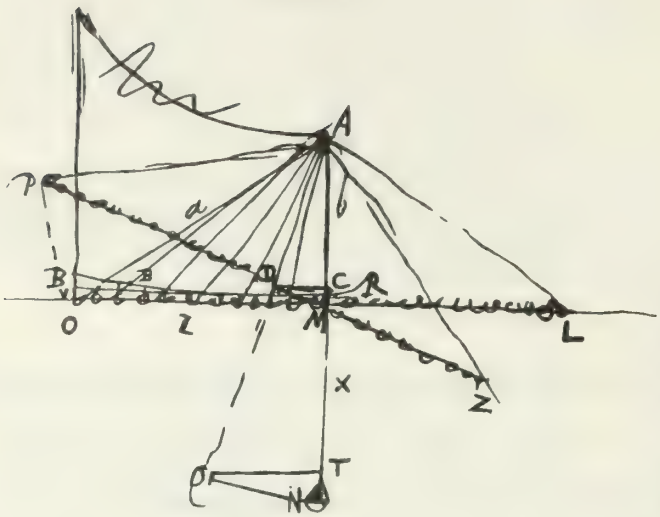
On peut démontrer (voir l'Avertissement qui précède) que la méthode de Huygens est bonne dans tous les cas où le point de suspension est le centre de similitude d'une infinité de courbes qui découpent la surface plane considérée en des parties infiniment minces de largeur constante. Cette démonstration mathématique ne suffit cependant pas pour faire voir pourquoi Huygens lui-même admet ici l'exactitude de ce procédé comme une chose évidente.

Le triangle $\alpha\beta\gamma$ [Fig. 24], qui représente l'ensemble des masses oscillantes des pendules isochrones avec les parties S du demi-cercle, est évidemment infiniment mince et peut donc

[Deuxième Partie] [1]).

18 Sept. 1664.

[Fig. 25.]



AO ∞ a
AM ∞ b
AN ∞ x
MC ∞ c
OM ∞ z
TN ∞ $\frac{cx}{b}$

AM [Fig. 25] eſt virga ſine pondere, OML linea gravitate prædita virgæ AM affixa immobiliter ad angulos rectos.

Suſpenſio eſt in A. Quæritur pendulum AN iſochronon lineæ OL ex A ſuſpenſæ.

Pendulum AN receſſiſſe ponatur a perpendiculo in AQ. virgaque OL in PZ, ita ut medium ejus punctum D incidat in AQ rectam. Si ergo iſochrona ſunt, fiet revertente Q ad N ut ſimul P redeat in O. ſicut autem AN, x, ad AO, a, ita erit celeritas plumbi N reverſi ex Q ad celeritatem globuli O (nam virgam OL ex minimis globulis compoſitam fingo) reverſi ex P. Plumbum N autem celeritatem habet qua aſcendat ad eandem ex qua venit altitudinem hoc eſt ad altitudinem NT ∞ $\frac{cx}{b}$. Et ſicut quadratum celeritatis plumbi N ad quadratum celeritatis globuli O, ita eſt altitudo ad quam aſcendere poteſt plumbum N ad altitudinem ad quam aſcendere poterit globulus O. Ergo faciendo ut xx ad aa ita $\frac{cx}{b}$ ad $\frac{aac}{bx}$, erit hæc altitudo ad quam aſcendet globulus O. Eſt autem aa ∞ $bb + zz$. unde

$$\frac{aac}{bx} \infty \frac{bbc + zzc}{bx} \text{ quæ ſit OB.}$$

être considéré comme un pendule linéaire. Huygens n'indique pas la méthode d'„intégration" suivie pour trouver le centre d'oscillation de ce pendule linéaire (voir sur les pendules linéaires les Pièces II et IV qui précèdent).

[1]) Manuscrit B, p. 62—64.

[2]) Voir la note 1 de la p. 282 de ce Tome.

[3]) Voir les p. 421—423.

Quod ſi MO ſeu z indeterminata ſumatur, ad inveniendam altitudinem ad quam aſcendent ſinguli globuli lineæ OM; eaque altitudo vocetur y, patebit ex æquatione inventa $\frac{bbc + zzc}{bx} \infty y$, terminos linearum y cadere in parabolam. fit enim

$$zz \infty \frac{bxy - bbc}{c}$$

$$\text{et } z \infty \sqrt{\frac{bxy - bbc}{c}}.$$

Ergo latus rectum [2]) parabolæ eſt $\frac{bx}{c}$, axis MA, vertex vero R diſtat ab M intervallo $\frac{cb}{x} \infty$ MR. parabola ergo eſt RB. Jam vero omnes altitudines BO vel y ductæ ſingulæ in globulos ſuos ſimul æquari debent producto omnium eorundem globulorum in altitudinem MC, ut intelligitur ex ſuperius demonſtratis ubi agebatur de pendulo virgæ iſochrono [3]). Itaque ſi globulorum quantitates exprimi putemus particulis æqualibus rectæ OL quibus centra globulorum inter ſe diſtant, debebit ſpatium comprehenſum rectis BO, OM, MR et parabola RB æquale eſſe rectangulo OM, MC. Illud vero ſpatium compoſitum eſt ex rectangulo OM, MR et ex trilineo BVR, ergo hæc quæruntur. MR erat $\frac{cb}{x}$. Ergo ▭ OM, MR, $\frac{cbz}{x}$. OB erat $\frac{bbc + zzc}{bx}$ ſive $\frac{bc}{x} + \frac{zzc}{bx}$ unde ablata MR ſive OV $\infty \frac{cb}{x}$, relinquitur VB $\infty \frac{zzc}{bx}$, unde ▭ BV, VR $\infty \frac{cz^3}{bx}$; et triens ejus trilineum BVR $\infty \frac{\frac{1}{3}cz^3}{bx}$ quo addito ad ▭ OM, MR, fit

$$\frac{\frac{1}{3}cz^3}{bx} + \frac{cbz}{x} \infty cz \qquad \text{rectangulo nimirum OM, MC.}$$

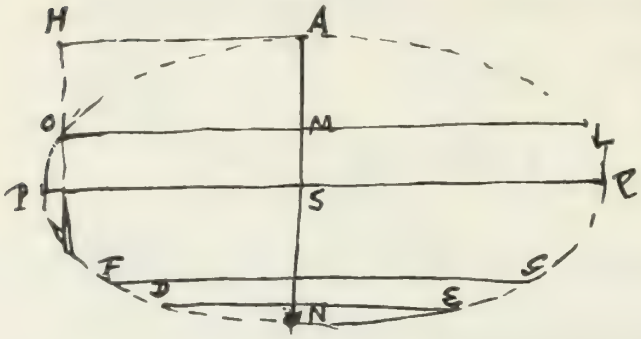
$$\frac{1}{3}cz^3 + cbbz \infty bcxz$$

$$\frac{1}{3}zz + bb \infty bx$$

$$\frac{\frac{1}{3}zz}{b} + b \infty x$$

18 Sept. 1664.

[Fig. 26.]



AN [Fig. 26] eſt linea ſine pondere rigida ſuſpenſa ex A. Volo in puncto M affigere ei ad rectos angulos virgam ponderantem OL, cujus oſcillationes iſochronæ ſint pendulo datæ longitudinis AN.

Sit AN ∞ a
AM ∞ x
MO ∞ y
MO vel AH

Ergo per præcedentem debet eſſe $\frac{1}{3}\frac{yy}{x} + x \infty a$

$$\frac{1}{3}yy + xx \infty ax$$

$$xx \infty ax - \frac{1}{3}yy$$

$$x \infty \frac{1}{2}a \,\&\, \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{3}yy}$$

Patet ex hac æquatione punctum O eſſe ad Ellipſin cujus axis AN. centrum S punctum. quod AN bifariam dividit. Latus rectum vero axis AN triplum [1]). Sive axis major PQ triplus lateris recti minoris [2]) id eſt ſecundum quod poſſunt applicatæ ad axem eundem PQ [3]).

Hinc facile colligitur planum ellipſis hujusmodi APNQ ſuſpenſum ex A termino axis minoris, oſcillationes æquediuturnas habere ac pendulum cujus longitudo AN ipſe axis minor.

Sed et pars quælibet hujus ellipſis abſciſſa linea ad axem PQ parallela uti pars DNE vel AOL, pendulo AN iſochrona erit. Vel item duabus parallelis abſciſſa ut FGED vel OLGF [4]).

---

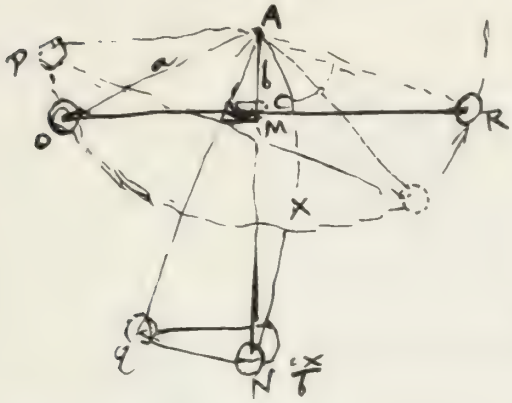
[1]) C. à. d. $3\mathrm{AN} = \frac{\mathrm{PQ}^2}{\mathrm{AN}}$.

[2]) C. à. d. $\mathrm{PQ} = 3\frac{\mathrm{AN}^2}{\mathrm{PQ}}$.

[3]) C. à. d. si l'on prenait PQ pour axe des y et la perpendiculaire en P à cet axe pour axe des x, l'équation de l'ellipse serait $x^2 = py - \frac{p}{\mathrm{PQ}}y^2$, en désignant par p le „latus rectum minus" $\frac{\mathrm{AN}^2}{\mathrm{PQ}}$.

[Troisième Partie] [5]).

[Fig. 27.]



AC et OMR [Fig. 27] ſunt lineæ rigidæ [6]), O et R pondera æqualia, A punctum ſuſpenſionis. Quæritur perpendiculum ſimplex AN cujus oſcillationes iſochronæ ſint oſcillationibus ponderum O, R ex A ſuſpenſorum. ut AM ad AO ita ſit hæc ad AN. erit AN longitudo perpendiculi quæſita [7]).

b —— c —— x [8])

ut x —— a [9]) ita celer. N ponderis ad celer. ponderis O.

xx —— aa —— $\frac{cx}{b} / \frac{aacx}{bxx} \infty c$, altitudo ad quam aſcendet O converſo motu ſurſum poſt deſcenſum PO [10]).

$$\frac{aa \infty bx}{\frac{aa}{b} \infty x}$$

---

[4]) Cette proposition fut annoncée par Huygens à Moray dans sa lettre du 10 oct. 1664 (voir la p. 120 du T. V).

[5]) Manuscrit B, p. 64 et p. 61.

[6]) AC et OMR sont impondérables.

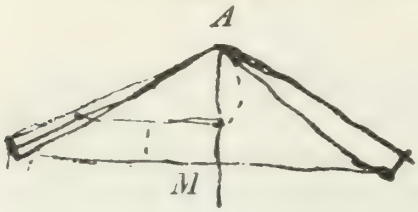
[7]) C'est le résultat du calcul suivant.

[8]) Lisez b —— c —— $x / \frac{cx}{b}$, c. à. d. $b : c = x : \frac{cx}{b}$. Comme la figure l'indique, b désigne la longueur AM, et x celle du pendule isochrone AN. c désigne la hauteur à laquelle s'élève le point M, centre de gravité des poids O et R, à partir du moment où la barre impondérable qui porte les deux poids est horizontale. $\frac{cx}{b}$ sera donc la hauteur qu'atteint le point pesant N.

[9]) C. à. d. $x : a$, où a désigne la distance OA.

[10]) $\frac{a^2c}{bx}$, quatrième terme de l'équation $x^2 : a^2 = \frac{cx}{b} : \frac{a^2c}{bx}$, est la hauteur à laquelle peut s'élever le poids O (ou le poids égal R), lorsque les deux poids O et R sont mis en liberté au moment où la droite OR est horizontale. Comme les deux poids ont la même vitesse, leur centre de gravité, lorsqu'ils exécutent ce mouvement libre, monte autant qu'eux-mêmes. D'après le principe fondamental (voir toujours à la p. 386 la note 4 de la p. 385) cette ascension du centre de gravité est égale à l'ascension du centre de gravité dans le mouvement réel, c. à. d. à c.

[Fig. 28.]



triangula [Fig. 28] [1])

$$\frac{2}{3}c$$
$$\frac{4}{8}$$
$$\frac{8}{3}c$$

$$\frac{aac}{bx} \infty \frac{8}{6}c$$
$$6aa \infty 8bx$$
$$\frac{3}{4}\frac{aa}{b} \infty x \text{ [2])}$$

[Fig. 29.]

pyramides [Fig. 29]

$$\frac{3}{4}$$
$$\frac{5}{15}$$
$$\frac{15}{4}$$

$$\frac{15}{12}c \infty \frac{aac}{bx}$$
$$15bx \infty 12aa$$
$$x \infty \frac{4}{5}\frac{aa}{b} \text{ [3])}$$

---

[1]) Huygens cherche la longueur x du pendule simple isochrone avec un pendule composé de deux triangles infiniment aigus, symétriques par rapport à AM (les lettres A et M ont été ajoutées par nous).

[2]) Dans ce calcul la fraction $\frac{aac}{bx}$ a la même signification que dans le calcul précédent (voir la note 10 de la p. 447) : c'est la hauteur à laquelle la base (ou un globule de la base) de chaque triangle peut s'élever si cet élément est mis en liberté au moment où la droite AM est verticale. Les lettres a et b désignent les mêmes longueurs que précédemment (comparez la Fig. 29). La hauteur à laquelle s'élève le point M dans le mouvement réel est désignée par c; le centre de gravité des deux triangles s'élève donc à la hauteur $\frac{2}{3}c$. Par un calcul analogue à celui de la note 2 de la p. 442 on obtient, lorsque l'unité de longueur est infiniment petite,

$$\frac{c}{bx}[a^3 + (a-1)^3 + \ldots + 1] = \frac{2}{3}c[a + (a-1) + \ldots + 1],$$

ce qui se réduit à $\frac{aac}{bx} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}c \cdot \frac{1}{2}$, ou à $\frac{aac}{bx} = \frac{8}{6}c$, conformément à l'équation de Huygens (qui intègre géométriquement, comparez à la p. 443 le sixième alinéa de la note 2).

Plus tard Huygens calcule la valeur de x d'après la méthode générale pour les surfaces planes, mentionnée dans la note 2 de la p. 455 (voir la p. 533 qui suit).

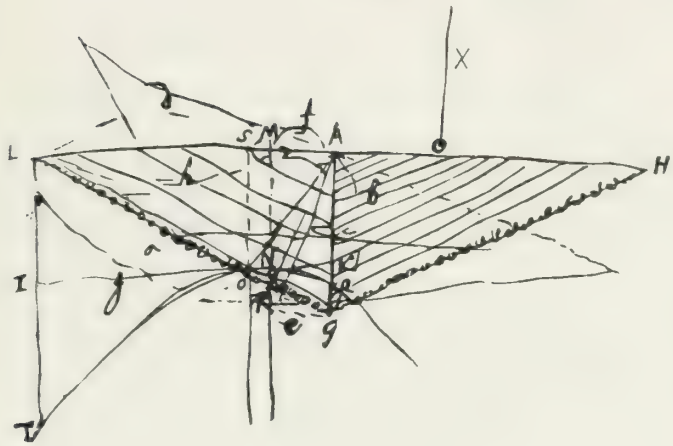
On pourrait obtenir immédiatement la valeur de x en appliquant au résultat du calcul précédent la „méthode des trois quarts" (voir la note 6 de la p. 453).

VII [4].

[1664] [5].

[Première Partie] [6].

[Fig. 30.]



AL ∞ d
AG ∞ b
LG ∞ a

Virga LH [Fig. 30] ſine pondere. LG, GH virgæ ponderantes. A medium LH eſt punctum ſuſpenſionis. Quæritur pendulum ſimplex x iſochronon LGH virgæ ex A ſuſpenſæ.

LS SO

d b ——— $d - z \,/\, \frac{bd - bz}{d}$ [7])

[3]) Les lettres a, b, c et x désignent les mêmes grandeurs que dans le cas précédent. Le centre de gravité des deux pyramides infiniment aigues s'élève à la hauteur $\frac{3}{4}c$. Au lieu de la formule de la note 2 on trouve ici $\frac{c}{bx}[a^4 + (a-1)^4 + \ldots + 1] = \frac{3}{4}c[a^2 + (a-1)^2 + \ldots + 1]$, ou $\frac{aac}{bx} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4}c \cdot \frac{1}{3}$, ou $\frac{15}{12}c = \frac{aac}{bx}$, conformément à la formule de Huygens.

On pourrait obtenir immédiatement la valeur de x en appliquant au résultat du calcul correspondant à la Fig. 27 une „méthode des quatre cinquièmes" analogue à la „méthode des trois quarts" (voir la note 6 de la p. 453 et les p. 367—368 de l'Avertissement).

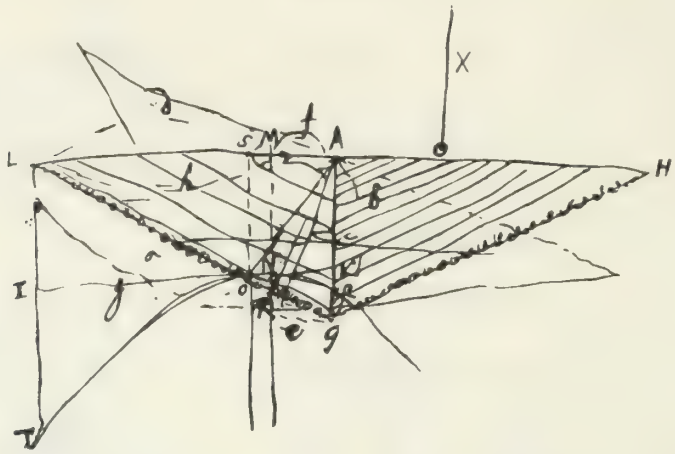
[4]) Manuscrit B, p. 164 et p. 163.

[5]) Comme le texte le fait voir, une partie de cette Pièce fut écrite le 29 sept. 1664.

[6]) Manuscrit B, p. 164.

[7]) C. à. d. LA : AG = LS : SO. Comme la figure l'indique, SA est désignée par z.

[Fig. 30.]



$$xx \;\text{—}\!\!\!\!\!\!\;\; \frac{bbdd - 2bbdz + bbzz + zzdd}{dd} \;\text{—}\!\!\!\!\!\!\;\; \frac{cx}{\frac{1}{2}b}\left[\;\text{—}\!\!\!\!\!\!\;\; y\right]^{1)}$$

sit $\frac{1}{2}b \infty c$ [2]) $\qquad\qquad \text{—}\!\!\!\!\!\!\;\; x$ [2])

$$y \infty \frac{bbdd - 2bbdz + bbzz + ddzz}{ddx}\;{}^{3)}$$

$$\frac{ddxy - bbdd + 2bbdz}{bb + dd} \infty zz$$

$bb + dd \infty aa$ $\qquad \frac{bbd}{aa} \text{ ℓ } {}^{4)} \sqrt{\frac{b^4dd}{a^4} - \frac{bbdd}{aa} + \frac{ddxy}{aa}} \infty z$

AR [5]) perpend. LG $\qquad \frac{ed}{a} \text{ ℓ } \sqrt{\frac{eedd}{aa} - \frac{edd}{a} + \frac{ddxy}{aa}} \infty z$

sit $\frac{bb}{a} \infty e$ RG

RM perpend. LA $\qquad f \text{ ℓ } \sqrt{ff - fd + \frac{ddxy}{aa}} \infty z$

$\frac{ed}{a} \infty f$ MA $\qquad f \text{ ℓ } \sqrt{ff - fd + \frac{gxy}{a}} \infty z$

$\frac{dd}{a} \infty g$ LR $\qquad f \text{ ℓ } \sqrt{-hf + \frac{hxy}{d}} \infty z$

$\frac{gx}{a} \infty \frac{\overline{d-f}\,x}{d}$

sit $d - f \infty h \infty$ LM $\qquad \frac{hx}{d} \infty$ lat. rect. parabolæ TNQ [6])

N vertex qu. IN $\frac{hh}{\frac{hx}{d}} \infty \frac{dh}{x}$ IT $\frac{df}{x}$ MN

diameter MN

$\frac{1}{3}h \quad \frac{1}{3}$ IN $\quad d$ LA

TIN $\sqrt{\infty \frac{1}{3}\frac{hhd}{x}}$ $\quad \frac{ddf}{x} \square$ AI

---

[1]) Comme x désigne la longueur du pendule isochrone et que le deuxième terme $\left(\frac{bd-bz}{d}\right)^2 + z^2$ ou AO^2 est le carré de la distance du globule O au point de suspension, l'équation $x^2 : AO^2 = \frac{cx}{\frac{1}{2}b} : y$ (où $\frac{cx}{\frac{1}{2}b}$ est la hauteur à laquelle s'élève le point pesant du pendule isochrone, d'après l'équation $\frac{1}{2}b : c = x :$ la dite hauteur, $\frac{1}{2}b$ étant la distance de A au centre de gravité de la ligne brisée LGH, et c la hauteur à laquelle ce centre de gravité s'élève) exprime que les carrés des vitesses du point pesant du pendule isochrone et du globule O sont entre eux comme les hauteurs auxquelles s'élèvent respectivement le point pesant du pendule isochrone et le globule O, si ce dernier est mis en liberté au moment où la ligne LH est horizontale et s'élève à la plus grande hauteur possible.

[2]) En d'autres termes: nous supposons que la figure exécute une oscillation telle que la ligne AG atteint de part et d'autre la position horizontale, c. à. d. une oscillation d'une amplitude de 180°. Le point pesant du pendule isochrone atteint donc la hauteur x.

[3]) y (voir les deux notes précédentes) est la hauteur que peut atteindre le globule O lorsque la ligne brisée LGH exécute une oscillation d'une amplitude de 180° et que le globule O est mis en liberté au moment où la ligne LH est horizontale. On a $y = \frac{AO^2}{x}$: c'est ce que l'équation de Huygens exprime. Cette équation (dans laquelle b, d et x ont une valeur constante) donne une relation entre les variables y et z (SA). Dans les équations qui suivent Huygens calcule la variable z en prenant y comme variable indépendante.

[4]) Comparez la note 1 de la p. 426: le signe ♀ équivaut à notre signe $\pm$.

[5]) R est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite LG.

[6]) L'équation en y, z est celle d'une parabole en coördonnées rectangulaires: les hauteurs y (voir la note 3) sont représentées dans la figure par des lignes parallèles à AG. L'origine des coördonnées est au point A, l'axe des y a la direction AG et l'axe des z la direction AL. Pour $z = 0$, on a y ou $AQ = \frac{b^2}{x}$. Pour $z = d$, on a y ou $LT = \frac{d^2}{x}$. Le sommet de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie MN au point N ($y = \frac{b^2h^2 + f^2d^2}{d^2x}$ ou $\frac{fd}{x}$, $z = f$), le paramètre de la parabole est $\frac{1}{2}\frac{hx}{d}$. Comparez la note 1 de la p. 282.

Pour calculer la somme de tous les y correspondant aux globules (égaux entre eux) de la ligne pesante LG (il suffit évidemment de considérer la moitié de la ligne oscillante LGH, multipliée par le poids (ou la masse) d'un globule), il faut calculer la surface LAQNT, si l'on consent à représenter le poids (ou la masse) d'un globule par la projection de la distance des centres de deux globules avoisinants sur AL.

$\frac{ff}{hx} \infty \frac{dff}{hx}$ KQ $\qquad \left[\frac{1}{3}\frac{df^3}{hx}\right] + \frac{\frac{1}{3}dhh}{x} + \frac{ddf}{x} \infty \frac{1}{2}bd$ [1]) — — $d \qquad a$ [2])

$\frac{1}{3}f\,\frac{1}{3}$ NK $\qquad \frac{2}{3}\frac{df^3}{hdb} + \frac{2}{3}\frac{dhh}{db} + \frac{2ddf}{db} \infty x$

$\sqrt{}$NKQ $\frac{1}{3}\frac{df^3}{hx} \qquad \frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b} \infty x$

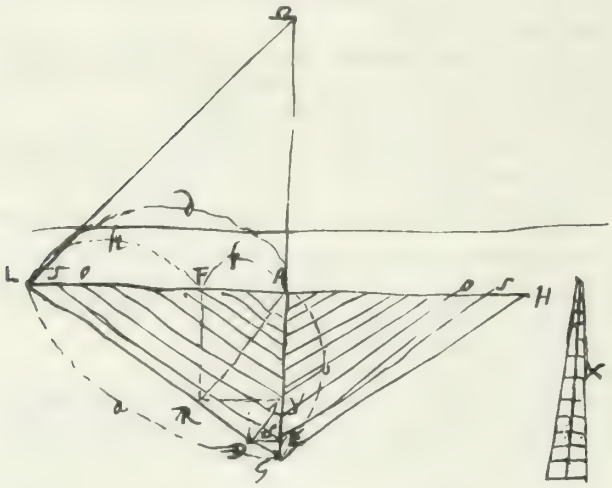
Ex dictis pag. præcedenti [3]) constat esse $\frac{2}{3}\frac{aa}{b} \infty \left[\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b} \infty x\right]$. vide pag. præced.

[Deuxième Partie] [4]).

29 Sept. 1664.

Prius scripta quæ pag. sequenti habentur.

[Fig. 31].



Invenire pendulum simplex isochronas oscillationes habens triangulo isosceli suspenso ex puncto quod basin bifariam dividit.

Sit AL ∞ d [Fig. 31]. AG ∞ b. LG ∞ a.

Cum pendulum x isochronon virgis LG, GH inventum sit

$$\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b}$$

Cogitemus virgis LGH parallelas virgas SSS, OOO &c. æqualibus intervallis distantes, atque ita compo-

---

[1]) Cette équation exprime que le produit du poids (ou de la masse) d'un globule par la somme de toutes les hauteurs atteintes par les différents globules qui composent la ligne LG, lorsque ces globules sont mis en liberté au moment où la droite LH est horizontale, est égal au produit de la masse totale de la ligne LG par la hauteur à laquelle s'élève le centre de gravité de la ligne brisée LGH dans le mouvement réel. En effet, cette dernière hauteur est $\frac{1}{2}b$ et la masse de la ligne LG est représentée par la ligne LA ou d, conformément à ce qui a été observé dans le deuxième alinéa de la note précédente.

nentes totum triangulum LGH. Quibus ſingulis ſi inveniantur pendula iſochrona, certum eſt ex æqualibus differentijs decreſcere debere [5]). Quare ſi longitudo penduli x in totidem æquales partes dividatur atque ad ſingulas diviſiones affigi intelligantur pondera ab imo æqualiter decreſcentia quemadmodum et virgæ LGH, SSS, OOO &c. quæ triangulum LGH componunt. pendulum ita oneratum neceſſario iſochronon erit dicto triangulo [6]). Tale autem pendulum iſochronon eſſe ſcimus triangulo eandem cum ipſo longitudinem habenti, atque ex vertice ſuſpenſo, hoc eſt pendulo ſimplici quod habeat $\frac{3}{4}$ ejus longitudinis. Ergo Δ^{lo} LGH iſochronon erit pendulum habens $\frac{3}{4}$ inventæ quantitatis $\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b}$, hoc eſt $\frac{1}{2}\frac{f^3}{hb} + \frac{1}{2}\frac{hh}{b} + \frac{3}{2}\frac{df}{b}$. Has quantitates aliter exprimemus. Eſt enim h ad f ut LR ad RG, hoc eſt, ut qu.LA ad qu.AG. Ergo $\frac{f}{h} \infty \frac{bb}{dd}$. Ergo $\frac{1}{2}\frac{f^3}{hb} \infty \frac{1}{2}\frac{ffbb}{ddb} \infty \frac{1}{2}\frac{ffb}{dd}$. Sed d ad f ut LG ad GR, hoc eſt ut qu.LG ad qu. GA, hoc eſt ut aa ad bb, ergo $\frac{\frac{1}{2}ffb}{dd} \infty \frac{\frac{1}{2}b^5}{a^4}$. Ergo quantitas prima $\frac{\frac{1}{2}f^3}{hb} \infty \frac{\frac{1}{2}b^5}{a^4}$. Porro $hh \infty dd - 2df + ff$. Ergo $\frac{1}{2}\frac{hh}{b} \infty \frac{\frac{1}{2}dd - df + \frac{1}{2}ff}{b}$. huic adde tertiam quantitatem $\frac{\frac{3}{2}df}{b}$; fit $\frac{\frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}df + \frac{1}{2}ff}{b}$.

Ergo tres propoſitæ quantitates æquantur $\frac{1}{2}\frac{b^5}{a^4} + \frac{\frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}df + \frac{1}{2}ff}{b}$, quas dico æquari ſimul $\frac{1}{2}\frac{aa}{b}$. adeoque inventâ duabus AG, GL tertia proportionali GΩ, hujus ſemiſſem eſſe longitudinem penduli iſochroni triangulo LGH ex A ſuſpenſo

---

[2]) Ces deux lettres indiquent qu'il ne faut pas représenter la masse totale de la ligne LG par a, mais par d (comparez la fin de la note 6 de la p. 451).

[3]) Voir le début de la Deuxième Partie de cette Pièce, ainsi que la huitième et neuvième ligne et les dernières lignes de la p. 453.

[4]) Manuscrit B, p. 163.

[5]) Chaque terme de l'expression $\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b}$ représente une longueur proportionnelle à AG ou b. Par conséquent la longueur du pendule isochrone est proportionnelle à AG, et, si l'on considère successivement les pendules isochrones correspondant aux lignes équidistantes LGH, SSS, OOO, etc. (ou plutôt aux éléments de surface infiniment minces compris entre LGH et SSS, SSS et OOO, etc.) ces longueurs formeront une progression arithmétique.

[6]) Comparez la note 2 de la p. 442, où nous avons déjà remarqué que l'explication donnée

et in plano ſuo agitato. ducantur enim RV perpend. AG. VD perpend. LG. DE perpend. AG. Fit ergo GE $\infty \frac{b^5}{a^4}$. EV $\infty \frac{ff}{b}$. VA $\infty \frac{df}{b}$. AΩ $\infty \frac{dd}{b}$. Iſtæ vero quatuor conſtituunt rectam GΩ. Ergo

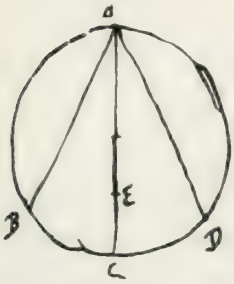
$$\frac{1}{2}\frac{b^5}{a^4}+\frac{\frac{1}{2}dd+\frac{1}{2}df+\frac{1}{2}ff}{b}\infty\frac{1}{2}\mathrm{G}\Omega$$

par Huygens ne suffit pas, à notre avis, pour faire voir pourquoi il considère cette proposition comme évidente. Les paroles du texte (voir la phrase suivante) montrent qu'il admet (ce qui est exact) que le pendule isochrone avec une surface plane oscillant dans son plan a une longueur égale aux trois quarts de celle du pendule isochrone avec la ligne pesante homogène qui termine cette surface (le point de suspension étant le même), chaque fois que la surface peut être découpée par des lignes semblables en une infinité de bandes ayant toutes la même largeur constante et que les longueurs des pendules isochrones des bandes successives forment une progression arithmétique (voir la note précédente). Comparez les p. 362—368 de l'Avertissement qui précède.

VIII [1].

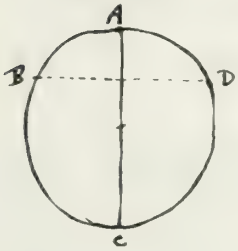
[1664] [1].

[Fig. 32.]



Circulus vel quodlibet ejus ſegmentum ut ABD [Fig. 32], latera AB, AD æqualia habens, ex A ſuſpenſum, et in plano ſuo agitatum iſochronum eſt pendulo AE, $\frac{3}{4}$ diametri AC habenti [2]).

[Fig. 33.]



Circumferentia circuli vel quævis ejus pars BAD [Fig. 33], arcus AB, AD æquales habens, ex A ſuſpenſa, et in plano ſuo agitata iſochrona eſt pendulo AC, diametri longitudinem habenti [3]).

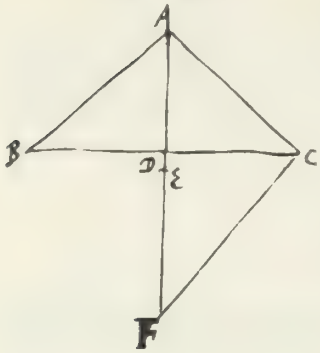
---

[1]) Manuscrit, B, p. 63. Cette page porte la date du 18 sept. 1664 (voir, à la p. 444, la Deuxième Partie de la Pièce VI qui précède). Cependant les propositions qui suivent y ont été, probablement toutes, inscrites après le 29 sept. Comparez la note 3 de la p. 457.

[2]) Cette proposition, ainsi que les suivantes, fut annoncée par Huygens à Moray dans sa lettre du 10 oct. 1664 (voir la p. 120 du T. V). On peut supposer la surface ABCD composée de triangles infiniment aigus tels que ceux de la Fig. 28 à la p. 448. La proposition est alors une conséquence du résultat obtenu à cette page. Dans le cours du mois d'octobre (avant le 28 oct. mais après le 13 oct., voir à ce sujet la note 2 de la p. 456) Huygens trouva une méthode générale valable pour les surfaces planes (voir la p. 515 qui suit) et pour les corps solides (voir, à la p. 127 du T. V, le sommaire de sa lettre du 28 oct. à de Sluse). On trouve, aux p. 533—535 qui suivent, la démonstration qu'il donna alors de la proposition énoncée ici.

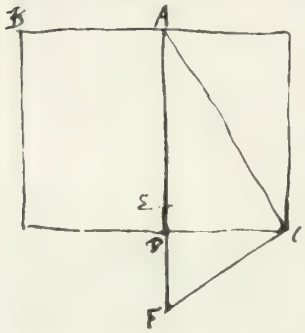
[3]) On peut supposer la circonférence de cercle composée de globules. La proposition est alors une conséquence du résultat obtenu à la p. 64 du Manuscrit B (voir, à la p. 447, la Troisième Partie de la Pièce VI). On peut remarquer qu'elle reste vraie de quelque manière que la densité linéaire varie le long de la circonférence, pourvu que AC soit un axe de symétrie.

[Fig. 34.]



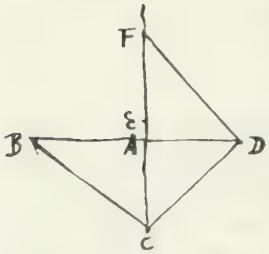
Triangulum quodvis iſoſceles BAC [Fig. 34], ex vertice ſuſpenſum et in plano ſuo agitatum iſochronum eſt pendulo AE, æquali $\frac{3}{4}$ perpendicularis AD, atque inſuper $\frac{1}{4}$ DF quæ eſt duabus AD, DC tertia proportionalis [1]).

[Fig. 35.]



Rectangulum BC [Fig. 35] ex puncto medio lateris ſuſpenſum et in plano ſuo agitatum iſochronum eſt pendulo AE $\frac{2}{3}$ habenti lineæ AF quæ duabus AD, AC tertia proportionalis eſt [2]). Hoc inventu difficillimum fuit.

[Fig. 36.]



Triangulum quodvis iſoſceles BCD [Fig. 36] ex media baſi A ſuſpenſum et in plano ſuo agitatum iſochronum eſt pendulo EC æquanti dimidiam CF quæ duabus AC, CD tertia proportionalis eſt [3]). Ergo triangulum rectangulum ſive ex vertice ſive ex media baſi ſuſpenſum æquales oſcillationes habet.

---

[1]) Huygens a sans doute calculé la longueur du pendule isochrone avec le triangle BAC par la „méthode des trois quarts" (voir la note 6 de la p. 453, et la p. 362 et suiv. de l'Avertissement), c. à. d. en multipliant par $\frac{3}{4}$ la longueur du pendule isochrone avec la ligne droite BC (voir, à la p. 445, le résultat du calcul de la Deuxième Partie de la Pièce VI). En effet, on trouve à la p. 67 du Manuscrit B une multiplication de l'expression $\frac{1}{3}\frac{zz}{b}+b$ par $\frac{3}{4}$. Il est possible aussi que la Deuxième Partie de la Pièce X (voir la p. 462 qui suit) date d'avant le 10 octobre Plus tard il se sert de la méthode générale pour les surfaces planes dont il était déjà question dans la note 2 de la p. 455 (voir la p. 525 qui suit).

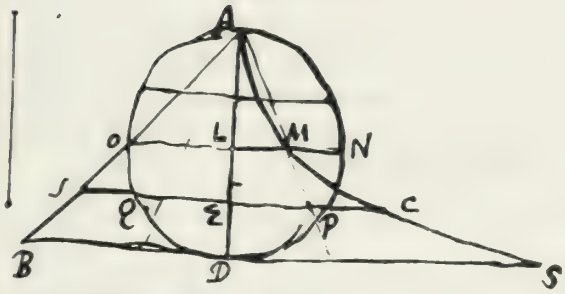
[2]) C. à. d. la longueur du pendule est $\frac{2}{3}\frac{AC^2}{AD}$. La démonstration primitive nous manque. Le

IX [4]).

[1664] [4]).

[Première Partie] [5]).

[Fig. 37.] [6])



Sit AE $= x$ [Fig. 37] longitudo quæſita penduli iſochroni plano AODN ſuſpenſo in A et agitato in latus [7]).

fit ergo parabola ACS ad quam ſunt altitudines DS, EC, LM, cujus latus rectum ∞ AE. Jam omnes EC, ML &c. ductæ in ſuas PQ, NO &c. æquari debent omnibus ES, LO &c. ductis in ſuas easdem PQ, NO, &c. Intelligantur utrinque ſingula rectangula ducta inſuper in latus rectum parabolæ ACS ∞ AE. fiunt ergo parallelepipeda omnia ex CE, PQ, EA, ex ML, NO, AE &c. æqualia omnibus parallelepipedis ex SE, PQ, AE, ex LO, NO, AE &c. Sed parallelepipedum CE, PQ, EA æquatur AE, AE, PQ, et parallelepipedum ML, NO, AE ipſi AL, AL, NO, quia ▭ ML, AE

---

13 oct. 1664 Huygens trouva la longueur du pendule isochrone avec un rectangle suspendu en un point extérieur, situé au-dessus du point A (voir, aux p. 463—469 qui suivent, la Troisième Partie de la Pièce X). Lorsqu'il eut trouvé peu de temps après (voir la note 2 de la p. 455) la méthode générale, il put calculer les longueurs des pendules isochrones correspondant au rectangle avec moins de labeur (voir les p. 521—523 qui suivent).

3) C'est le résultat du calcul de la Deuxième Partie de la Pièce VII (p. 453, avant-dernière ligne) qui porte la date du 29 sept. Le même résultat est obtenu plus aisément, d'après la méthode générale, à la p. 525 qui suit.

4) La Pièce est empruntée à deux des feuilles collées dans le Manuscrit B (comparez la note 2 de la p. 435), plus précisément aux p. 99 recto, 100 recto et verso, d'après la numération nouvelle.

5) Manuscrit B, p. 100 verso.

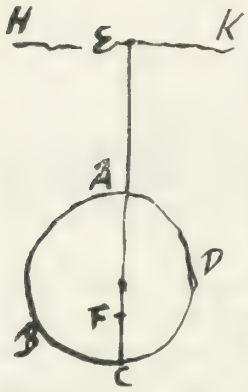
6) Il y a deux points S dans la figure, ce qui cependant ne peut donner lieu à aucune confusion.

7) Lorsque Huygens exécuta ce calcul, il n'avait apparemment pas encore adopté la termino-

∞ quadratum AL, quia AE eſt latus rectum. Ergo ſi ADB ſemicylindrum [1]) referat baſi circulo AD, plano AB abſciſſum quod facit angulum BAD ſemirectum: is æquiponderabit cylindro ſuper baſin circulum AD altitudinem habente AE, unde AE probatur pagina hic adjuncta [6]) eſſe æqualis diſtantiæ centri gravitatis dicti ſemicylindri a perpendiculari ſuper A erecta [2]).

[Deuxième Partie] [3]).

[Fig. 38.]



plana figura quævis [Fig. 38] ABCD, virgâ EA ſuſpenſa, quæ mobilis ſit in E, ſi agitetur circa axem HK ipſi EA ad angulos rectos poſitum atque in eodem plano in quo eſt BADC, iſochronas oſcillationes habet pendulo EF. ut ſit F id punctum a quo educta ſuper planum ABCD perpendicularis tranſeat per centrum gravitatis ſolidi fruſti quod abſcinditur à parallelepipedo [4]) ſuper baſi ABCD excitato, plano per HK ducto, et quocunque angulo ad lineam EA inclinato. Hoc patuit ex ijs quæ pagina oppoſita et folio ſequenti verſo [6]) demonſtrantur [5]).

logie de la p. 499 qui suit. Il parle ici d'une surface plane „agitata *in latus*" pour désigner un mouvement *perpendiculaire* au plan de la surface. Plus loin il écrit „semicylindrus" pour désigner un „cuneus" ou onglet (voir la p. 499). Comparez aussi la note 4 de la p. 459 et la note 4 de la p. 461.

[1]) Voir la note précédente.

[2]) Le début du calcul est analogue au calcul de 1661; voir p. e. la note 4 de la p. 385 et la Pièce III (p. 415 et suiv.). Il est vrai qu'il ne s'agit pas ici d'un pendule linéaire, mais puisque nous avons affaire à un „mouvement solide" (voir la p. 499), peu importe que les points pesants qui constituent p. e. la droite ON soient distribués sur cette droite ou bien concentrés en un globule unique L: la vitesse de chaque point, tant dans le mouvement réel que dans le mouvement libre, sera la même dans les deux cas. La droite AB et la parabole ACS de la Fig. 37 correspondent à la droite AS et la parabole CPE de la Fig. 7 de la p. 421.

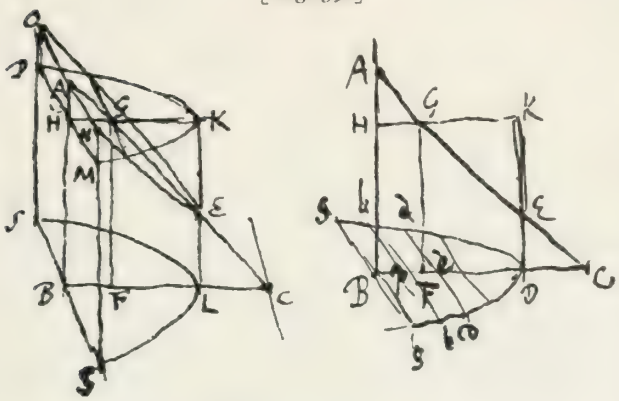
D'après les notations de la p. 421 on a dans la Fig. 37: $AD = a$, $BD = d$, $DS = \frac{ad}{x}$. Le „latus rectum" (double du paramètre) de la parabole étant $\frac{AD^2}{DS}$, on a: „latus rectum" $= \frac{ax}{d}$. Mais Huygens considère ici une oscillation d'une amplitude de 180°; donc $a = d$. Par conséquent la longueur x du pendule isochrone est égale au „latus rectum" AE.

Nous voyons ici comment Huygens a trouvé la „méthode de l'onglet" (comparez la p. 499) en partant de la „méthode de la parabole".

Il faut remarquer que dans le produit ou „parallélépipède" CE. PQ. EA, EA désigne le „latus rectum" de la parabole, tandis que CE joue le rôle d'une droite horizontale quelconque, tout aussi bien que ML. On a CE. PQ. EA $= (AE)^2$. PQ; dans le second membre AE ne désigne pas le „latus rectum" mais la distance de A à l'horizontale PQ; exactement comme

[Troisième Partie] [6]).

[Fig. 39.]



F [Fig. 39] perpendicularis per centrum gravitatis ſolidi SSLENO. FG ∞ FC.

Omnia SS, BC, BC; *bb*, *p*C, *p*C ∞ omnibus SS, BC, FC; *bb*, *p*C, FC: Ergo et omnibus SS, BC, FG: *bb*, *p*C, FG.

Ergo ſolidis ſuper eadem baſi poſitis SSLENO et SSLKMD, quorum illud abciſſum plano per AC, exiſtente angulo ACB dimi-

AL dans l'équation ML. NO. AE = (AL)². NO désigne la distance à l'horizontale quelconque NO.

Le „planus AB" qui limite l'onglet considéré est évidemment un plan passant par l'axe d'oscillation qui touche la circonférence au point A. On peut maintenant considérer le triangle ABD de la figure comme un triangle primitivement perpendiculaire au plan du papier et rabattu sur lui.

La longueur cherchée x (ou AE) est égale à la distance du centre de gravité de l'onglet à la perpendiculaire au plan du papier en A, ou, si l'on veut, à la distance du point A à la projection de ce centre sur le plan de la figure; le texte de cette Partie suffit pour établir cette proposition, si l'on suppose connu le théorème du premier alinéa de la p. 501 (voir la Troisième Partie de cette Pièce).

Le plan oblique qui passe par la tangente en A fait ici, comme le texte le dit, un angle de 45° avec le plan du papier. Avant d'énoncer la proposition qui suit (voir la Fig. 38) Huygens a remarqué (s'il ne le savait pas déjà) qu'on trouve la même longueur AE ou x lorsque l'inclinaison du plan est quelconque.

Voir le résultat du calcul pour le cercle considéré à la p. 510.

3) Manuscrit B, p. 100 recto.

4) À la p. 499 Huygens appelle ce corps „prismatoides". Nous disons: „cylindre".

5) On aura remarqué que la démonstration précédente, se rapportant à la Fig. 37, reste valable lorsque la surface plane oscillant d'un mouvement solide n'est pas un cercle, mais une surface quelconque.

Le raisonnement restera encore le même lorsque l'axe d'oscillation ne touche pas le contour de la surface mais lui est extérieur. La parabole passe toujours par le point de suspension, mais la partie de la parabole située plus haut que ABCD [Fig. 38] ne joue aucun rôle.

On passe ainsi de la „méthode de l'onglet" à la „méthode du tronc" (voir la p. 499).

Le théorème général que Huygens énonce peut donc être regardé comme se dérivant „ex ijs quæ pagina opposita demonstrantur": c'est en poursuivant le raisonnement de la p. 100 verso (voir la note 5 de la p. 457) qu'il a lui-même trouvé ce théorème („hoc patuit").

Plus loin (voir les p. 503—507) il donne de ce théorème une démonstration in extenso.

6) Manuscrit B, p. 99 recto.

dio recti, posterius vero altitudinem habens FG æqualem FC, posito F sub centro gravitatis solidi SSLENO, hæc solida super brachium CB in C fixum æquale gravitatis momentum habebunt [1]).

[1]) On conclut inversement de cette proposition que lorsque les deux solides nommés, dont le premier est limité par un plan incliné à 45° et dont le dernier (SSLKMD), qui est cylindrique, a une hauteur inconnue, ont des moments égaux par rapport au point C (ou plutôt à une droite R passant par le point C, perpendiculaire à BC et parallèle à SS), cette hauteur inconnue est égale à la distance de la droite R à la projection du centre de gravité du premier solide (SSLENO) sur le plan de la base commune.

C'est donc de la présente proposition que Huygens parle plus haut (voir la fin de la Première Partie).

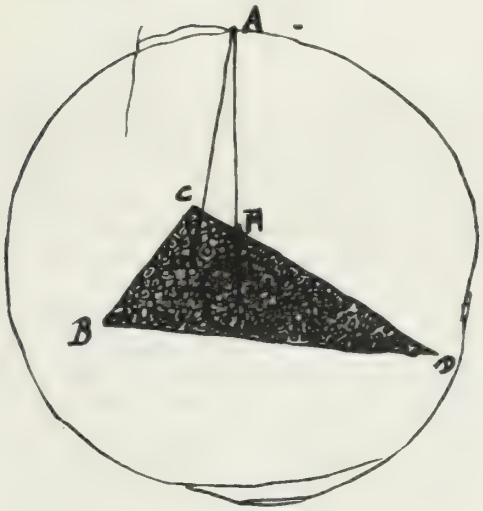
Il est à remarquer que le cas considéré dans la Fig. 39 s'accorde avec la Première Partie de cette Pièce en ce que l'angle d'inclinaison y est un angle demi-droit, mais avec la Deuxième Partie en ce que le point de suspension y est considéré comme extérieur à la surface plane oscillante.

X [1]).

[Première Partie] [2]).

[1664?] [3]).

[Fig. 40.]



plana figura quævis BCD [Fig. 40] ſuſpenſa quovis ſitu a puncto in eodem cum ipſa plano exiſtente; ſi a puncto ſuſpenſionis ad figuræ centrum gravitatis eadem fuerit diſtantia, iſochronas ſibi ipſi oſcillationes habebit in latus agitata [4]).

---

[1]) La Pièce est empruntée à deux des feuilles mentionnées dans la note 2 de la p. 435.

[2]) Manuscrit B, p. 96 recto.

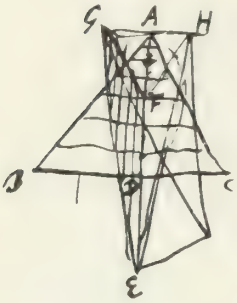
[3]) Vu la généralité de cette proposition et l'absence de toute démonstration il ne paraît pas impossible que Huygens l'ait trouvée après le 13 octobre (voir la note 5 de la p. 463). Le reste de la p. 96 recto est en blanc (on n'y trouve qu'une petite esquisse d'une figure sans importance). Il est probable toutefois qu'il a découvert cette loi déjà en octobre 1664, puisqu'il semble y faire allusion dans la ligne 7 d'en bas de la p. 525. Comparez le quatrième alinéa de la note 3 de la p. 462.

[4]) Voir pour la démonstration les Prop. XII et XIII de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium" (p. 109—113 de l'édition originale). La figure oscille dans son plan (comparez la quatrième ligne de la page suivante).

[Deuxième Partie [1]].

[1664] [2]).

[Fig. 41.]



DF, DE ∞ DB, DC [Fig. 41].

△EFG ſive duplum ejus ſpatium EGFHE ex A ſuſpenſum et circa axem GH agitatum iſochronum eſt triangulo ABC ex A ſuſpenſo et in latus agitato. quare huic pendulum iſochronum habebitur ſi iſti habeatur [3]).

---

[1]) Manuscrit B, p. 99 verso.

[2]) Voir la note 2 de la p. 435, et la note 5 qui suit.

[3]) Le triangle isoscèle ABC [Fig. 41] qui oscille dans son plan peut être découpé en tranches horizontales infiniment minces; chacune de ces tranches peut alors être placée dans la position verticale par une rotation d'un angle droit autour de son centre de gravité. D'après la proposition précédente (p. 461) — voir cependant le quatrième alinéa de cette note — la longueur x du pendule isochrone correspondant à chaque tranche restera la même; d'après la formule générale (où n désigne le nombre des points pesants égaux qui constituent le corps oscillant, b la distance de son centre de gravité à l'axe d'oscillation, et r la distance d'un point pesant quelconque à cet axe) $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$ (formule que Huygens — qui toutefois ne se sert pas du symbole Σ; comparez la note 3 de la p. 372 — a dû connaître, semble-t-il, avant le 10 oct. 1664, puisque dans sa lettre à Moray du 10 oct. il annonce la découverte du centre d'oscillation de la sphère; voir les notes 2 et 4 de la p. 472 qui suit), Σr^2 conservera donc aussi après la rotation la même valeur pour chaque tranche et il en sera de même pour le Σr^2 de toutes les tranches. Comme d'autre part le centre de gravité de l'ensemble des tranches restera pendant la rotation à la même hauteur, la longueur du pendule isochrone avec le triangle ABC oscillant dans son plan sera, d'après la formule, égale à la longueur du pendule isochrone avec le pendule linéaire AE de densité inégale obtenu par la rotation des tranches.

Mais ce pendule linéaire est évidemment équivalent à un pendule de la forme GFE obtenu en écartant les tranches de telle manière que la densité des globules ou points pesants qui les constituent est partout égale dans la figure plane GFE, laquelle oscille autour de l'axe GH. En effet, de cette façon Σr^2 et nb conservent leurs valeurs pendant l'écartement. La largeur GA est quelconque. Au lieu de la figure GFE on peut tout aussi bien prendre la figure double EGFHE dont on conçoit plus aisément l'oscillation autour de l'axe GH.

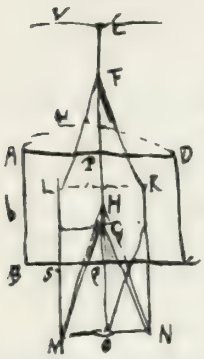
L'angle BAC est supposé aigu (ou droit), faute de quoi le point F serait situé au-dessus du point A.

Cependant, comme nous l'avons déjà dit dans la note 3 de la p. 461, il paraît peu probable que Huygens ait connu le théorème général de la Première Partie de cette Pièce avant de discuter le cas du triangle considéré. On admettra plutôt, qu'il ait démontré d'abord (ce qui est facile) l'isochronisme d'une tranche ou ligne droite homogène de longueur donnée suspen-

Troisième Partie] [4]).

[1664] [5]).

[Fig. 42.]



Rectangulum ABCD [Fig. 42] ſuſpenſum ex E et in latus agitatum. PF, PG æquales PA, PD. SL, SM æquales QB, QC. junctisque FL, GM factum ▱ FLMG. cui ſimile ab altera parte FGNK. hæc bina ex eodem E puncto ſuſpenſa et mota circa axem EV, iſochronas vibrationes habent rectangulo ABCD uti dictum agitato [6]). Ut igitur longitudo penduli ſimplicis utrique iſochroni inveniatur, quærendum centrum gravitatis partis parallelepipedi ſuper LFKNGML baſi perpendiculariter erecti et plano inclinato quod per EV ducitur abſciſſi [7]).

due en son point milieu à un fil de longueur donnée et faisant un angle droit ou nul avec la verticale. Il peut s'être demandé ensuite si une proposition analogue existe pour une droite faisant un autre angle avec la verticale et pour une figure plane (ou même pour un corps, voir la Prop. XVI de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium") quelconque. Mais peut-être s'est il déjà proposé d'examiner dans quelles conditions une figure est isochrone avec elle-même après avoir trouvé qu'un triangle rectangle a la même période „sive ex vertice sive ex media basi suspensum" (voir les dernières lignes de la p. 456 et le dernier alinéa de la p. 525).

Après avoir réduit de sorte l'oscillation plane du triangle à une oscillation solide (voir la p. 499), Huygens a peut-être calculé la longueur du pendule isochrone avec le triangle de la même manière qu'il l'a fait pour le rectangle (voir la Troisième Partie de cette Pièce).

Il a pu calculer plus facilement la longueur du pendule isochrone pour ce cas après avoir trouvé la méthode générale pour réduire l'oscillation plane à l'oscillation solide (voir la p. 515 et les deux derniers alinéas de la note 2 de la p. 478). Mais il est certain qu'il a fait d'une façon ou d'une autre le calcul pour le triangle avant le 10 oct. 1664 (voir la note 1 de la p. 456), alors qu'il n'avait pas encore trouvé cette méthode générale.

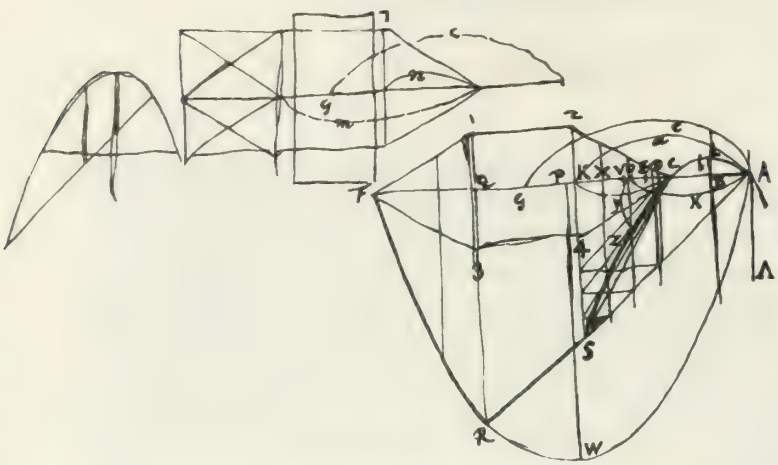
4) Manuscrit B, p. 100 recto, p. 96 verso et p. 97 recto.

5) On trouvera à la fin de cette Partie la date du 13 octobre 1664.

6) Le parallélogramme FLMG (de largeur MO quelconque) et la figure double LFKNGML [Fig. 42] sont obtenus par rotation des tranches horizontales, de la même manière que les figures EFG et EGFHE dans le cas du triangle, considéré dans la Deuxième Partie qui précède (voir la note 3). Le pendule isochrone avec le rectangle donné ABCD oscillant dans son plan a donc la même longueur que le pendule isochrone avec la figure LFKNGML oscillant perpendiculairement à son plan.

7) Voir sur la méthode du tronc la Deuxième Partie de la Pièce IX, à la p. 458. On trouve en effet à la p. 100 recto une figure du genre indiqué et un calcul relatif à cette figure. Mais ce calcul a été biffé par Huygens qui observe: „hic nimis prolixus fieret calculus. aliter melius idem quæsivimus invenimusque in folio adjuncto". C'est le calcul qui suit.

[Fig. 43.] [1])



FC ∾ $2c - 2b$
[Fig. 43]
AF ∾ $2c - b$
$2c - b$ AF } s. [2])
$a - b$ QF }
$2c - a$ AQ [3])
▭AQF ∾ ▭RQ in latus rectum parabolæ FRA [4]).
ſed QR ∾ QA [1])
latus rectum parabolæ FRA ∾ FQ ∾ $a - b$ [5])

---

[1]) L'axe d'oscillation AΛ représenté dans la Fig. 43 par une droite verticale correspond à l'axe horizontal EV de la Fig, 42. La surface LFKNGML de la Fig. 42 a eté transformée en F12 C43 de la Fig. 43; en effet, puisqu'il s'agit d'une oscillation „solide" (c. à. d. perpendiculaire a la figure plane) on peut donner à la figure toutes les formes qu'on veut, pourvu que chaque élément de surface (ou chaque point pesant) reste à la même distance de l'axe d'oscillation : la longueur du pendule isochrone restera la même. La partie de la figure LFKNGML [Fig. 42] située au-dessus de la ligne horizontale passant par le point G a conservé la même forme; c'est la partie C2134C de la figure F12 C43 [Fig. 43]. Mais la partie de LFKNGML située en dessous de cette droite a été changée en un triangle unique; c'est le triangle F13 [Fig. 43]. La figure totale F12 C43 a maintenant une forme symétrique. Elle oscille perpendiculairement à son plan autour de l'axe AΛ, et cette oscillation est isochrone avec celle du rectangle ABCD de la Fig. 42 qui oscille dans son plan.

Huygens considère le tronc (voir les p. 458, 499 et 503—507) ayant la figure F12 C43 pour base et limité par le plan oblique incliné à 45° passant par l'axe d'oscillation AΛ. La longueur du pendule isochrone avec le pendule F12 C43 est égale à la distance du point A au pied de la perpendiculaire, abaissée sur la base, du centre de gravité de ce tronc. Pour trouver cette distance Huygens transforme le tronc en une surface plane CFRSC, toutes les ordonnées, telles que QR et KS, étant prises proportionnelles aux sections droites correspondantes du tronc (sections faites par des plans perpendiculaires au plan du papier, et passant par QR et KS respectivement). En supposant tous les points pesants qui constituent le tronc, distribués (ou rabattus) sur la surface plane CFRSC ainsi construite, en conservant leurs distances à l'axe AΛ, on voit que la densité superficielle de ces points peut être uniforme. Il s'agit donc de trouver la distance de l'axe AΛ au centre de gravité de la surface CFRSC; les lignes FR et SC sont des paraboles (voir le deuxième alinéa de la note 4); RS est une droite; puisqu'on a pris (arbitrairement) QR = QA, le trapèze QRSK peut être considéré comme la section (rabattue) faite dans ce tronc par un plan passant par AF perpendiculairement au plan du papier.

[2]) s. = subtrahendo; m. = multiplicando.

[3]) La figure fait voir que a, b et c sont respectivement égales à AK, AC et AG. Le rectangle donné a pour côtés m (ou CQ) = $2c - a - b$ et n (ou CK) = $a - b$ (voir la pag. 471).

[4]) Les sections faites dans la partie F13 du tronc par des plans perpendiculaires à AF sont des

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{cc - cb + \frac{1}{4}bb}{a-b} \text{ quadratum FP } ^{6)} \\ \text{parabolæ latus rectum} \end{array}\right\} \text{PW } ^{6)}$$

$$\frac{4}{3}c - \frac{2}{3}b \qquad \frac{2}{3}\text{AF}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{4}{3}c^3 - 2ccb + cbb - \frac{1}{6}b^3}{a-b} \text{ parab. FWA } ^{6)} \\ c - \frac{1}{2}b \quad \text{AP} \end{array}\right\} \text{m. } ^{2)}$$

$$\frac{\frac{1}{4}bb}{a-b} \; ^{7)}$$

$$b \; ^{3)}$$

$$\frac{2}{3}\,\frac{\frac{1}{4}\frac{b^3}{a-b}}{}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{6}\frac{b^3}{a-b}}{} \text{ par. CLA } ^{8)} \\ \frac{1}{2}b \quad \text{AB} \end{array}\right\} \text{m. } ^{2)}$$

rectangles dont le côté perpendiculaire au plan du papier est égal pour chaque rectangle à la distance du point A au plan sécant correspondant, tandis que les côtés horizontaux sont proportionnels aux distances du point F aux plans sécants. On peut prendre, comme Huygens le fait ici, le facteur constant par lequel on multiplie le produit des distances du plan sécant aux points A et F pour obtenir l'ordonnée (telle que QR) de la partie QFR du „tronc rabattu" CFRSC, de telle manière que la parabole FR passe par le point R de la droite RS qui limite le trapèze QRSK (note 1). De la même manière, on doit prendre pour la partie 2C4 du tronc des ordonnées proportionnelles au produit des distances des points C et A au plan sécant: on obtient ainsi la parabole SC ou SCLA.

Le lieu des points R′ correspondant à la partie F13 du tronc pour lesquels Q′A $\times$ Q′F $=$ Q′R′ $\times$ (longueur constante) est bien une parabole et cette longueur constante est le „latus rectum" (note 1 de la p. 282). Q′ représente ici la projection sur AF du point R′ qui dans la figure devrait être situé sur la ligne FR.

5) Le „latus rectum" de la parabole FR (ou FRWA) est égal à FQ d'après l'équation précédente qui donne, pour R′ = R, ▭ AQF = ▭ RQ in latus rectum.

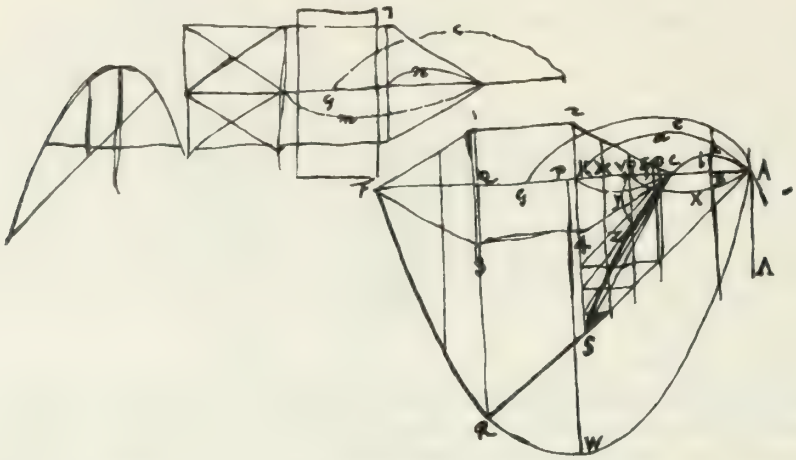
6) P étant le point milieu de AF, on a FP $= c - \frac{1}{2}b$ et PW $= \frac{\text{FP}^2}{\text{lat. rect.}}$. PW est l'axe de symétrie de la parabole FWA, et le produit de cet axe par $\frac{2}{3}$ AF donne l'aire de la surface AFRWA.

Pour calculer la distance de l'axe AΛ au centre de gravité de la surface CFRSC (distance égale à la longueur du pendule isochrone avec le rectangle considéré, d'après la note 1), Huygens doit calculer le moment de cette surface par rapport à AΛ, ainsi que l'aire CFRSC (et diviser ensuite ce moment par cette aire). À cet effet il calcule la somme des aires AFWA et CLAC, diminuée de la somme des aires ALCSA et ARWA, ainsi que la somme des moments des aires AFWA et CLAC, diminuée de celle des aires ALCSA et ARWA.

7) Cette fraction donne la longueur de BL, axe de symétrie du segment de parabole CLA (partie de la parabole SCLA). L'équation de cette parabole étant: ordonnée $\times$ latus rectum $=$ produit des distances du plan sécant (note 4) ou de l'ordonnée aux points C et A, on a (vu que l'ordonnée KS doit être égale à AK ou a): latus rectum $=$ KC $= a - b$ (comme pour la parabole FWA), donc BL $= \frac{\text{BC.BA}}{a-b} = \frac{\frac{1}{4}b^2}{a-b}$.

8) Aire de la surface CLAC $\left(\frac{2}{3}\text{BL.AC}\right)$.

[Fig. 43.]



$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}c^3b + 2cc\,bb - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{1}{12}b^4}{a-b}\ ^{1)}$$

$$\frac{1}{12}\frac{b^4}{a-b}\ ^{2)}$$

$$\frac{1}{12}\frac{b^4}{a-b}\ ^{2)}$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}c^3b + 2cc\,bb - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{1}{6}b^4}{a-b}\ ^{3)}$$

$2c - a$ AQ

---

[1]) C'est le moment de l'aire AFWA par rapport à AΛ.

[2]) Moment de la surface CLAC par rapport à l'axe AΛ.

[3]) Somme des moments des surfaces AFWA et CLAC.

[4]) Pour trouver l'aire du segment de parabole ARWA, il faut prendre les $\frac{2}{3}$ du produit de AQ par le diamètre de ce segment (Archimède, „De Conoidibus et Sphæroidibus" cap. III. La partie gauche de la Fig. 43 est une reproduction de la figure d'Archimède à cet endroit). Ce diamètre (c. à.d. la droite, parallèle à PW, allant du milieu de la corde RA jusqu'à la parabole RWA) est égal au carré de AX (où AX est le point milieu de AQ) divisé par le „latus rectum".

[5]) C'est le moment par rapport à AΛ du segment de parabole ARWA.

[6]) Diamètre du segment de parabole SLAS (voir la note 4).

[7]) Aire du segment de parabole SLAS. AD est la moitié de AK.

[8]) Moment du segment de parabole SLAS par rapport à la droite AΛ.

[9]) Somme des moments par rapport à AΛ des segments de parabole ARWA et SLAS.

[10]) a = addendo.

$c - \frac{1}{2}a$ AX [4])

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{cc - ac + \frac{1}{4}aa}{a-b} & \text{quadratum AX} \\ & \text{parabolæ latus rectum} \\ \frac{4}{3}c - \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}\text{AQ} \end{array}\right\} \text{m.}$$

$$\frac{\frac{1}{4}aa}{a-b}\ ^{6)}$$

$$a$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^3}{a-b}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{4}{3}c^3 - 2acc + caa - \frac{1}{6}a^3}{a-b} & \text{par. RWA [4])} \\ c - \frac{1}{2}a & \text{AX} \end{array}\right\} \text{m.}$$

$$\frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{a^3}{a-b} \quad \text{parabola SLA [7])}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}a & \text{AD} \end{array}\right\} \text{m.}$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}ac^3 + 2aacc - \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{12}a^4}{a-b}\ ^{5)}$$

$$\frac{\frac{1}{12}a^4}{a-b}\ ^{8)} \qquad \frac{\frac{1}{12}a^4}{a-b}\ ^{8)}$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}ac^3 + 2aacc - \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{6}a^4}{a-b}\ ^{9)}$$

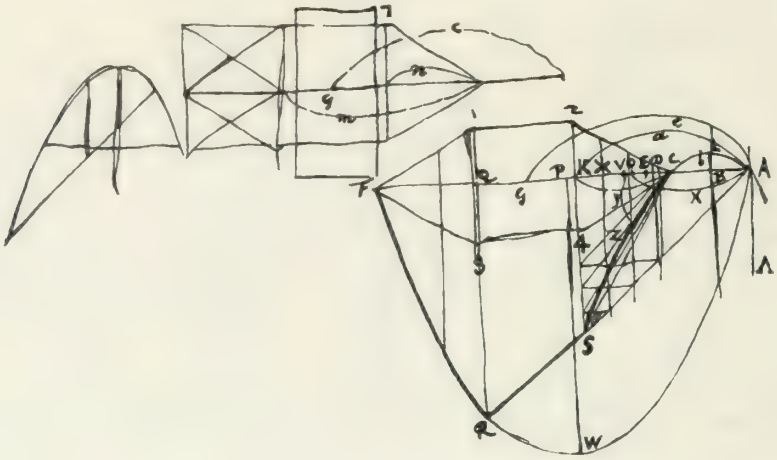
$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{4}{3}c^3 - 2ccb + cbb - \frac{1}{6}b^3}{a-b} & \text{par. FWA} \\ \dfrac{\frac{1}{6}b^3}{a-b} & \text{par. CLA} \end{array}\right\} \text{a [10])}$$

$$\text{s.}\ \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{4}{3}c^3 - 2ccb + cbb}{a-b} & \text{ſumma parabolarum FWA, CLA} \\ \dfrac{\frac{4}{3}c^3 - 2acc + caa}{a-b} & \text{ſumma parabolarum RWA, SLA} \end{array}\right.$$

$$\frac{-2bcc + 2acc + cbb - caa}{a-b} \quad \text{ſpatium FRSC [11])}$$

[11]) Voir la note 6 de la p. 465.

[Fig. 43.]



$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}c^3b + 2ccbb - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{1}{6}b^4}{a-b} \quad {}^{1)}$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}ac^3 + 2aacc - \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{6}a^4}{a-b} \quad {}^{2)}$$

$$\frac{-\frac{8}{3}c^3b + \frac{8}{3}c^3a + 2ccbb - 2ccaa - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{6}b^4 - \frac{1}{6}a^4}{a-b} \quad {}^{3)}$$

dividendum per

$$\frac{-2bcc + 2acc + cbb - caa}{a-b} \quad {}^{4)}$$

---

[1]) Voir la note 3 de la p. 466.

[2]) Voir la note 9 de la p. 466.

[3]) C'est la différence des deux expressions précédentes. En d'autres termes: c'est le moment de l'aire CFRSC par rapport à l'axe d'oscillation AA (voir la note 6 de la p. 465).

[4]) C'est l'aire CFRSC, d'après la p. 467. En divisant le moment de l'aire CFRSC par rapport à AA par cette aire, on trouve la distance du centre de gravité de cette aire à AA. Comme nous l'avons dit dans la note 1 de la p. 464, cette distance est la longueur du pendule isochrone avec le rectangle considéré, oscillant dans son plan.

[5]) *n* est donc le côté vertical, *m* le côté horizontal du rectangle suspendu au point A.

[6]) Le „solidum" égal au tronc élevé sur la surface plane F12 C43 est apparemment la surface plane CFRSC. On peut en effet considérer cette surface plane comme un corps ou „solidum" composé des mêmes points pesants que le tronc (comparez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 464).

c diſtantia puncti ſuſpenſionis à centro rectanguli
$a - b \infty n$ latus deſcendens [5])
$2c - a - b \infty m$ latus transverſe jacens [5])

ſolidum [6]) æquale abſciſſo a parallelepipedo ſuper FCSR plano ducto per AA et inclinato ad angulum ſemirectum. facta diviſione fit diſtantia inter A et centrum gravitatis ſpatij FRSC $\infty \frac{4}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}\frac{aa}{c} + \frac{1}{6}\frac{bb}{c}$ [7]) quæ eſt longitudo penduli iſochroni figuræ F12C43 motæ circa axem AA ideoque et penduli iſochroni rectangulo centrum G habenti, latus majus transverſe jacens ∞ CQ, minus vero ∞ CK, in latus agitato, quod itaque pendulum erit

$$c + \frac{\frac{1}{12}nn + \frac{1}{12}mm}{c} \text{ [7])}$$

bonum. 13 Octobr. 1664 [8]).

---

[7]) Nous supprimons les calculs de Huygens qui conduisent à ces expressions. Elles sont le résultat de la division l'une par l'autre des fractions précédentes sur lesquelles on peut consulter les notes 3 et 4, et de l'introduction dans le quotient des côtés n et m du rectangle.

Lorsque $c = \frac{1}{2}n$, c. à. d. lorsque le rectangle est suspendu „ex puncto medio lateris", la formule se réduit à $\frac{2}{3}\left(\frac{n^2 + \frac{1}{4}m^2}{n}\right)$ ou $\frac{2}{3}n + \frac{1}{6}\frac{m^2}{n}$, conformément au résultat de la p. 456 (note 2).

[8]) Avant le 10 oct. 1664 Huygens connaissait déjà la longueur du pendule isochrone avec le rectangle suspendu au point milieu d'un de ses côtés; ce calcul que nous ne possédons plus, était également laborieux (voir la p. 456). Le 13 oct. il n'avait apparemment pas encore trouvé le théorème général qui permet de trouver la longueur du pendule isochrone „in suspensione remota" lorsqu'on connaît celle du pendule isochrone „in suspensione contigua" (voir la note 1 de la p. 528).

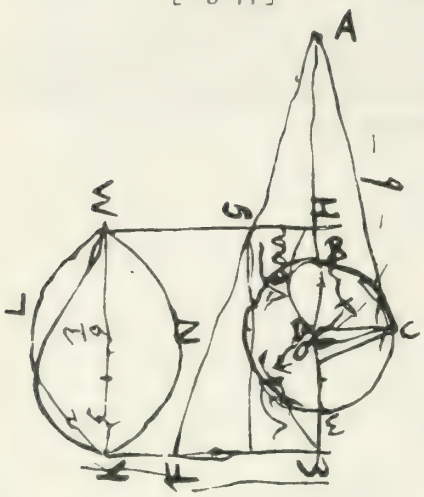
Lorsqu'il eut trouvé la méthode générale pour calculer le centre d'oscillation des surfaces planes symétriques oscillant dans leur plan, il put trouver e. a. celui du rectangle avec beaucoup moins de peine (voir les p. 521—523 qui suivent).

XI[1].

[1664][2].

[Première Partie][3].

[Fig. 44.]



Sphæra BCE [Fig. 44] ex A ſuſpenſa eſt. centrum ejus D. AD vero major quam latus quadrati in circulo BCE. dico pendulum iſochronon ſphæræ ita ſuſpenſæ eſſe æquale AD una cum DO quæ ſit $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis ipſis AD, DC.

DC, DB ∞ a.

DH, DE [4]) ∞ $\sqrt{2aa}$

O eſt centrum gravitatis fruſti EFGH [4]) cujus baſis duæ ſemiparabolæ ut KLMN.

b [5]) —— $\sqrt{2aa}$ —— $\frac{1}{5}\sqrt{2aa} / \frac{2}{5}\frac{aa}{b}$ [6])

---

[1]) Cette Pièce est empruntée aux p. 165—168 et 174 du Manuscrit B, à une des feuilles collées dans ce Manuscrit mentionnées dans la note 2 de la p. 435, et à une autre feuille collée dans le même Manuscrit (voir la note 1 de la p. 475).

[2]) Voir la note 2 de la p. 435, et la note 3 de la p. 462, où nous avons fait mention de la découverte du centre d'oscillation de la sphère.

[3]) La Première Partie est empruntée à une des feuilles collées dans le Manuscrit, plus précisément à la p. 99 recto.

[4]) Il y a deux points E dans la figure. Ici il s'agit du point inférieur E. Plus haut, à gauche, on voit une troisième lettre qui ressemble à un E, mais qui est en réalité un M tourné de 90°.

[5]) $b = \mathrm{AD}$.

[6]) Le présent calcul doit être antérieur à celui de la Deuxième Partie qui suit; en effet, ce dernier fait voir que la restriction „AD vero major quam latus quadrati in circulo BCE" est superflue. Pour pouvoir expliquer les raisonnements de Huygens de la Première et de la Deuxième Partie, nous devons admettre qu'il avait trouvé en ce moment la formule générale pour la longueur du pendule isochrone avec un corps oscillant quelconque.

On peut en effet déduire cette formule générale de considérations qui se rattachent aux calculs précédents (Pièces VI et VII; voir pour ce qui suit la Fig. 23 à la p. 441). Le centre de gravité M du corps oscillant, situé à une distance $\mathrm{MA} = b$ de l'axe de suspension, s'élève à la hauteur $\mathrm{MW} = c$. Posons AN (longueur du pendule isochrone) $= x$. Ce pendule s'élève donc à la hauteur $\mathrm{SN} = \frac{xc}{b}$. Si v_N est la vitesse du point N et v celle d'un point P quelconque du corps, situé à une distance r de l'axe d'oscillation, au moment où les points M et N se trouvent sur la verticale passant par A, on aura, pour déterminer la hauteur h à laquelle le point

P pourra s'élever librement, l'équation $h : \mathrm{SN} = v^2 : v_1^2 = r^2 : x^2$, donc $h = r^2 \frac{c}{xb}$. En supposant le corps divisé en un nombre n de points ou globules égaux de „masse" m, la somme des produits des masses par les hauteurs h correspondantes sera $\frac{cm}{xb} \Sigma r^2$ et le produit de la masse totale M par l'ascension du centre de gravité sera mnc. On a donc $\frac{c}{xb} \Sigma r^2 = nc$, ou $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$.

Il faut remarquer en outre que pour une surface plane oscillant perpendiculairement à son plan cette même formule peut être déduite des considérations de la Pièce IX. Dans ce cas toutes les distances r sont parallèles et la formule n'est autre chose que la mise en équation de la règle de l'onglet ou du tronc (voir à la p. 458 la Deuxième Partie de la Pièce IX).

Si l'on donnait aux points des masses quelconques, égales ou inégales, la formule prendrait la forme $x = \frac{\Sigma m r^2}{\mathrm{M} b}$.

Lorsque toutes les masses sont égales, on peut écrire $(\Sigma r^2) m = b \mathrm{M} x$. Sous cette forme l'équation correspond à l'équation $(cc + dd) f = pgx$ qu'on trouve à la p. 519 de ce Tome : c'est là l'équation générale trouvée par Huygens et publiée plus tard sous une autre forme et pour un corps oscillant quelconque (à la p. 519 il n'est question que d'une *surface* oscillant dans son plan) à la p. 100 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" (Pars Quarta, Prop. V). Comparez aussi la Huitième Partie de cette Pièce (note 7 de la p. 485), où l'on voit clairement que dans la pensée de Huygens l'équation générale s'applique à des *corps*.

Lorsque le corps considéré possède un centre et est symétrique par rapport à un plan passant par ce centre perpendiculairement à la verticale AD [Fig. 43] on peut écrire (voir cependant, à la p. 474, le dernier alinéa de la note 2 de la p. 473) $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$ (Prop. XIV de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium"), y étant la distance d'un point quelconque du corps au plan horizontal passant par son centre et z la distance du point à un plan vertical passant par l'axe d'oscillation et le centre du corps, perpendiculaire par conséquent au plan du papier.

Dans le cas de la sphère on peut écrire $\Sigma r^2 = nb^2 + 2\Sigma y^2$ ou $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma (\sqrt{2y^2})^2$. Et si l'on considère, au lieu de la sphère donnée de rayon a, une sphère concentrique de rayon $\sqrt{2a^2}$, on peut écrire $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2$, le dernier signe Σ s'appliquant à la sphère agrandie, dont EH représente le diamètre. On a donc $x = b + \frac{\Sigma y^2}{nb}$. Si l'on désigne ensuite par y_1 la distance d'un point de la sphère agrandie au plan horizontal passant non pas par le centre D mais par le point A, on aura $x = \frac{\Sigma y_1^2}{nb}$, c. à. d. x, la longueur cherchée du pendule isochrone avec la sphère de rayon a, sera égale à la longueur du pendule isochrone avec une surface plane, oscillant perpendiculairement à son plan et contenant tous les points pesants de la sphère agrandie, chacun à sa vraie distance du plan horizontal passant par A. Tous ces points doivent donc être transportés horizontalement de la sphère agrandie à une surface plane, et si l'on veut que cette dernière (KLMN) ait une forme symétrique par rapport à un axe vertical MK (coïncidant en réalité avec EH) et que la densité des points y soit partout la même, il faut nécessairement composer son contour de deux paraboles comme le texte et la Fig. 44 l'indiquent. En effet, si l'on découpe la sphère agrandie et la surface plane KLMN ainsi construite en tranches par des plans horizontaux, les tranches ou éléments de surface de KLMN seront proportionnels aux tranches correspondantes de la sphère agrandie. Comparez sur cet artifice de calcul, la réduction d'un corps à une surface plane, la note 2 de la p. 282 du T. XIV. Voir aussi la réduction d'un tronc à une surface plane, expliquée dans la note 1 de la p. 464, dans la Troisième Partie de la Pièce X qui précède. Cette Troisième Partie est d'ail-

leurs probablement postérieure au présent calcul, puisqu'elle date du 13 oct. et que Huygens connaissait le centre d'oscillation de la sphère le 10 octobre, d'après la note 3 de la p. 462.

On trouve la longueur cherchée AO ou x (voir la Pièce IX qui précède) en calculant la distance de A à O, pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan du papier du centre de gravité du tronc EFGH, situé en réalité au-dessus de la surface KLMN, c. à. d. obtenu en érigeant un cylindre sur cette surface (placée de telle manière que le point M coïncide avec le point H et le point K avec le point inférieur E) et en coupant ce cylindre obliquement par un plan passant par la droite horizontale située dans le plan du papier et passant par le point A.

Or, pour déterminer cette distance AO, Huygens considère d'abord l'onglet (voir la Pièce IX, et la p. 499) découpé dans le même cylindre par un plan oblique parallèle au plan oblique mentionné et passant par une tangente en H à la sphère agrandie.

On a généralement, lorsque la figure plane a un contour quelconque symétrique par rapport à son axe vertical (HE, c. à. d. MK) et qu'on construit sur cette base un „truncus" et un „cuneus" limités par des plans obliques parallèles passant par des droites horizontales du plan de la base situées respectivement à la distance b et à la distance b' du centre de gravité de la base:

(Vol. cunei) ($b + \lambda$ cunei) + (vol. trunci—vol. cunei). b = (vol. trunci) ($b + \lambda$ trunci)

où „λ cunei" et „λ trunci" désignent les distances du centre de gravité de la base, respectivement aux pieds des perpendiculaires abaissées sur cette base des centres de gravité de l'onglet et du tronc (on a donc AO = $b + \lambda$ trunci): c'est l'équation des moments autour de la droite du plan de la base correspondant au tronc. Elle peut s'écrire

$$b + \lambda \text{ trunci} = \frac{(\text{vol. cunei})\,(b + \lambda \text{ cunei}) + (\text{vol. trunci} - \text{vol. cunei}).\,b}{\text{vol. trunci}}$$

$$= \frac{b'\,(b + \lambda \text{ cunei}) + (b - b').\,b}{b}$$

$$= \frac{b'}{b}\,(\lambda \text{ cunei}) + b.$$

Connaissant la „λ cunei" on peut donc trouver la „λ trunci" (et ensuite la longueur cherchée AO) d'après l'équation $b : b' = (\lambda \text{ cunei}) : (\lambda \text{ trunci})$.

Cette dernière équation correspond à la proportion EM : MA = SM : MQ de la p. 509 (première ligne).

Dans le cas considéré la λ cunei a la valeur $\frac{1}{5}\sqrt{2a^2}$, comme on peut s'en convaincre par le calcul; Huygens n'indique pas comment il a calculé cette longueur. Quant à b', elle est ici égale à $\sqrt{2a^2}$.

La longueur cherchée s'obtient donc à l'aide de l'équation

$$b : \sqrt{2aa} = \frac{1}{5}\sqrt{2aa} : \lambda \text{ trunci, qui donne: } \lambda \text{ trunci} = \frac{2}{5}\frac{aa}{b} \text{ et } x \text{ (ou AO)} = b + \frac{2}{5}\frac{aa}{b}.$$

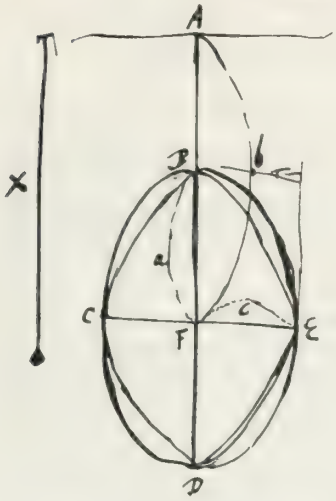
Remarquons encore que la distance AD doit d'après le texte être plus grande que $\sqrt{2a^2}$, parce que sinon le point de suspension A ne serait plus extérieur à la sphère agrandie.

Huygens annonce la découverte du centre d'oscillation de la sphère dans sa lettre à Moray du 10 oct. 1664 (voir la p. 120 du T. V), et il lui communique le résultat du calcul dans sa lettre du 21 nov. 1664 (p. 149 du T. V).

Dans l'„Horologium oscillatorium" on ne trouve pas le calcul du centre d'oscillation de l'ellipsoïde de révolution (voir la Deuxième Partie de cette Pièce), mais seulement celui du centre d'oscillation de la sphère (Prop. XXII de la Pars Quarta); la méthode de calcul de ce centre, basée sur la formule $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$, n'y est pas cependant identique à la méthode de la Première Partie, ni aux méthodes de la Deuxième Partie de cette Pièce.

[Deuxième Partie] [1]).

[Fig. 45.]



b —— a —— $\frac{1}{5}a$ / $\frac{1}{5}\frac{aa}{b}$ [Fig. 45]

$\left[\frac{1}{5}\frac{aa}{b}\right] + b$

$\frac{3}{8}$ $\frac{8}{15}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{1}{5}\frac{cc}{b}$

$b + \frac{1}{5}\frac{aa}{b} + \frac{1}{5}\frac{cc}{b} \infty x$ [2])

x pendulum iſochronon ſphæroidi BCDE cujus axis BD, ſuſpenſo ex A.

ſi BCDE ſit ſphæra, h. e. ſi $c \infty a$, ſit $b + \frac{2}{5}\frac{aa}{b} \infty x$.

ſi $c \infty a$ et $b \infty a$ ſit $\frac{7}{5} \infty x$.

ſi $b \infty a$ $\frac{4}{5}b + \frac{2}{5}\frac{cc}{b} \infty x$.

[1]) Cette Partie est empruntée à la p. 165 du Manuscrit B.

[2]) Pour expliquer le calcul du centre d'oscillation de l'ellipsoïde de révolution suspendu en un point quelconque de son axe, calcul d'une brièveté imposante, il faut, comme dans la Première Partie de cette Pièce, partir de la formule $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$. On peut décomposer r^2 en $y^2 + z^2$, y étant la distance d'un point du corps à un plan horizontal passant par l'axe d'oscillation A perpendiculaire au plan du papier, et z la distance de ce point au plan vertical passant par l'axe AD perpendiculairement au papier.

Pour calculer Σy^2 il faut, comme dans le cas précédent (voir la note 6 de la p. 470), réduire le corps à une surface plane: c'est la surface limitée par les paraboles BED et BCD tracées par Huygens à l'intérieur de l'ellipse. Comme la formule $l = \frac{\Sigma y^2}{nb}$ à elle seule représenterait la longueur d'un pendule isochrone avec la surface BCDE oscillant perpendiculairement à son plan, on sait, d'après le théorème de la Deuxième Partie de la Pièce IX (p. 458), que Σy^2 est le produit de nb par une longueur égale à la distance entre l'axe d'oscillation et le pied de la perpendiculaire, abaissée sur la figure BCDE, du centre de gravité d'un tronc construit sur cette figure et limité par un plan passant par le nouvel axe d'oscillation qui est la droite horizontale située dans le plan du papier et passant par le point A. Pour trouver cette distance Huygens se sert de la méthode décrite dans la note à la p. 472: l'équation du texte

$$b : a = \frac{1}{5}a : \frac{1}{5}\frac{a^2}{b},$$

qui sert à calculer la longueur $\frac{1}{5}\frac{a^2}{b}$, est analogue à l'équation $b : \sqrt{2a^2} = \frac{1}{5}\sqrt{2a^2} : \frac{2}{5}\frac{a^2}{b}$ de la Première Partie de cette Pièce. À $\frac{1}{5}\frac{a^2}{b}$ il faut ensuite ajouter la longueur b.

Comme le texte l'indique, Huygens trouve $\Sigma z^2 = \frac{1}{5}nc^2$ en multipliant l'une par l'autre (abstraction faite du nombre n) les expressions $\frac{3}{8}c$ et $\frac{8}{15}c$. La méthode de calcul est donc la suivante. Au lieu des paraboles BED et BCD, on peut considérer maintenant les deux paraboles CBE et CDE : les courbes tracées à l'intérieur de l'ellipse peuvent tout aussi bien être censées représenter ces deux dernières paraboles. Remarquons en passant que ces figures BCDE sont analogues aux figures auxiliaires qu'on trouve à la p. 114 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" (Prop. XIV de la Pars Quarta). Pour obtenir Σz^2, il faut maintenant diviser l'ellipsoïde et la nouvelle figure plane BCDE par des plans verticaux parallèles à BD et perpendiculaires au plan du papier : les éléments de surface ou tranches de la figure plane seront proportionnels aux volumes des tranches correspondantes de ellipsoïde. Reste donc à calculer Σz^2 pour la nouvelle figure plane BCDE. À cet effet, on élève sur la demi-figure BED, ayant un point saillant en E, un cylindre perpendiculairement au plan du papier et on coupe ce cylindre par un plan oblique passant par BD, l'inclinaison de ce plan pouvant être quelconque. Si l'on appelle F le centre de la figure BCDE, G le centre de gravité de la demi-figure considérée BED et H le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de la figure du centre de gravité de l'onglet limité par le plan oblique nommé on aura pour la demi-figure $\Sigma z^2 = \frac{n}{2}$ FG.FH d'après le théorème de la p. 546 qui suit, donc $\Sigma z^2 = n$ FG.FH pour la figure CBED entière. Or, on a ici $FG = \frac{3}{8}c$ et $FH = \frac{8}{15}c$.

Pour la première longueur ($FG = \frac{3}{8}c$), on peut consulter la lettre de Huygens à Fr. van Schooten du 10 déc. 1653 (T. I, p. 254). Pour la deuxième ($FH = \frac{8}{15}c$) voir la Troisième Partie de cette Pièce.

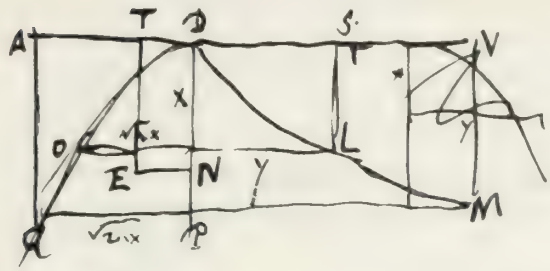
Après avoir formé le produit $n \times \frac{3}{8}c \times \frac{8}{15}c$, il faut le diviser par nb, ce qui donne $\frac{1}{5}\frac{c^2}{b}$. On a alors x (longueur du pendule isochrone) $= b + \frac{1}{5}\frac{a^2}{b} + \frac{1}{5}\frac{c^2}{b}$.

Huygens ne se sert donc pas de l'équation $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$, déjà mentionnée dans la note 6 de la p. 470, valable pour le corps considéré dont CE est un plan de symétrie et où Σz^2 a la même signification que plus haut (somme des carrés des distances à un plan passant par AD perpendiculairement au plan du papier), tandis que Σy^2 représente la somme des carrés des distances au plan horizontal passant par CE. Remarquons en passant que, si l'on voulait se servir de cette équation, on pourrait aussi trouver la nouvelle somme Σy^2 (outre d'après la méthode qui a servi à calculer Σz^2), à l'aide du théorème de la p. 548 qui suit; d'après ce théorème on aurait $\Sigma y^2 = n$.BF.FK, FK étant la „λ cunei" (voir la p. 472) $\frac{1}{5}a$. On aurait donc $\Sigma y^2 = \frac{1}{5}na^2$, et on trouverait de nouveau $x = b + \frac{1}{5}\frac{a^2}{b} + \frac{1}{5}\frac{c^2}{b}$.

Le fait que Huygens se sert de deux méthodes différentes pour calculer les deux sommes Σy^2 et Σz^2 pourrait faire croire qu'il ne connaissait pas encore l'équation $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$ de l'alinéa précédent (bien facile d'ailleurs à dériver de l'équation primitive pour

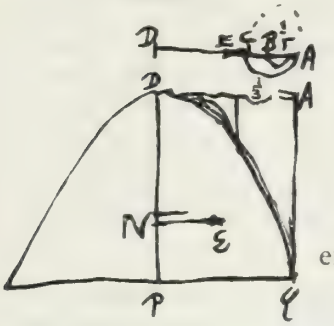
[Troisième Partie] [1]).

[Fig. 46.]



DQP [Fig. 46] ſemiparabola, ad inveniendum brachium TE cunei per DA ſuper ſemiparabolam abſciſſi, ſit DLM paraboloides [2]) in qua cubi applicatarum ad axem DV, nempe cubi ex LS, MV ſunt ut quadrata abſciſſarum SD, VD. Erunt jam LN ad MP ut ſectiones cunei dicti per NO, PQ. quippe quæ ſunt ▭ ex ON, ND et QP, PD. Brachia ergo ſuper ADV æqualia, cunei ſuper DQP et plani DPM [3]). Sed brachium plani ex noſtris regulis [4]) eſt $\frac{5}{7}$ DP. Ergo et cunei.

[Fig. 47.]



CB $\frac{2}{15}$

CE $\frac{2}{15}$

AC $\frac{5}{15}$

AE $\frac{7}{15}$

ex AD $\frac{15}{15}$

NE $\frac{8}{15}$ brachium cunei ſuper PDQ abſciſſi per DP [5]).

DQP ſemiparabola [Fig. 47]

Σr^2). Dans la note 6 de la p. 470 nous supposions que cette équation lui était connue, mais il est possible que son raisonnement différait quelque peu du nôtre.

[1]) Cette Partie, où Huygens détermine le centre de gravité de deux onglets, est empruntée à une feuille séparée collée dans le Manuscrit B entre les p. 117 et 118 (numération ancienne). Le texte se trouve sur la p. 60 recto, d'après la numération nouvelle (voir la note 2 de la p. 435).

Dans la Deuxième Partie de cette Pièce (voir, à la p. 474, le troisième alinéa de la note 2 de la p. 473) Huygens fait usage de la valeur trouvée ici [Fig. 47] pour le „brachium cunei super PDQ abscissi per DP".

[2]) Les „paraboloïdes" de Huygens sont les courbes $y^a = kx^b$; comparez les p. 197—198 du T. XIV. Dans le cas considéré ici l'équation de la „paraboloïdes" DLM est $y^2 = kx^3$.

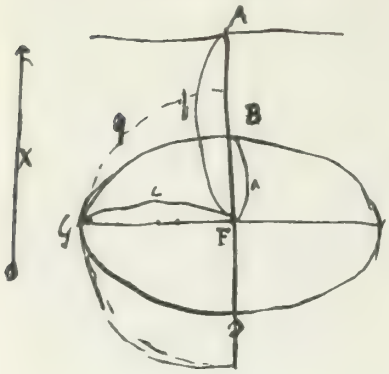
[3]) C. a. d. le plan DPM et l'onglet élevé sur DQP ont le même bras de levier par rapport à la droite ADV.

[4]) Voir les p. 280—282 du T. XIV. On trouve que le „brachium" TE a la valeur $\frac{a+b}{2a+b}$ DP, c. à. d. dans le cas considéré ici $\frac{5}{7}$ DP.

[5]) Pour trouver le „brachium" en question d'après la méthode de Huygens il faut faire usage.

[Quatrième Partie] [1].

[Fig. 48.]



BGD [Fig. 48] Ellipsis [2].

b —— a —— $\frac{1}{4}a / \frac{1}{4}\frac{aa}{b}$

$\left[\frac{1}{4}\frac{aa}{b}\right] + b$

quadr. circumf. — radium

q —— c —— $^2/_3\, c /$ $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}\frac{cc}{q}\\ \frac{3}{8}q\end{array}\right\}$ m. [3]

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}cc\\ b\end{array}\right\}$ div. [4]

$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}\frac{cc}{b}\\ \frac{1}{4}\frac{aa}{b}+b\end{array}\right\}$ ad. [5]

$$b + \frac{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc}{b} \infty x$$

comme dans le cas précédent, d'une „paraboloïdes". On peut considérer l'onglet en question [Fig. 47] comme la différence d'un onglet élevé sur la base DAQP et d'un onglet élevé sur la base DAQ, l'un et l'autre étant terminé par un même plan oblique passant par DP. L'onglet sur la base DAQP a évidemment un centre de gravité situé à une distance $\frac{1}{3}$ AD de la droite AQ. En remplaçant les sections droites de l'onglet sur DAQ (sections faites par des plans parallèles à DP et perpendiculaires au plan du papier) par des ordonnées (perpendiculaires à DA, dans le plan du papier) proportionnelles à ces sections on trouve une „paraboloïdes" $y = kx^3$, dont le centre de gravité est situé à une distance $\frac{1}{5}$ AD de la droite AQ.

Ce sont là, paraît-il, les longueurs AC et AB indiquées dans la figure. On peut démontrer en outre que les volumes des deux onglets partiels qui constituent l'onglet élevé sur la base DAQP sont égaux. Pour trouver le „brachium" de l'onglet élevé sur la base DQP, il faut donc prendre une distance CE = CB; de cette façon l'onglet sur DQP „suspendu" en E, et l'onglet sur DAQ „suspendu" en B, seront équivalents à l'onglet total „suspendu" en C. On trouve finalement: DE ou NE $= \frac{8}{15}$ AD.

[1]) Manuscrit B, p. 166.

[2]) Pour calculer la longueur x du pendule isochrone avec une surface plane de forme elliptique suspendue en un point situé sur le prolongement de l'axe DB et oscillant dans son plan,

Huygens doit calculer, comme dans le cas de l'ellipsoïde (voir la note 2 de la p. 473), l'expression $\frac{1}{nb}(\Sigma y^2 + \Sigma z^2)$, où b est la distance du point de suspension A au centre de l'ellipse, et où $\Sigma y^2 + \Sigma z^2$ représentent les sommes des carrés des distances resp. à la droite horizontale et à la droite verticale passant par le point A et situées dans le plan du papier.

Pour trouver Σy^2 il se sert de la même méthode que dans les deux cas précédents (sphère et ellipsoïde). Si l'on construit un onglet ou „cuneus" au-dessus de l'ellipse, limité par un plan oblique passant par la tangente en B, la „λ cunei" (p. 472) de cet onglet est $\frac{1}{4}a$, et la λ du tronc correspondant, limité par un plan passant par la droite horizontale en A, sera déterminée par l'équation

$$b : a = \frac{1}{4}a : \lambda \text{ trunci},$$

d'où l'on tire: „λ trunci" $= \frac{1}{4}\frac{a^2}{b}$, de sorte que $\frac{\Sigma y^2}{nb} = \frac{1}{4}\frac{a^2}{b} + b$.

Pour calculer Σz^2, Huygens remplace, comme la Fig. 48 l'indique, la demi-ellipse BGD par un demi-cercle, ce qu'on peut faire, puisque la circonférence de ce cercle s'obtient en multipliant toutes les ordonnées de l'ellipse (parallèles à DB) par un facteur constant, de sorte que, si l'on distribue les points pesants qui constituent la surface de la demi-ellipse sur le demi-cercle, sans que leur distance à l'axe BD change, la densité des points dans le demi-cercle pourra être elle aussi constante. En élevant ensuite un cylindre sur le demi-cercle et en coupant celui-ci par un plan oblique passant par BD, on obtient un onglet tel que le pied de la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur le plan de la base se trouve à une distance $\frac{3}{8}q$ de l'axe BD, où q désigne le quart de la circonférence de cercle (voir la Cinquième Partie de cette Pièce, en particulier la note 4 de la p. 480). Comme le centre de gravité du demi-cercle se trouve à une distance $\frac{2}{3}\frac{c^2}{q}$ de l'axe BD, on obtient Σz^2 (comme dans le calcul de Σz^2 dans le cas de la note 2 de la p. 473; voir à la p. 474 le deuxième alinéa de cette note) en formant le produit de $\frac{2}{3}\frac{c^2}{q}$ par $\frac{3}{8}q$ et par n, non pas par $\frac{n}{2}$, puisqu'il s'agit de calculer Σz^2 pour la surface elliptique entière. L'expression $\frac{1}{4}nc^2$ doit ensuite être divisée par nb. On trouve donc finalement $x = b + \frac{1}{4}\frac{a^2}{b} + \frac{1}{4}\frac{c^2}{b}$.

Mais quoique le calcul se rattache absolument au calcul précédent de la Deuxième Partie, comme nous venons de le faire voir, et qu'il paraisse vraisemblable que Huygens l'ait exécuté après avoir fait ce calcul pour l'ellipsoïde de rotation (Deuxième Partie), qui se trouve à la page précédente du Manuscrit, il faut cependant remarquer que le calcul pour l'ellipse (ce qui évidemment ne s'applique pas au calcul pour l'ellipsoïde) est entièrement conforme (abstraction faite de la substitution du demi-cercle à la demi-ellipse) à la méthode générale pour les surfaces planes symétriques oscillant dans leur plan qu'on trouve à la p. 515 et suiv. de ce Tome.

Il ne paraît donc pas improbable que Huygens ait formulé cette méthode générale (dont il annonce la découverte, en même temps que celle de la méthode pour les corps oscillants, à de Sluse dans sa lettre du 28 oct. 1664; voir la p. 127 du T. V) après l'avoir appliquée dans le cas de l'ellipse, et à l'instar de ce calcul.

[3]) m. = multiplicando. [4]) div. = dividendo. [5]) ad. = addendo.

ſi $b \infty a$ $\quad \frac{5}{4}a + \frac{1}{4}\frac{cc}{a} \infty x$

ſi $c \infty a$ $\quad b + \frac{\frac{1}{2}aa}{b} \infty x$

$\frac{5}{4}a + \frac{1}{4}\frac{cc}{a} \infty 2a$ [1])

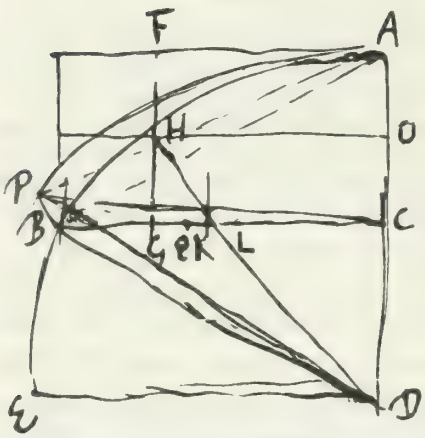
$\frac{5}{4}aa + \frac{1}{4}cc \infty 2aa$

$5aa + cc \infty 8aa$

$cc \infty 3aa$

[Cinquième Partie] [2]).

[Fig. 49.]



⌒ AE ∞q $\quad$ CL $\infty \frac{1}{2}$ CB.

AB $\infty \frac{2}{3}q$ $\quad$ L est brachium pyramidis CPBD super AD [Fig. 49].

AD ∞r

AC $\infty \frac{1}{2}r$

▭ AFGC ∞ ⊿ABC. dico AF vel OH eſſe brachium ſuperficiei ungularis APB ſuper AC. et OC $\infty \frac{1}{2}$ AC ejuſdem ſuperficiei brachium ſuper CB, quæcunque circuli portio fuerit ABC.

$\sqrt{\frac{3}{4}rr}$ BC $\quad \frac{1}{3}q \quad \frac{1}{2}$ AB $\quad$ m

$r \quad$ AD

$\frac{1}{4}r \quad \frac{1}{2}$ DC $\quad \frac{1}{3}qr \quad$ ⊿DBA

$\sqrt{\frac{3r^4}{64}}$ ⊿DBC $\infty \frac{1}{8}r\sqrt{3rr}$ ⊿DBC

---

[1]) Huygens cherche quel doit être le rapport des axes pour que le centre d'oscillation se trouve au point D, lorsque la surface elliptique est suspendue en B. Le résultat ($c^2 = 3a^2$) confirme celui obtenu précédemment (voir le calcul de la p. 446).

[2]) Manuscrit B, p. 167—168.

Huygens calcule d'abord le bras de levier de l'onglet APBC, où AB est un arc de 60°, par rapport à AD. Ensuite il fait le même calcul pour un arc AB quelconque. Voir aussi la note 4 de la p. 480.

L'onglet APBC „suspendu" en Q, et la pyramide CPBD „suspendue" en L, doivent être

$$\frac{1}{3}qr - \frac{1}{8}r\sqrt{3rr} \triangle \text{ ABC}$$

div. per $\frac{1}{2}r \infty$ AC

$$\frac{2}{3}q - \frac{1}{4}\sqrt{3rr} \text{ AF vel CG vel OH}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}q - \frac{3}{16}\sqrt{3rr} & \text{KC} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \infty \frac{1}{4}\sqrt{3rr} & \text{CL} \end{array}\right\} \text{s.}$$

$$\frac{1}{2}q - \frac{7}{16}\sqrt{3rr} \qquad \text{LK}$$

$$\text{vel } \frac{1}{2}q - \frac{7}{8}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \qquad \text{LK}$$

ex Archimede [3]) ungula APBC ad pyramidem PBCD ut 5 ad 3

LK

$$5 \text{ —— } 3 \text{ —— } \frac{1}{2}q - \frac{7}{8}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \Big/ \left.\begin{array}{ll} \frac{3}{10}q - \frac{21}{40}\sqrt{\frac{3}{4}rr} & \text{KQ} \\ \frac{1}{2}q - \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{4}rr} & \text{KC} \end{array}\right\} \text{a.}$$

$$\frac{4}{5}q - \frac{9}{10}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \quad \text{CQ}$$

brachium ungulæ APBC super AC.

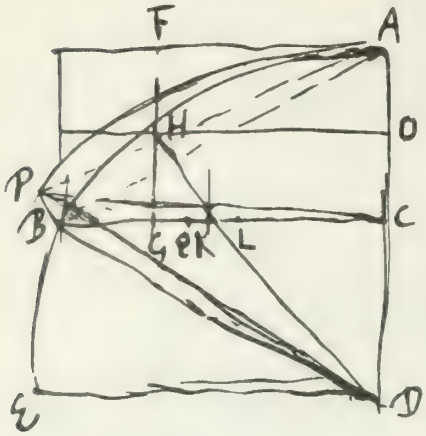
Calculus generalis. Sit AB ∞p, AD ∞r, AC ∞a, CB ∞b [Fig. 49]

$\frac{1}{2}p$	$\frac{1}{2}$ AB		
r	AD	$r - a$	DC
$\frac{1}{2}pr$	$\triangle$DBA	$\frac{1}{2}b$	$\frac{1}{2}$ BC
$\frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ab$		$\frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ab$	$\triangle$ DCB

équivalents à la somme APBD de ces deux corps „suspendus" en K (Le bras de levier KC du corps APBD est égal aux trois quarts de celui de la „surface ongulaire" ABP). Connaissant K et L, on trouve Q.

[3]) Voir sur le théorème d'Archimède le deuxième livre „De sphæra et cylindro", cap. II, où

[Fig. 49.]



$$\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ab \angle \text{ABC}$$

div. per a AC

$$\frac{\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br}{a} + \frac{1}{2}b \quad \text{AF vel CG}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{3}{8}pr - \frac{3}{8}br}{a} + \frac{3}{8}b & \text{KC} \\ \frac{1}{2}b & \text{CL} \end{array}\right\} \text{s.}$$

$$\frac{\frac{3}{8}pr - \frac{3}{8}br - \frac{1}{8}ba}{a} \text{LK}$$

ratio ungulæ APBC ad pyramidem PBCD [Fig. 49]

$$\left\{\begin{array}{ccc} 3r - a & \text{———} & 2r - a \\ a & \text{———} & r - a \end{array}\right\}^{1)}$$

$$3ar - aa \text{———} 2rr - 3ar + aa$$

hoc eſt $\quad ar + bb \text{———} 2rr - ar - bb$

hoc eſt $\quad \frac{1}{2}aa + \frac{3}{2}bb \text{———} \frac{1}{2}\frac{b^4}{aa} - \frac{1}{2}bb$

ſive ut $\quad aa + 3bb \text{———} \frac{b^4}{aa} - bb$

---

on lit dans la traduction de J. L. Heiberg (Arch. Op. omn. 1910, Lipsiæ in æd. Teubneri, I, p. 175): „Cuiuis segmento sphæræ æqualis est conus basim habens eandem, quam segmentum, altitudinem autem rectam, quæ ad altitudinem segmenti eam rationem habet, quam radius sphæræ una cum altitudine reliqui segmenti ad altitudinem reliqui segmenti."

1) C. à. d. „ungula APBC: pyramis PBCD $= (3r - a)\,a : (2r - a)\,(r - a)$."

2) La distance KQ est obtenue, comme précédemment, en multipliant la longueur LK trouvée plus haut par le rapport du volume de la pyramide PBCD à celui de l'onglet APBC; rapport qui a ici la valeur $\left(\frac{b^4}{a^2} - b^2\right) : (a^2 + 3b^2)$.

3) Nous supprimons le calcul (substitution de la valeur de r) qui conduit à cette dernière expression pour KC.

4) CQ = KQ + KC. Nous supprimons le calcul. Lorsque l'arc AB ou p devient égal à un quart de circonférence (AE), on trouve AC $= a = r$; et CB $= b = r$, donc CQ $= \frac{3}{8}p$. C'est donc là la longueur du bras de levier par rapport à AD de l'onglet obtenu en coupant un cylindré, élevé sur le quart de cercle AED, par un plan oblique passant par la droite

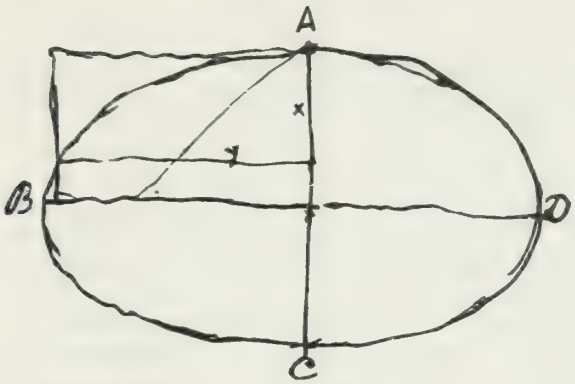
$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{3}{8}b^4pr - \frac{3}{8}b^5r - \frac{1}{8}b^5a - \frac{3}{8}bbpra^2 + \frac{3}{8}b^3ra^2 + \frac{1}{8}b^3a^3}{a^5 + 3a^3bb} & \text{KQ}\ ^{2)} \\ \dfrac{\frac{3}{8}pr - \frac{3}{8}br + \frac{3}{8}ba}{a} & \text{KC} \end{array}\right\}\ \text{ad.}$$

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\frac{bb}{a} \infty r$ $\quad \frac{3}{8}b + \frac{3pr - 3br}{8a}$ KC brachium ſolidi APBD ſuper AC [3])

$\frac{3}{16}p + \dfrac{3a^6b + 11a^4b^3 - 11aab^5 + 9aab^4p + 3b^6p - 3b^7}{16a^6 + 48a^4bb}$ CQ [4]) bon. brachium ungulæ cujusvis APBC ſuper AC.

[Sixième Partie] [5]).

[Fig. 50.]



$\frac{1}{4}\frac{yy}{x} + x \infty a$ [Fig. 50]

$\frac{1}{4}yy + xx \infty ax$

$xx \infty ax - \frac{1}{4}yy$

$x \infty \frac{1}{2}a \pm$ [6]) $\sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}yy}$

Sphæroides ex converſione ellipſis ABCD circa axem AC ſubduplum diametri BD, ſi ſuſpendatur ex puncto A, iſochronas vibrationes habet pendulo longitudinis AC. Item quævis ſphæroidis portio, plano uno vel duobus axi AC perpendicularibus abſciſſa eidem pendulo iſochrona eſt [7]).

AD. On trouve évidemment le même bras de levier lorsque la base du cylindre est la moitié du cercle: ce qui est confirmé par la substitution $b = 0$, $p = 2p$ dans la formule pour CQ.

Dans la Quatrième Partie de cette Pièce il est fait usage de la valeur $\text{CQ} = \frac{3}{8}p$ (ou $\frac{3}{8}q$); voir, à la p. 477, le troisième alinéa de la note 2 de la p. 476.

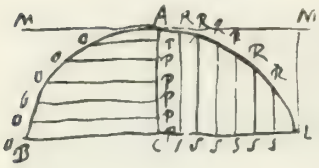
[5]) Manuscrit B, p. 99 verso.

[6]) C. à. d. $\pm$. Comparez la note 1 de la p. 426.

[7]) Ce calcul est analogue à celui de la p. 446 qui précède. Huygens considère d'abord un cercle horizontal suspendu au point A de la verticale qui passe par son centre; le fil a la longueur x, et le rayon du cercle est y. La longueur a du pendule isochrone avec ce cercle est donnée par l'équation

[Septième Partie][1].

[Fig. 51.]



Plano BAL [Fig. 51] ſuſpenſo ex A pendulum iſochronon habebitur ſi ſciatur ſumma cuborum OP ſive centrum gravitatis ungulæ [2]) ſuper ACB, plano per AC abſciſſæ.

Item ſumma linearum OP in quadrata diſtantiarum PA, vel ſumma cuborum RS, hoc eſt centrum gravitatis ungulæ ſuper CLA, abſciſſæ plano per CL ducto (nam, hoc centro gravitatis dato, dabitur et centrum gravitatis cunei ſuper BAL abſciſſi plano per MA ducto). Item ſumma linearum OP in diſtantias PA hoc eſt centrum gravitatis ſpatij BAL [3]).

Solido autem ex converſione trilinei ABC circa axem AC, ſuſpenſo ex A, pendulum iſochronon habebitur ſi cognoſcatur

Summa quadratoquadratorum OP, hoc eſt ratio ſummæ hujus ad totidem maximo æqualia.

Item ſumma quadratorum OP in quadrata diſtantiarum PA.

Item ſumma quadratorum OP in diſtantias PA, hoc eſt centrum gravitatis ſolidi ipſius propoſiti [4]).

$a = \frac{1}{4}\frac{y^2}{x} + x$, qui découle de l'équation générale: longueur du pendule isochrone $= \frac{\Sigma r^2}{nb}$, comme on peut s'en convaincre, p. e. en se servant de la méthode des onglets exposée dans les notes précédentes (voir les p. 474 et 477).

Le lieu de tous les cercles ainsi suspendus et possédant un même pendule isochrone, c. à. d. une même période d'oscillation, est donc l'ellipsoïde engendré par la rotation autour de AC de l'ellipse ABCD ou $x^2 = ax - \frac{1}{4}y^2$, dont l'axe horizontal BD est le double de l'axe vertical AC.

On peut vérifier ce résultat à l'aide de la formule générale trouvée pour l'ellipsoïde de révolution à la p. 473 qui précède.

[1]) Manuscrit B, p. 174. C'est sans doute à ce morceau que Huygens fait allusion dans sa lettre du 30 oct. 1664 à P. Petit (T. V, p. 129), où il dit avoir trouvé la „Methode generale". Comparez la fin de sa lettre du 31 oct. à Moray (T. V, p. 131).

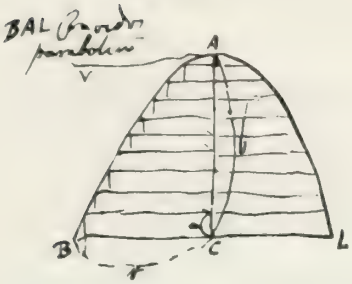
[2]) „Ungula" = „cuneus" (comparez la note 3 de la p. 498).

[3]) D'après la p. 515 (comparez à la p. 477 l'avant-dernier alinéa de la note 2 de la p. 476) on a: longueur du pend. isochr. avec la figure BAL oscillant dans son plan = (longueur l_1 du pend. isochr. avec la figure BAL oscillant perpendiculairement à son plan) $+ \frac{l'z'}{b'}$, où l' désigne la longueur du pendule isochrone avec la demi-figure ACB oscillant autour de l'axe AC, z' la distance du centre de gravité de la demi-figure à l'axe AC, et b' la distance du centre de gravité de la figure entière au point de suspension A.

Pour déterminer l', il faut connaître le centre de gravité de l'onglet „super ACB, plano per AC abcissæ" (voir la p. 458), ce qui conduit à évaluer $\Sigma(OP)^3$; pour déterminer l_1 il

[Huitième Partie] [5]).

[Fig. 52.]



BAL Conoides parabolicum [Fig. 52].
$s \infty$ planum ſemicirculi CB [Fig. 52 et Fig. 53].

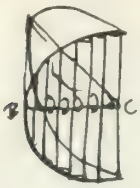
faut connaître le centre de gravité de l'onglet „super BAL abscissi plano per MA ducto". Huygens fait mention en outre de b', mais il ne parle pas de z'.

Connaissant le centre de gravité de l'onglet „super CLA (ou „super BLA") abcissæ plano per CL ducto", — ou plutôt la distance à BL de la projection de ce centre sur la base BLA — on connaîtra en effet également la distance à BL ou à MM de la projection sur cette même base du centre de gravité de l'onglet „super BAL abscissi plano per MA ducto"; ces deux onglets, qu'on peut supposer, pour fixer les idées, limités par des plans inclinés à 45°, peuvent former ensemble un cylindre à base BAL, et en prenant alors l'équation des moments autour de la droite BL p. e., on trouve que, la somme des moments des deux onglets étant égale au moment du cylindre, on a $(AC - a')(AC - b') = ab'$, où a désigne la distance à BL de la projection du centre de gravité de l'onglet, dont le plan oblique passe par MM, et a' la distance à BL de la projection du centre de gravité de l'onglet, dont le plan oblique passe par BL.

[4]) Il faut déterminer $\frac{\Sigma y^2 + \Sigma z^2}{b}$, où b désigne la distance à A du centre de gravité du corps, y la distance d'un point quelconque du corps à un plan horizontal passant par MM, et z la distance de ce point à un plan passant par le point C et l'axe d'oscillation A perpendiculaire au plan du papier. Pour trouver Σy^2 on peut transformer le corps, découpé en tranches horizontales, en une surface plane située dans le plan du papier (voir, à la p. 471, l'avant-dernier alinéa de la note 4 de la p. 470), élever ensuite sur cette surface plane un onglet dont le plan oblique passe par MM, et calculer le moment de cet onglet par rapport à MM, donc la „summa quadratorum OP in quadrata distantiarum PA". Pour trouver Σz^2, on peut également diviser le corps en tranches circulaires horizontales et prendre les moments par rapport aux axes P (perpendiculaires au plan du papier) des onglets élevés sur les demi-cercles et limités par des plans obliques passant par les axes P, ce qui conduit en effet à évaluer $\Sigma(OP)^4$; ce qu'on peut démontrer en se servant de la méthode d'„intégration" dans laquelle on remplace les sections droites de l'onglet considéré par des ordonnées (voir le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 464).

[5]) Manuscrit B, P. 174. Pour trouver la longueur du pendule isochrone avec un segment d'un paraboloïde de révolution, suspendu au point A, Huygens se sert de la formule générale. Voir la note précédente et la note 7 de la p. 485; comparez aussi la note 1 de la p. 369.

[Fig. 53.]



$$\frac{3}{8}q$$

$$\frac{2rr}{3q}$$

$$\frac{1}{4}rr$$

n numerus particularum in ſegmento BC [Fig. 53]

$$\frac{1}{4}rrn$$

b numerus ſegmentorum [Fig. 52] [1]).

$$3 \text{ —— } 1 \text{ —— } \frac{1}{4}rrnb \text{ —— } \frac{1}{12}rrnb \text{ [2])}$$

$p \infty$ AC [Fig. 52]. Ergo npp numerus ſegmentorum b } m. [3]) ∞ ſumma quadratorum à perpendicularibus particularum ſegmenti BC cadentibus in planum AV [4]).

$$4 \text{ —— } 1 \text{ —— } nppb \,/\, \frac{1}{4}nppb \text{ [5])}$$

$$\frac{2}{3}p \qquad \frac{1}{2}pp \qquad \frac{1}{2}nb$$ numerus particularum in conoide

$$\frac{3}{4}p \qquad \frac{1}{2}bn \qquad \frac{2}{3}p$$

$$\frac{1}{2}pp \qquad \frac{1}{4}ppbn \text{ [5])} \qquad \frac{1}{3}nbp \text{ [6])}$$

$$3 \text{ —— } 1 \text{ —— } npb \,/\, \frac{1}{3}nbp \text{ [6])}$$

$$\frac{\frac{1}{12}rrnb + \frac{1}{4}ppnb}{x} \infty \frac{1}{3}pnb \text{ [7])}$$

$$\frac{1}{12}rr + \frac{1}{4}pp \infty \frac{1}{3}px$$

$$\frac{1}{4}\frac{rr}{p} + \frac{3}{4}p \infty x$$

[1]) Le calcul de $\frac{1}{4}r^2n$, où $r =$ BC, est identique au calcul de $\frac{1}{4}nc^2$ dans le cas considéré dans la Quatrième Partie de cette Pièce et q a la même signification (voir, à la p. 477, le troisième alinéa de la note 2 de la p. 476). La Fig. 53 représente un onglet élevé sur le demi-cercle. On a $\Sigma z^2 = \frac{1}{4}r^2n$, où z a la même signification que dans la note nommée, et où le signe Σ s'appli-

que au demi-cercle considéré (il est évident qu'on peut faire le calcul en considérant les demi-cercles et le demi-paraboloïde tout aussi bien qu'en considérant le paraboloïde entier), ou plutôt à un segment infiniment petit (appelé „segmentum BC") de hauteur déterminée a [Fig. 52] ayant le demi-cercle pour base. Si l'on étend l'intégration à un cylindre de hauteur AC élevé sur la même base, on trouve $\Sigma z^2 = \frac{1}{4} r^2 nb$, nb étant le nombre des particules dans le demi-cylindre entier.

[2]) Pour le demi-paraboloïde de révolution Σz^2 est le tiers de la somme Σz^2 pour le demi-cylindre. En effet, pour chaque tranche horizontale le Σz^2 (comparez les six dernières lignes de la note 4 de la p. 483) est proportionnel à la 4ième puissance du rayon de cette tranche, donc au carré de sa distance au plan AV. Cette relation est représentée par une parabole, et la considération de l'aire de cette parabole conduit au résultat cherché.

[3]) m. = multiplicando.

[4]) Cette somme est donc égale à np^2.

[5]) C. à. d. le Σy^2 (où y désigne la distance d'un point quelconque au plan horizontal passant par A) du demi-paraboloïde par rapport à ce plan AV est égal au quart du Σy^2 pour le demi-cylindre.

On peut aussi trouver le Σy^2 cherché, en formant le produit du nombre de particules contenues dans le demi-paraboloïde par la distance du point A au centre de gravité du paraboloïde et par la distance du point A au pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan BAL du centre de gravité d'un onglet construit sur une figure plane S (comparez la p. 282 du T. XIV) contenant dans chaque tranche horizontale autant de particules que la tranche correspondante du paraboloïde et limité par un plan oblique passant par la droite AV. C'est la formule n.FG.FH de la note qui occupe la p. 474.

Le nombre de particules dans le demi-paraboloïde est $\frac{1}{2} nb$, si l'on désigne toujours par n le „numerus particularum in segmento BC". Mais le nombre de particules pour le paraboloïde entier sera $\frac{1}{2} nb$, si l'on désigne par n le nombre de particules dans le segment BL entier. C'est ce qui résulte du théorème d'Archimède („de Conoidibus et Sphæroidibus", XXI) d'après lequel le volume du paraboloïde de révolution est égal à $1\frac{1}{2}$ fois celui du cône BAL; car le volume de ce dernier corps est $\frac{1}{3} nb$, n étant le „numerus particularum" dans le segment BL.

La distance du centre de gravité du paraboloïde au point A est $\frac{2}{3} p$ (voir la dernière ligne de la p. 282 du T. XIV).

Reste à savoir si $\frac{3}{4} p$ est la distance de A au pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan BAL du centre de gravité de l'onglet nommé, élevé sur la figure plane S. Or, la figure S est un triangle isoscèle, tel que BAL, et l'onglet par conséquent une pyramide scalène à base perpendiculaire au plan du papier. On trouve donc en effet $\frac{3}{4} p$.

[6]) C'est le „moment" du paraboloïde (produit de sa „masse" par la distance de son centre de gravité à A [Fig. 52]).

[7]) C'est l'équation générale de la longueur du pendule isochrone (voir, à la p. 471, le premier alinéa de la note 6 de la p. 470) $x = \frac{\Sigma r^2}{(n)(b)}$, où $(n) = \frac{1}{2} nb$ et $(b) = \frac{2}{3} p$, tandis que $\Sigma r^2 = \Sigma z^2 + \Sigma y^2 = \frac{1}{12} r^2 nb + \frac{1}{4} p^2 nb$.

[Fig. 53.]

$$\frac{3}{8}q$$

$$\frac{2}{3}\frac{rr}{q}$$

$$\frac{1}{4}rr$$

$$sa$$

$$\frac{1}{4}rrsa$$

$$3 \text{ ——— } 1 \text{ ——— } \frac{1}{4}rrsab \,/\, \frac{1}{12}rrsab$$

$$4 \text{ ——— } 1 \text{ ——— } sab^3 \,/\, \frac{1}{4}sab^3$$

$$3 \text{ ——— } 1 \text{ ——— } sabb \,/\, \frac{1}{3}sabb$$

$$\frac{\frac{1}{4}sab^3 + \frac{1}{12}sabrr}{x} \infty \frac{1}{3}sabb$$

$$\frac{\frac{1}{4}bb + \frac{1}{12}rr \infty \frac{1}{3}bx}{\frac{3}{4}b + \frac{1}{4}\frac{rr}{b} \infty x}$$ [1])

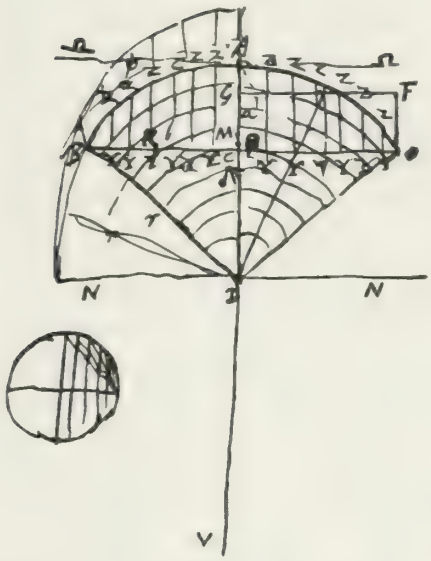
[1]) Même calcul qu'à la p. 484, où le nombre de particules n est remplacé par l'élément de volume sa renfermant ce nombre de particules. Voir sur s le texte de la p. 483, et sur a la note 1 qui commence à la p. 484.

XII [1]).

[1664].

[Première Partie][2]).

[Fig. 54.]



1664. oct.

AC ∞ a
CB ∞ b
AB ∞ p
DB ∞ r
DM ∞ x

Super ſectore DBAO [Fig. 54] parallelepipedum erectum intelligatur, idque ſecari plano tranſeunte per NDN quæ parallela est BO; quæritur MD brachium ſuper ND, ſolidi abſciſſi, baſin habentis ſectorem DBAO [3]).

Sit ▭ CGFO ∞ portioni CAO. erit G punctum ſub centro gravitatis ſuperficiei curvæ propoſiti ſolidi. quia enim ductis YZ æqualiter inter ſe diſtantibus et normalibus ad CO, partes dictæ ſuperficiei curvæ æquales inter binas quaſque YZ, YZ intercipiuntur; ut facile oſtenditur ex eo quod ſphæræ ſuperficies planis æqualiter diſtantibus in partes æquales dividitur [4]); idem itaque eſt ac ſi in punctis Z æquales gravitates ſuſpenſæ eſſent quæ ſingulæ ſi deſignentur lineis YY, erit jam momentum omnium ſimul iſtarum gravitatum ſuper CO æquale omnibus YZ in YY. cui æquatur quod fit ex GC in omnes YY, quia ▭

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 169, 171 et 172 du Manuscrit B.

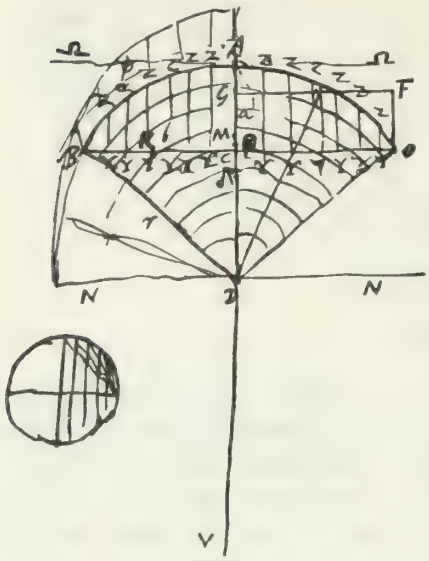
[2]) Manuscrit B, p. 171 et 172.

[3]) En d'autres termes (voir le théorème de la p. 458) on cherche la longueur DM ou x du pendule isochrone avec le secteur de cercle DBAO, lorsque D est le point de suspension, et que le mouvement est solide (voir la p. 499).

[4]) Il paraît plus facile de démontrer directement l'égalité des éléments de la surface cylindrique considérée.

GO æquale ponitur portioni ACO. Itaque omnes gravitates YY ſuſpenſæ ex puncto G æqualiter gravitant ſuper CO, atque cum ſingulæ ex punctis Z ſuſpenduntur. Quare G erit ſub centro gravitatis omnium ex punctis Z ſuſpenſarum. quod erat demonſtrandum.

[Fig. 54.]



Quod ſi jam ſumatur GM $\infty \frac{1}{4}$ GD. dico M eſſe ſub centro gravitatis ſolidi propoſiti.

Si enim ſolidum dividi intelligatur ſuperficiebus infinitis cylindricis quarum tamen minima et ubique æqualis craſſitudo concipitur, æqualiter inter ſe diſtantibus ac parallelis ſuperficiei cylindricæ quæ ſuper BAO, harum ſingularum centra gravitatis ſimiliter dividente ſuas diametros, hoc eſt partes lineæ AD, æqualiter ſeſe excedentes, ſicut AD diviſa eſt in G. Unde et diſtantiæ iſtorum centrorum gravitatis æqualiter dividente lineam GD. Sunt autem ſuperficies iſtæ inter ſe ſicut quadrata ſuarum diametrorum; Itaque ad lineam GD appendi gravitates intelligendum æqualibus intervallis diſtantes quæque creſcunt ut quadrata numerorum ab unitate, ac proinde centra gravitatis ipſarum omnium ita dividere rectam GD, uti axis coni GD divideretur, a centro gravitatis coni cujus vertex D. hoc eſt ut GM ſit $\frac{1}{4}$ GD [1]).

Hinc porro et brachium ungulæ ſuper portione BAO plano inclinato per BO tranſeunte abſciſſæ inveniri poteſt, quia ſolidum illud prius [2]) conſtat ex pyramide, et parallelepipedo ſuper portione ABO, et ungula hac; dantur autem centra gravitatis priorum partium duarum et proportio ad ungulam poſita nempe dimenſione arcuum circuli quoties opus.

Sequitur calculus ad inveniendum DM [1]).

---

[1]) L'exécution de ce calcul donne donc la longueur DM du pendule isochrone avec le secteur de cercle BAOD, lorsque ce secteur est suspendu au point D et que le mouvement est solide (voir la p. 499).

Connaissant DM, on peut ensuite trouver la longueur du pendule isochrone avec le secteur suspendu en D et oscillant dans son plan. Huygens trouve cette longueur à la p. 173 du Manuscrit B. Nous supprimons ce calcul, identique au fond avec celui de la p. 527 qui suit.

À la p. 172 du Manuscrit Huygens calcule encore le bras de levier de l'onglet construit sur la même base (le secteur) et limité par un plan oblique passant par ΩAΩ.

[2]) Il s'agit du solide décrit dans le premier alinéa de la p. 487.

$$\begin{array}{l} p \\ \frac{1}{2}r \\ \hline \frac{1}{2}pr \text{ ſector DAO} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} r-a & \text{DC} \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\text{CO} \\ \hline \frac{1}{2}br-\frac{1}{2}ba & \triangle\text{DCO} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ex } \frac{1}{2}pr & \text{ſect. DAO} \\ \hline \frac{1}{2}pr-\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ba & \triangle\text{CAO} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{div. per } b & \text{CO} \\ \hline \frac{\frac{1}{2}pr-\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ba}{b} & \text{CG} \\ r-a & \text{CD} \end{array} \Bigg\} \text{a}^{3)}$$

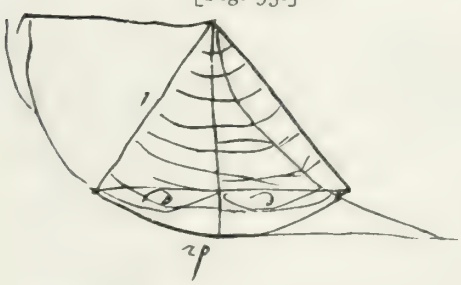
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{2}pr-\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}ba+br-ba}{b} \text{ ſive } \dfrac{\frac{1}{2}pr+\frac{1}{2}br-\frac{1}{2}ba}{b} \text{ GD} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{3}{4} \end{array}\right\} \text{m}^{3)}$$

$$\text{bon. } \frac{3}{8}r-\frac{3}{8}a+\frac{3}{8}\frac{pr}{b} \text{ DM} \infty x^{4)}$$

Hoc eſt ſi fiat ut ſubtenſa BO ad arcum BAO ita radius AD ad DV. Erunt $\frac{3}{8}$ totius CV æquales quæſitæ DM.

[Deuxième Partie] [5]).

[Fig. 55.]



$$xx \text{ —— } rr \text{ —— } x \Big/ \frac{rr}{x}$$

$$\begin{array}{c} 2p \\ \hline \frac{2prr}{x} \end{array}$$

$$p \text{ —— } d \text{ —— } \frac{2}{3}r \Big/ \frac{2}{3}\frac{dr}{p} \qquad \left[\frac{dr}{p}\right]$$

$$\begin{array}{c} 2p \\ \hline 2dr \end{array}$$

[3]) a = addendo, m = multiplicando.

[4]) Voir la note 2 de la p. 526.

[5]) Manuscrit B, p. 169. Ce calcul, beaucoup plus bref que celui de la p. 173 (voir la note 1),

[Fig. 56.]

$\frac{2prr}{x}$ —— $2dr$ —— $4:3$

$3pr \infty 4dx$

$\frac{3}{4}\frac{pr}{d} \infty x$ pendulum iſochronon ſectori [1]).

$\frac{1}{3}ar \infty \frac{1}{4}br$

$4a \infty 3b$

semble être antérieur à celui-ci à cause de la place qu'il occupe dans le Manuscrit. Nous le plaçons néanmoins ici parce que la méthode de la p. 173 est la même que celle suivie dans quelques cas précédents, tandis que ce calcul-ci occupe une place à part.

[1]) Comparez sur la méthode de calcul l'avant-dernier alinéa de la p. 505 qui suit. On considère une oscillation de 180°. Tandis qu'en général la figure est divisée en „quadratula minima", dans ce cas-ci le secteur est divisé en anneaux très minces, comme la Fig. 55 l'indique. La longueur $\frac{rr}{x}$ correspond à la longueur $\frac{bb}{x}$ de la p. 505: c'est la hauteur à laquelle tous les points d'un anneau, situé à la distance r du centre ou point de suspension, pourraient s'élever librement „si peracta semioscillatione sursum suum motum converterent". La surface de cet anneau est $2p$ si l'on appelle $2p$ l'arc correspondant à l'anneau et 1 sa dimension infiniment petite dans le sens du rayon. L'expression $\frac{2prr}{x}$ correspond donc au produit de $\frac{bb}{x}$ par f (surface d'un carré), et il s'agit de trouver la somme de ces expressions pour tous les anneaux (l'expression $\frac{ccf}{x}$ de la p. 507). Huygens effectue cette intégration dans la Fig. 56. Comme l'arc p est proportionnel à r, la courbe qui correspond à $y = \frac{2prr}{x}$ (où les variables sont y et r tandis que x est une constante) est une „paraboloïdes" (voir la note 2 de la p. 475) du troisième degré. L'intégrale cherchée, exprimée par une aire, est donc $\frac{1}{4}br$ [Fig. 56], où $b = \frac{2pr^2}{x}$. Quant à l'expression $\frac{2}{3}\frac{dr}{p}$, elle représente la distance du centre de gravité du secteur au point de suspension, donc aussi la hauteur à laquelle ce centre s'élève. Il faut, d'après la p. 507, multiplier cette expression par la surface du secteur; mais on peut également multiplier $\frac{dr}{p}$, hauteur à laquelle le centre de gravité d'un anneau s'élève, par l'élément de surface (ici $2p$) et intégrer le produit (ici $2dr$) sur tous les anneaux. Cette intégration est effectuée au moyen de la parabole de la Fig. 56; on trouve ainsi l'intégrale $\frac{1}{3}ar$, où $a = 2dr$. D'après la p. 507 les deux intégrales $\frac{1}{3}ar$ et $\frac{1}{4}br$ doivent être égales. C'est ce qu'exprime l'équation $\frac{2prr}{x} : 2dr = 4:3$, où cette fois p, r et d sont des longueurs constantes, savoir celles qui correspondent à l'anneau extérieur ou, si l'on veut, au secteur de cercle donné. La valeur trouvée pour x s'accorde avec celle trouvée par Roberval (voir la note 2 de la p. 352).

Dans le cas particulier où le secteur est un demi-cercle on trouve $x = \frac{3}{4}p$, conformément au résultat obtenu plus haut (voir la Pièce VI, à la p. 442, Fig. 24).

XIII [1]).

[1664] [2]).

BA ∞ a, AC ∞ b, CD ∞ c [Fig. 57].

[Fig. 57.]

BE EA FE EO

$$a+\frac{2}{3}b \qquad \frac{2}{3}b \qquad \frac{1}{12}b \,\Big|\, \frac{\frac{1}{18}bb}{a+\frac{2}{3}b}$$

ad. [3])

$$a+\frac{2}{3}b \quad \text{BE}$$

$$\frac{3}{4}c$$

$$\frac{2}{3}c$$

$$\frac{1}{2}cc$$

$$a+\frac{2}{3}b$$

$$\frac{\frac{1}{18}bb}{a+\frac{2}{3}b}+a+\frac{2}{3}b \quad \text{BO}$$

$$\frac{\frac{1}{2}cc}{a+\frac{2}{3}b}$$

a. [3])

$$\frac{\frac{1}{18}bb+\frac{1}{2}cc}{a+\frac{2}{3}b}+a+\frac{2}{3}b \infty 2a$$

$$\frac{1}{18}bb+\frac{1}{2}cc+aa+\frac{4}{3}ab+\frac{4}{9}bb \infty 2aa+\frac{4}{3}ab$$

$$\frac{1}{2}cc \infty aa-\frac{1}{2}bb$$

$$cc \infty 2aa-bb \text{ [4])}$$

---

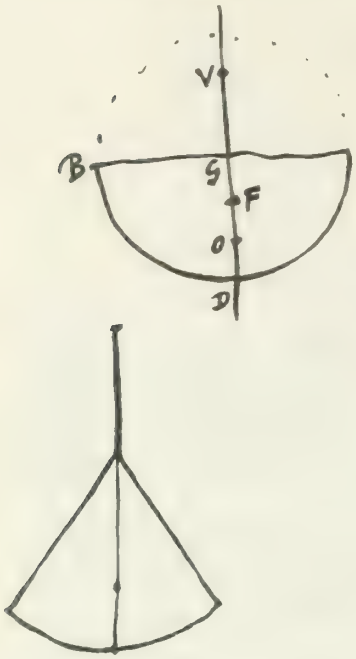
[1]) La Pièce est empruntée au Manuscrit B, p. 213. Comparez le calcul de la p. 448 (Fig. 28), où toutefois les deux triangles considérés étaient suspendus au point A.

[2]) Comparez la note 2 de la p. 435.

[3]) ad. ou a. = addendo.

[4]) Huygens calcule le pendule isochrone avec deux triangles infiniment minces, suspendus en

[Fig. 58.]



$\frown$BD $\infty\, p$ [1]) VO $\infty\, q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{ppq}$ [2]) [Fig. 58]

BG $\infty\, r$ VG $\infty \sqrt{\frac{1}{2}rr}$

$q =$ VF GF $\infty \frac{2}{3}\frac{rr}{p}$

ergo VF $\infty\, q \infty \sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p}$. ſubſtitue hunc valorem in VO

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p} + \frac{\frac{1}{2}rr}{\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p}} - \frac{\frac{4}{9}r^4}{pp\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}prr} \infty \sqrt{2rr} \infty 2\sqrt{\tfrac{1}{2}rr}\ ^{2})$$

$$\frac{2}{3}\frac{rr}{p} + \frac{\frac{1}{2}rr}{\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p}} - \frac{\frac{4}{9}r^4}{pp\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}prr} \infty \sqrt{\tfrac{1}{2}rr}$$

$$\frac{1}{2}rr + \frac{2}{3}\frac{rr\sqrt{\frac{1}{2}rr}}{p} + \frac{2}{3}\frac{rr\sqrt{\frac{1}{2}rr}}{p} + \frac{4}{9}\frac{r^4}{pp} + \frac{1}{2}rr - \frac{\frac{4}{9}r^4}{pp} \infty rr + \frac{4}{3}\frac{rr}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}rr}$$

$$\frac{4}{3}\frac{rr\sqrt{\frac{1}{2}rr}}{p} \infty \frac{4}{3}\frac{rr}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}rr}\ ^{2})$$

B, comme la figure l'indique, et oscillant dans leur plan. Comparez le calcul du même pendule isochrone à la p. 535 qui suit.

D'après la méthode dont il était déjà question dans les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477, et qu'on trouve exposée à la p. 515 qui suit, on a:

(longueur cherchée) = (longueur du pend. isochr. pour le mouv. solide) $+ \frac{l'z'}{b'}$,

où le mouvement solide est celui de la même surface suspendue de la même manière, tandis que l' désigne la longueur du pendule isochrone avec la demi-figure oscillant autour de l'axe AC, z' la distance du centre de gravité de la demi-figure à l'axe AC, et b' la distance du centre de gravité de la figure entière au point de suspension B.

Dans la Fig. 57 E est le centre de gravité de la figure entière. La longueur (BE + EO) du pendule isochrone pour le mouvement solide se détermine à l'aide de l'équation BE : EA = FE : EO, où les trois premiers termes sont connus; FE représente une „λ cunei" (voir la p. 472); l'équation est analogue à l'équation $b : a = \frac{1}{5}a : \frac{1}{5}\frac{a^2}{b}$ de la p. 472. Il s'agit de l'onglet obtenu en coupant par un plan oblique passant par une horizontale en A le „cylindre" élevé au-dessus de la figure composée des deux triangles.

On a en outre $l' = \frac{3}{4}c$, $z' = \frac{2}{3}c$, $b' = a + \frac{2}{3}b$.

La longueur du pendule isochrone est donc $\dfrac{\frac{1}{18}b^2 + \frac{1}{2}c^2}{a + \frac{2}{3}b} + a + \frac{2}{3}b$. En égalant cette expression à la constante $2a$, Huygens trouve que le lieu des extrémités inférieures des paires de triangles ayant toutes ce même pendule isochrone, est une circonférence de cercle dont le centre se trouve en A, et dont le rayon est égal à $\sqrt{2}\,AB^2$ ou $AB\sqrt{2}$.

On peut en déduire l'isochronisme des secteurs de cercle suspendus au point B déterminé par l'équation $AD = AB\sqrt{2}$ [Fig. 57]. Comparez la p. 537 qui suit.

[1]) C. à. d. le quart de la circonférence $= p$.

[2]) Huygens vérifie le résultat du calcul précédent (voir le dernier alinéa de la note qui précède la note 1), pour le cas où le secteur de cercle est un demi-cercle. Comme on a $BG = VG\sqrt{2}$ [Fig. 58], l'équation dont il était question dans ce dernier alinéa est satisfaite.

La longueur du pendule isochrone (avant-dernier alinéa de la même note) se réduit ici, puisque $b = 0$, à $\dfrac{\frac{1}{2}c^2}{a} + a$, c. à. d. à $2\sqrt{\frac{1}{2}rr}$ ou $\sqrt{2rr}$.

Or, le calcul direct de cette longueur donne $VO = q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{ppq}$. Il faut que les deux expressions soient égales, ce qui est effectivement le cas.

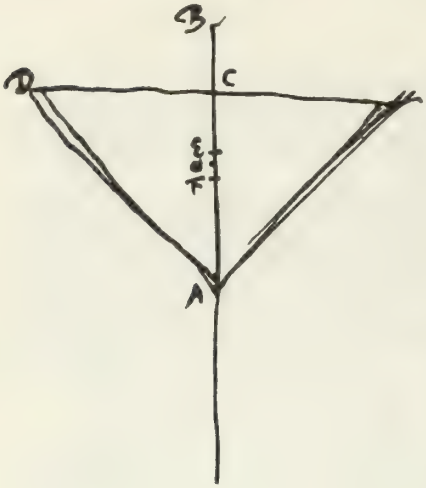
Dans le calcul direct de VO la formule générale (voir la même note) est de nouveau employée. La longueur du pendule isochrone pour le mouvement solide est VF ou q (F étant le centre de gravité du demi-cercle) + „λ trunci" (voir la p. 472); il s'agit du tronc ayant le demi-cercle pour base et limité par un plan parallèle à BG passant par le point V.

On a : λ trunci $= \frac{GF}{VF}(\lambda \text{ cunei}) = \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}\left(\frac{3}{8}p - \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}\right) = \frac{1}{4}\frac{r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{p^2q}$.

L'expression $\frac{l'z'}{b'}$ de la formule générale devient ici $\dfrac{\frac{3}{8}p \cdot \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}}{q} = \frac{1}{4}\frac{r^2}{q}$.

Donc $VO = q + \frac{1}{2}\frac{r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{p^2q}$.

[Fig. 59.]



BA ∞ a, AC ∞ b, CD ∞ c [Fig. 59]

BE EC FE EO

$$a - \frac{2}{3}b \text{ — } \frac{1}{3}b \text{ — } \frac{1}{6}b \;\Big|\; \frac{\frac{1}{18}bb}{a - \frac{2}{3}b}$$

$$\frac{3}{4}c \qquad\qquad a - \frac{2}{3}b \text{ BE} \quad \Big\} \text{ ad.}$$

$$\frac{\frac{2}{3}c}{\frac{\frac{1}{2}cc}{a - \frac{2}{3}b}} \qquad \frac{\frac{1}{18}bb}{a - \frac{2}{3}b} + a - \frac{2}{3}b \text{ BO}$$

$$\frac{\frac{1}{2}cc}{a - \frac{2}{3}b} \quad \Big\} \text{ a.}$$

$$\frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{2}cc}{a - \frac{2}{3}b} + a - \frac{2}{3}b \infty 2a$$

$$\frac{1}{18}bb + \frac{1}{2}cc - \frac{2}{3}ab + \frac{4}{9}bb \infty aa - \frac{2}{3}ab$$

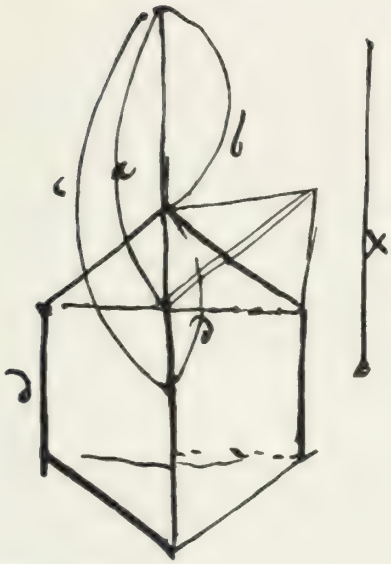
$$\frac{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc \infty aa}{cc \infty 2aa - bb}$$ [1])

[1]) Comme la Fig. 59 l'indique, la figure composée des deux triangles infiniment aigus à sommets A oscille dans son plan autour du point B. La méthode de calcul étant absolument la même que dans le cas précédent, nous pouvons nous abstenir de toute explication.

XIV [1]).

[1664] [2]).

[Fig. 60.]



$$\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}\frac{aa}{c} + \frac{1}{6}\frac{bb}{c}$$ [3]) [Fig. 60].

$$\begin{array}{ll} c - d \infty b & c - \frac{1}{2}d \infty a \\ \hline cc - 2cd + dd \infty bb & cc - cd + \frac{1}{4}dd \infty aa \end{array}$$

$$\frac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{9}}{\frac{20}{72}pp} \text{ Sed } pp \text{ [3])} \infty \frac{3}{4}dd$$

$$\frac{20}{72} \cdot \frac{3}{4} \quad \frac{60}{288} \quad \frac{10}{48} \quad \frac{5}{24}\frac{dd}{c}$$

$$\begin{array}{l} +\frac{4}{3}c \\ -\frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \\ -\frac{1}{3}c + \frac{1}{6}d \\ +\frac{1}{6}c - \frac{1}{6}d + \frac{1}{24}\frac{dd}{c} \\ +\frac{1}{6}c - \frac{1}{3}d + \frac{1}{6}\frac{dd}{c} \\ \hline c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c} \end{array}$$

---

[1]) Manuscrit B, p. 103 recto.

[2]) Voir la note 2 de la p. 435.

[3]) Huygens se propose de calculer la longueur x du pendule isochrone avec la surface d'un hexagone régulier de côté d, suspendu, comme la Fig. 60 l'indique, en un point situé à la

$$\left[c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c}\right]$$

$$\frac{\frac{5}{24}\frac{dd}{c}}{c + \frac{5}{12}\frac{dd}{c} \infty x}$$

ſi $c \infty d$ ſit $\frac{17}{12} d \infty x$

---

distance c de son centre et oscillant dans son plan. Il se sert à cet effet du Théorème de la p. 515 qui suit (comparez aussi les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477), ainsi que du résultat obtenu le 13 oct. 1664 pour la longueur du pendule isochrone avec la figure F12 C43F oscillant d'un mouvement solide (voir la Fig. 43 de la p. 468), figure dont l'hexagone régulier est un cas particulier. Les lettres a, b, et c dans la Fig. 59 ayant la même signification que dans la Fig. 43, il en résulte que la longueur du pendule isochrone avec l'hexagone, oscillant d'un mouvement solide, est donnée par la formule trouvée à la p. 469 (sixième ligne). Huygens transforme cette expression en $c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c}$.

Pour trouver la longueur du pendule cherché, il faut ajouter à cette expression la fraction $\frac{l'z'}{c}$, où l' désigne la longueur du pendule isochrone avec la demi-figure oscillant d'un mouvement solide autour de l'axe vertical de l'hexagone, et z' la distance du centre de gravité de la demi-figure à cet axe. On a $l' = \frac{5}{8}p$ et $z' = \frac{4}{9}p$, où p désigne la moitié de la diagonale horizontale de l'hexagone.

Pour trouver x il faut donc ajouter à $c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c}$ l'expression $\frac{5}{8}p \times \frac{4}{9}p$ ou $\frac{5}{24}\frac{dd}{c}$.

Plus tard Huygens a trouvé une formule générale pour la longueur du pendule isochrone avec un polygone régulier oscillant dans son plan (voir le 12ième des anagrammes de la p. 489 du T. VI, envoyés en 1669 à la „Royal Society").

XV [1]).

[1664] [2]).

Nous appellerons axe d'oſcillation une droite parallèle à l'horizon, paſſant par le point de ſuſpenſion, et autour duquel, tandis qu'il reſte immobile lui-même, l'oſcillation du pendule idéal conſidéré a lieu.

Nous appellerons *ſolide* le mouvement oſcillatoire d'une ſurface plane lorſque l'axe d'oſcillation eſt dans le même plan que la ſurface. Au contraire nous nommerons ce mouvement *plan* lorsque l'axe d'oſcillation eſt perpendiculaire à la ſurface, en d'autres termes lorsque la ſurface oſcille dans ſon propre plan.

Si l'on aſtreint une droite, perpendiculaire à une figure plane, à ſe mouvoir de telle manière qu'elle coupe le contour de cette figure ſucceſſivement en chacun de ſes points, la ſurface décrite par cette génératrice ſera appelée *ſurface prismatoïde*. Nous donnerons au contraire le nom de *ſolide prismatoïde* au ſolide compris entre deux plans parallèles, coupant la dite génératrice à angles droits, et la partie de la ſurface prismatoide qui eſt ſituée entre ces deux plans.

Nous appellerons *onglet* [Fig. 61] un corps solide conſtruit au-deſſus d'une figure plane, compris entre deux plans et la partie interjacente de la ſurface prismatoïde: le premier de ces plans coupe la génératrice de la ſurface à angles droits, l'autre plan eſt incliné par rapport au premier et paſſe par une tangente extérieure à la figure.

Au contraire nous parlerons d'un *tronc* conſtruit au-deſſus d'une figure plane [Fig. 62], lorsque le dernier des plans mentionnés paſſe par une droite ſituée à une certaine diſtance de la figure plane [3]).

Enfin l'onglet et le tronc ſeront dits à angle demi-droit lorsque le plan conſidéré a par rapport à la figure plane une inclinaiſon égale à la moitié d'un angle droit.

Un onglet ou tronc quelconque conſtruit au-deſſus d'une figure plane eſt égal au prismatoïde ſur la même base dont la hauteur eſt égale à la perpendiculaire à la baſe élevée au centre de gravité de la figure plane et terminée par le point où elle rencontre le plan oppoſé du tronc.

---

[1]) Manuscrit B, p. 192—199.

[2]) Comparez la note 2 de la p. 435.

XV [1]).

[1664] [2]).

Axis oſcillationis dicatur recta horizonti parallela, quæ per punctum ſuſpenſionis ducitur, ac circa quem immotum penduli agitatio fieri concipitur.

Superficiei planæ motus oſcillatorius ſolidus dicatur, cum axis oſcillationis eſt in eodem cum ſuperficie plano. Planus vero dicatur, cum axis oſcillationis ſuperficiei eſt ad angulos rectos, ſive quando ſuperficies ita agitatur ut à plano in quo eſt non exeat.

Si per ambitum figuræ planæ linea recta ipſi perpendicularis circumducitur, ſuperficies a linea circumducta deſcripta ſuperficies prismatoides vocetur. Solidum vero prismatoides quod planis duobus parallelis, dictam lineam ad angulos rectos ſecantibus, et ſuperficie prismatoide inter utrumque planum interjecta continetur.

[Fig. 61.]

Cuneus [Fig. 61] ſuper figura plana vocetur, ſolidum duobus planis et portione ſuperficiei prismatoidis inter ea interjectæ contentum, quorum planorum alterum ſecat latus ſuperficiei ad angulos rectos, alterum ad hoc planum inclinatum eſt duciturque per rectam quæ figuram exterius contingit.

[Fig. 62.]

Truncus vero [Fig. 62] ſuper figura plana, cum dictorum planorum poſterius per rectam à figura plana diſtantem ducitur [3]).

Cuneus denique et truncus anguli ſemirecti dicantur, quando idem planum angulo ſemirecto ad figuram planam inclinatur.

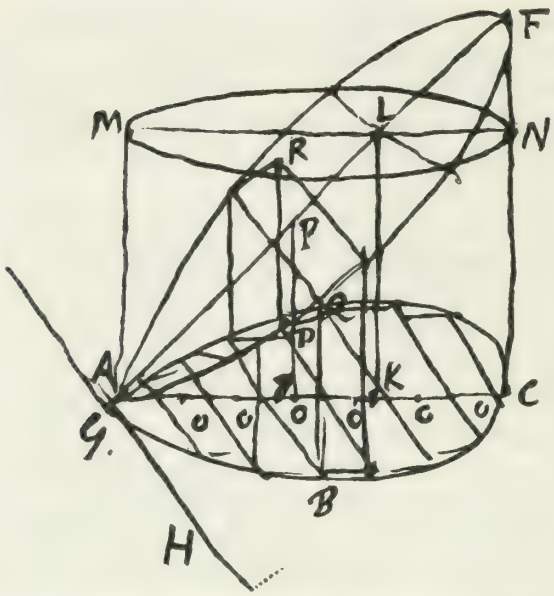
Cuneus vel truncus quilibet ſuper figura plana æqualis eſt prismatoidi ſuper eadem, cujus altitudo æqualis rectæ quæ a centro gravitatis figuræ planæ ſuper ipſam perpendicularis educta pertingit usque ad planum trunci oppoſitum.

---

[3]) Huygens avait déjà considéré en 1650 le „cuneus cylindricus" dans son Traité „De iis quæ liquido supernatant"; voir les p. 159—160 et 204—210 du T. XI. Le „truncus" correspondant y porte le nom de „portio cylindri" (p. 160). En 1651, dans son „Ἐξέτασις Cyclometriæ clarissimi viri Gregorii à S. Vincentio S. J." (voir la p. 329 du T. XI) il donne, avec ce dernier auteur, au „cuneus parabolicus" le nom de „ungula parabolica". On peut donc traduire „cuneus" par „onglet".

Conſidérons l'onglet AFC [Fig. 63] ou le tronc AEFC [Fig. 64] conſtruit au-deſſus de la ſurface plane ABCD [Fig. 63 et 64] et terminé par le plan oblique FE paſſant par la droite GH ſituée dans le même plan que la figure ABCD. Soit K le centre de gravité de la figure ABCD et puiſſe une perpendiculaire à cette figure élevée en ſon centre de gravité rencontrer le plan oblique en L. Soit AMNC le prismatoïde à hauteur KL conſtruit au-deſſus de la même figure ABCD. Je dis que ce prismatoïde eſt égal au tronc ou à l'onglet mentionné.

[Fig. 63.]

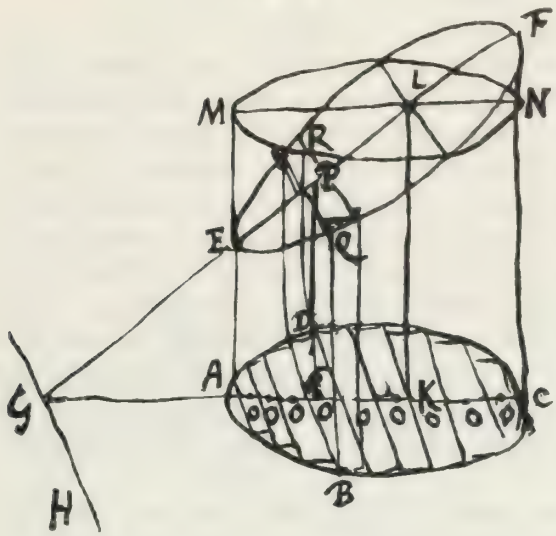


En effet, ſi l'on diviſe le plan ABCD en de très petits rectangles OOO par des lignes parallèles à la droite GH [1]), il eſt établi que ſi l'on multiplie chacun de ces rectangles par la diſtance de ſon centre de gravité à la droite GH (diſtances repréſentées par les droites OG) la ſomme des produits ſera égale à celui de la droite GK par l'enſemble des dits rectangles O. Or, ſi GK = KL, il apparaît que chaque diſtance OG eſt égale à la parallèle à KL partant du point O correspondant et terminée par le plan oblique de l'onglet ou du tronc. Partant la ſomme des produits de chacune de ces hauteurs par le rectangle O correſpondant ſera égale au produit de KL par l'enſemble des rectangles O. Or, ces produits ſont des parallélépipèdes à baſes rectangulaires O, tels que BDRQ, produit de la hauteur OP par le rectangle DB; et ces parallélépipèdes compoſent le corps entier de l'onglet AFC ou du tronc AEFC. D'autre part il eſt évident que le produit de KL par l'enſemble des rectangles O eſt égal au prismatoïde AMNC; celui-ci ſera donc égal à l'onglet AFC ou au tronc AEFC. Mais ſi KL eſt plus grande ou plus petite que KG, la hauteur de chacun des prismes de hauteur inégale conſidérés ſera augmentée ou diminuée dans le rapport GK : KL, et la hauteur du prismatoïde pareillement. Par conſéquent la ſomme de tous ces prismes, c. à. d. l'onglet, ou le tronc, AFC ſera égale au prismatoïde AMNC, ce qu'il fallait démontrer [2]).

---

[1]) En marge: „melius in minima quadratula dividetur" (il vaudra mieux diviser la surface en très petits carrés).

[Fig. 64.]



Sit ſuper figura plana ABCD [Fig. 63 et 64] cuneus AFC [Fig. 63] vel truncus AEFC [Fig. 64], abſciſſus plano obliquo FE tranſeunte per rectam GH quæ in eodem plano cum figura ABCD ſita ſit. Sitque figuræ ABCD centrum gravitatis K, unde ſuper ipſam perpendicularis educta occurrat plano obliquo in L. et intelligatur prismatoides AMNC ſuper eadem figura ABCD altitudinem habens KL. dico hoc trunco vel cuneo prædicto æquale eſſe.

Diviſo enim plano ABCD in minima rectangula OOO, lineis rectæ GH parallelis [1]), conſtat ſingula horum rectangulorum ducta in diſtantias centrorum ſuorum gravitatis à recta GH, (quæ diſtantiæ denotentur rectis OG) ſummam productorum facere æqualem ei quod fit ex recta GK in omnia dicta rectangula O. Quod ſi jam GK æqualis ſit KL, apparet etiam ſingulas diſtantias OG æquari ſingulis rectis ex punctis ijsdem O parallelis ipſi KL eductis usque ad planum cunei vel trunci obliquum. Quare et ſumma productorum ex ſingulis his altitudinibus in ſua rectangula O ductis æquabitur producto ex KL in omnia rectangula O. Atqui iſta producta ſunt parallelepipeda ſuper baſibus rectangulis O, quale unum eſt BDRQ productum ex altitudine OP in rectangulum DB: quæ parallelepipeda componunt cuneum totum AFC vel truncum AEFC; productum vero ex KL in omnia rectangula O, æquari manifeſtum eſt prismatoidi AMNC; ergo hoc cuneo AFC vel trunco AEFC æquale erit. Quod ſi vero KL major vel minor fuerit quam KG, priorum prismatum inæqualis altitudinis ſingulorum altitudo aucta erit vel diminuta ſecundum rationem GK ad KL, quemadmodum et prismatoidis altitudo. Ideoque rurſus ſumma illorum omnium, hoc eſt, cuneus vel truncus AFC prismatoidi AMNC æqualis erit, quod erat demonſtrandum [2]).

[2]) Comparez, à la p. 459, le sixième alinéa de la note 2 de la p. 458.

On lit ici (p. 194 du Manuscrit): hic interponendum lemma quod in sequentibus notatur signo ℵ. Ce signe se retrouve à la p. 199 où on lit: non hic sed superiori loco indicato poni debet. Nous faisons donc suivre ici le lemme en question.

Lemme.

Conſidérons [Fig. 65] une figure plane quelconque ABC et en dehors d'elle dans le même plan une ligne droite ED, et diviſons cette figure en de très petits carrés égaux par des lignes droites ſe coupant à angles droits. Suppoſons encore que des perpendiculaires ſoient abaiſſées ſur la dite ligne en dehors de la figure à partir des centres de gravité des différents petits carrés, p. e. la perpendiculaire FK partant du petit carré F. Élevons enſuite au-deſſus de la figure ABC le tronc à angle demi-droit ALMC, limité par un plan paſſant par ED. Et ſoit EH la diſtance entre cette droite ED et le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc ſur le plan ABC; EG la diſtance de cette même droite ED au centre de gravité de la figure ABC. Je dis que la ſomme des produits obtenus en multipliant chacun des carrés par le carré de la perpendiculaire abaiſſée de ſon centre de gravité ſur la droite ED eſt égale au produit de la figure ABC par le rectangle des droites HE et EG.

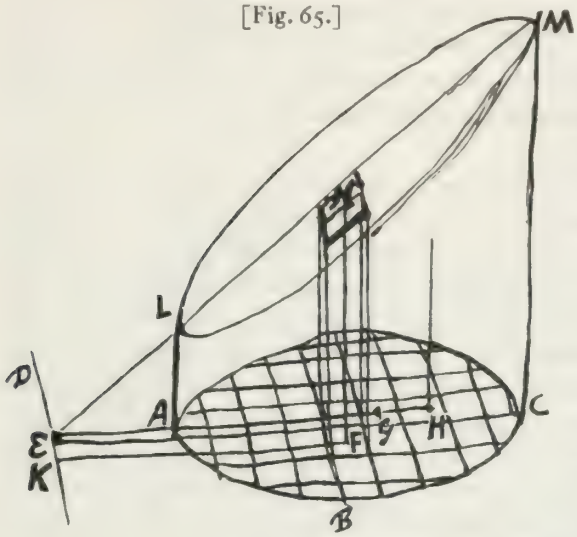
En effet, ſi nous conſidérons un des petits carrés en queſtion tel que F, au-deſſus duquel nous ſuppoſons conſtruit le parallélépipède FN limité par le même plan que le tronc ALNC, il appert que la hauteur de ce parallélépipède eſt égale à la perpendiculaire FK, et que la même choſe eſt vraie pour chacun des parallélépipèdes élevés ſur les autres petits carrés; et il eſt évident que l'enſemble de ces parallélépipèdes n'eſt autre que le tronc ALMC. Or, ſi nous multiplions le parallélépipède NF par la perpendiculaire FK, tirée de la baſe du parallélépipède à la droite ED, c. à. d. ſi nous formons le produit du petit carré F par le carré de FK, et que nous multiplions de même chacun des parallélépipèdes par la perpendiculaire à ED correſpondante, c. à. d. ſi nous formons le produit de chacun des petits carrés par le carré de la perpendiculaire à ED partant de ce petit carré: la ſomme des produits ſera égale au produit de l'enſemble des parallélépipèdes, c. à. d. du tronc ALMC, par la diſtance EH, lorsque le tronc a ſon centre de gravité au-deſſus du point H. Or, le tronc ALMC eſt égal au produit du plan ABC par la diſtance EG. Il apparaît donc que la ſomme des produits conſidérés des différents petits carrés par les carrés des perpendiculaires à ED correſpondantes eſt égale au produit du plan ABC par le rectangle des diſtances HE et EG. Ce qu'il fallait démontrer.

Le pendule ſimple iſochrone avec une figure plane quelconque, oſcillant d'un mouvement ſolide, a une longueur égale à la diſtance entre l'axe d'oſcillation et la perpendiculaire, abaiſſée ſur la figure, du centre de gravité d'un onglet ou tronc conſtruit ſur cette figure et limité par un plan paſſant par l'axe d'oſcillation [1]).

[1]) Comparez la p. 458.

Lemma.

[Fig. 65.]



Sit figura quævis plana ABC [Fig. 65], et extra eam in eodem plano linea recta ED, feceturque figura in quadrata minima æqualia lineis rectis fefe ad rectos angulos fecantibus. Et in dictam lineam extra figuram fitam ex centris gravitatis fingulorum quadratulorum perpendiculares ductæ intelligantur ficut ex quadratulo F ducta eft perpendicularis FK. Porro fuper figura ABC, erigatur truncus anguli femirecti ALMC, abfciffus plano per ED tranfeunte. Sitque EH diftantia inter ipfam ED et terminum perpendicularis a centro gravitatis trunci in planum ABC dimiffæ. EG vero diftantia ejusdem ED a centro gravitatis figuræ ABC. Dico fummam productorum quæ fiunt ductis quadratulis fingulis in quadrata perpendicularium ex fuis centris gravitatis in rectam ED dimiffarum, æquari producto ex figura ABC in rectangulum linearum HE, EG.

Confiderando enim unum dictorum quadratulorum ut F, fuper quod intelligatur parallelepipedum erigi FN, eodem plano quo truncus ALNC abfciffum, apparet altitudinem ejus æqualem effe perpendiculari FK. idemque accidere fingulis parallelepipedis fuper reliquis quadratulorum erectis; quæ etiam fimul fumpta æqualia liquet effe trunco ALMC. Ducto autem parallelepipedo NF in perpendicularem FK, à bafi fua ad rectam ED ductam, hoc eft ducto quadratulo F in quadratum ipfius FK: fimiliterque ductis parallelepipedis fingulis in fuas perpendiculares fuper ED, hoc eft, quadratulis fingulis in quadrata fuarum perpendicularium fuper ED: fumma productorum æqualis erit producto ex parallelepipedis omnibus, hoc eft ex trunco ALMC in diftantiam EH, quum truncus gravitet fuper H. Eft autem truncus ALMC æqualis producto ex plano ABC in diftantiam EG. Patet igitur fummam dictorum productorum ex quadratulis fingulis in quadrata fuarum perpendicularium fuper ED æquari producto ex plano ABC in rectangulum diftantiarum HE, EG. quod erat demonftrandum.

Planæ cuivis figuræ, motu folido agitatæ, ifochronum eft pendulum fimplex cujus longitudo æqualis diftantiæ inter axem ofcillationis et perpendicularem quæ in figuram demittitur ex centro gravitatis cunei vel trunci fuper eadem figura erecti abfciffique plano per axem ofcillationis ducto [1]).

Considérons une figure plane quelconque ABC [Fig. 66], mise en mouvement autour de l'axe d'oscillation ED situé dans le même plan qu'elle. Et soit Q le point sous le centre de gravité du tronc ou de l'onglet construit sur la figure et limité par le plan passant par l'axe ED; QE étant une perpendiculaire à ce dernier. Je dis que cette perpendiculaire est la longueur du pendule isochrone avec la figure ABC. En effet, si GH représente le pendule isochrone avec la figure, je ferai voir que ce pendule est égal à EQ.

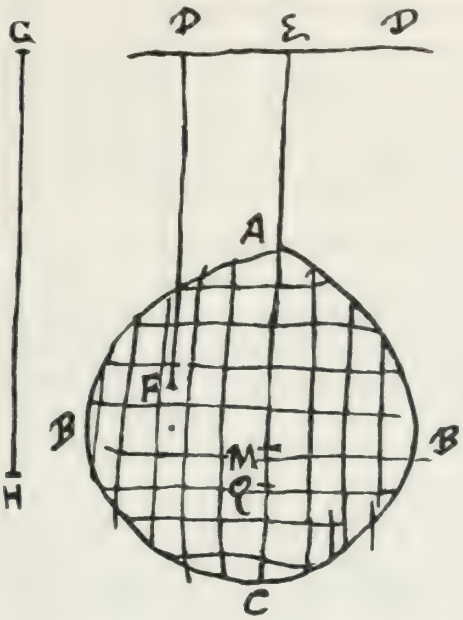
Pour démontrer cette proposition, supposons la figure ABC divisée en de très petits carrés égaux entre eux [1]; considérons un de ces carrés, p. e. celui qui a son centre en F, et abaissons de ce point une perpendiculaire sur la droite ED. Or, puisque le pendule GH est par hypothèse isochrone avec la figure ABC, le poids H et un point quelconque de la figure parcourront dans le même temps des arcs semblables, s'ils ont été écartés l'un et l'autre d'un même angle de la position verticale; et après une demi-oscillation le point H et un point de la figure à distance HG de l'axe ED auront la même vitesse. Admettons que l'un et l'autre accomplissent une demi-oscillation aussi grande que possible, nous voulons dire une demi-oscillation d'un quart de circonférence de cercle. Au bout de cette demi-oscillation la vitesse du poids H sera donc à la vitesse du petit carré F comme la longueur GH est à DF. Appelons GH, x; et DF, b.

Nous savons que la hauteur à laquelle peut monter le poids H après avoir accompli une demi-oscillation est à la hauteur à laquelle pourrait s'élever le petit carré F si, après avoir accompli avec la figure une demi-oscillation, il était libre de monter séparément aussi haut que possible, comme le carré de GH, ou x^2, est au carré de DF, ou b^2. Mais la dite hauteur à laquelle peut s'élever le poids H n'est autre que GH ou x, puisqu'il est évident qu'il montera à une hauteur égale à celle dont il est descendu. Par conséquent, comme on a $x^2 : b^2 = x : \frac{b^2}{x}$, $\frac{b^2}{x}$ sera la hauteur à laquelle pourrait s'élever le petit carré F, comme nous venons de le dire. On obtient donc cette hauteur en divisant le carré de FD par la longueur GH. Le même raisonnement fera voir que la hauteur à laquelle pourrait s'élever l'un quelconque des autres petits carrés si, après avoir accompli une demi-oscillation, il pouvait employer son mouvement à monter aussi haut que possible, se calcule en divisant le carré de la distance du petit carré à la droite ED par la longueur GH ou x. Par conséquent, si l'on appelle c^2 la somme de tous les carrés des distances des différents petits carrés à la droite ED, la somme de toutes ces hauteurs sera $\frac{c^2}{x}$.

Or, si l'on multiplie chacune des hauteurs par le petit carré correspondant, la somme de tous les produits sera $\frac{c^2 f}{x}$. Et cette somme de produits doit être égale au produit de l'ensemble des petits carrés, c. à. d. de la figure ABC, par la hauteur

[1]) La somme de ces carrés est donc considérée comme la surface *entière*.

[Fig. 66.]



Sit plana figura quævis ABC [Fig. 66], agitata circa axem oſcillationis ED in eodem cum ipſa plano exiſtentem. Sit autem punctum Q ſub centro gravitatis trunci vel cunei ſuper figura erecti abſciſſique plano per ED ducto; in quam perpendicularis ſit QE. Dico hanc ipſam eſſe longitudinem penduli iſochroni figuræ ABC. Poſito enim pendulo GH quod ſit figuræ iſochronon oſtendam hoc ipſi EQ æquale eſſe.

Intelligatur enim figura ABC ſecta in quadrata minima æqualia [1]) quorum unum conſideretur puta cujus centrum F, à quo in rectam ED perpendicularis ducatur FD. Jam quia pendulum GH iſochronon ponitur figuræ ABC, ſi æqualibus angulis a ſitu perpendiculari extrahantur, æquali tempore ſimiles arcus pondus H et quodlibet figuræ punctum percurrent, peractaque ſemioſcillatione eadem erit celeritas ponderis H atque puncti figuræ quod longitudine HG ab axe ED diſtabit. Ponamus autem utrumque facere ſemioſcillationem maximam ſive quadrantulæ. Itaque in fine ejus erit celeritas ponderis H ad celeritatem quadratuli F ſicut longitudo GH ad DF. Vocetur GH, x; DF, b.

Eſt autem ut quadr. GH, hoc eſt, xx, ad quadratum DF, hoc eſt bb, ita altitudo quo aſcenderet peracta ſemioſcillatione pondus H, ad altitudinem quo aſcenderet quadratulum F ſi peracta cum figura ſemioſcillatione, ſeparatim deinde motum ſuum ſurſum converteret. Dicta autem altitudo quo aſcenderet pondus H eſt ipſa GH ſive x, quum conſtet ad æqualem ei unde deſcendit altitudinem aſcenſurum. Ergo quia xx ad bb ut x ad $\frac{bb}{x}$, erit $\frac{bb}{x}$ altitudo ad quam, uti dictum eſt, aſcenderet quadratulum F. quam altitudinem itaque haberi conſtat applicando quadratum ex FD ad longitudinem GH. Eodem modo autem invenietur altitudo ad quam aſcenderet unumquodque quadratulorum reliquorum ſi peractâ ſemioſcillatione ſurſum ſuum motum converteret, oriri ex applicatione quadrati diſtantiæ ſingulorum ab recta ED ad longitudinem GH ſive x. Quare ſi ſumma omnium quadratorum, quæ fiunt à diſtantijs ſingulorum quadratulorum ab recta ED, dicatur cc, erit ſumma omnium altitudinum illarum $\frac{cc}{x}$.

Si vero ſingulæ altitudines in quadratula ſua ducantur, ſumma omnium producto-

dont le centre de gravité de cette figure eſt deſcendu, laquelle hauteur eſt EM [1]) à cauſe de l'amplitude maximale de la demi-oſcillation; en effet, il faut admettre cette égalité qui exprime que le centre de gravité de tous les petits carrés, après que chacun d'eux a converti en aſcenſion la viteſſe acquiſe par la demi-oſcillation, eſt ſitué à une hauteur égale à celle dont le centre de gravité eſt deſcendu par hypothèſe. Par conſéquent, ſi nous appelons p la figure ABC et g la diſtance ME, la ſomme en queſtion $\frac{c^2f}{x}$ ſera égale à pg; et en multipliant les deux membres par x, on obtiendra: $c^2f = pgx$. Nous ſavons en outre que l'expreſſion c^2f, c. à. d. la ſomme des produits qu'on obtient en multipliant chacun des petits carrés par le carré de ſa diſtance à la droite ED, eſt égale au produit du rectangle de ME et de QE par la figure ABC, bien entendu en conſidérant un tronc à angle demi-droit ſous le centre de gravité duquel ſe trouve le point Q. Poſant QE $= k$, nous aurons donc $gkp = c^2f$. Mais nous avons démontré que $c^2f = pgx$. Par conſéquent on a auſſi $gkp = pgx$. Et, en diviſant de part et d'autre par gp, on aura $k = x$, c. à. d. EQ = GH, ce qu'il fallait démontrer.

Il importe donc de connaître le centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur la figure plane ou du moins la diſtance entre l'axe d'oſcillation et le plan parallèle à cet axe perpendiculaire à la baſe de l'onglet et paſſant par le centre de gravité de ce dernier, pour qu'on puiſſe trouver le pendule iſochrone avec la figure oſcillant d'un mouvement ſolide autour d'un axe qui la touche. Et pour trouver le pendule iſochrone correſpondant au cas où l'oſcillation a lieu autour d'un axe extérieur à la figure et ne la touchant pas, il faut trouver d'abord le centre de gravité du tronc ou du moins la dite diſtance au plan paſſant par ce centre. Lorſque cette dernière diſtance eſt connue pour l'onglet, et qu'on connaît auſſi le centre de gravité de la figure donnée, baſe de l'onglet, la diſtance correſpondante pour le tronc ſera toujours, elle auſſi, connue: on la déterminera de la manière ſuivante.

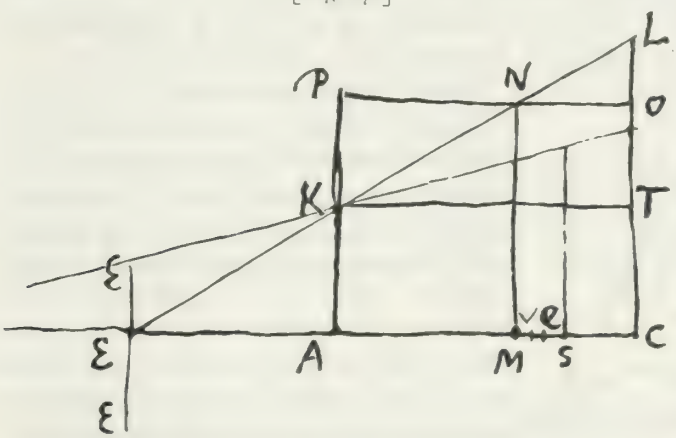
Conſidérons le tronc AKLC [Fig. 67] conſtruit au-deſſus d'une figure plane quelconque, repréſentée, lorſqu'on la regarde de côté, par la ligne AC. Le tronc eſt limité par un plan paſſant par la droite EE ſituée dans le même plan que la figure; la droite CAE paſſant par M, centre de gravité de la figure, eſt par hypothèſe perpendiculaire à EE. Quant à la longueur AC il faut ſavoir qu'elle eſt égale à la diſtance de deux droites parallèles à EE et comprenant entre elles la baſe du tronc AKLC. Or, ſi nous diviſons le tronc conſidéré par un plan KT paſſant par K et parallèle à AC en un onglet KLT et un priſmatoïde AKTC, et qu'un plan paſſant par le centre de gravité de l'onglet KLT coupe la droite AC en S perpendiculairement; et qu'on conſtruiſe MQ de telle manière que EM : MA = SM : MQ [2]); je dis que Q ſe trouve dans un plan perpendiculaire à AC et paſſant par le centre de gravité du tronc AKLC.

[1]) M [Fig. 66] est donc le centre de gravité de la surface. [2]) Voir la note 1 de la p. 508.

rum erit $\frac{ccf}{x}$. Hæc vero productorum ſumma æqualis eſſe debet producto ex omnibus quadratulis, hoc eſt, ex figura ABC in altitudinem unde deſcendit ipſius centrum gravitatis; quæ eſt EM [1]), propter ſemioſcillationem maximam; ita enim fieri neceſſe eſt, quo centrum gravitatis quadratulorum omnium, poſtquam ſingula celeritatem ſemioſcillatione acquiſitam ſurſum converterunt, æque altum inveniatur atque unde deſcendiſſe ponitur. Ergo, ponendo p pro figura ABC, et g pro diſtantia ME, erit ſumma prædicta $\frac{ccf}{x} \infty pg$; ac ducendo utraque in x, fiet $ccf \infty pgx$. Jam porro ccf, hoc eſt, ſummam productorum, quæ fiunt ducendo ſingula quadratula in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta ED, ſcimus æquari producto ex rectangulo ME, QE in figuram ABC, ſi nempe truncum anguli ſemirecti ponamus ſub cujus centro gravitatis eſt punctum Q; ergo ponendo QE ∞k, erit $gkp \infty ccf$. Sed ccf oſtendimus æquari pgx. Ergo et $gkp \infty pgx$. Et, dividendo utrinque per gp, erit $k \infty x$, hoc eſt EQ ∞ GH, quod erat oſtendendum.

Oportet igitur noviſſe centrum gravitatis cunei ſuper figura plana aut ſaltem diſtantiam inter axem oſcillationis et planum ipſi parallelum quod per centrum gravitatis cunei in baſin ejus perpendiculare eſt ut figuræ agitatæ motu ſolido circa axem qui ipſam contingat, pendulum iſochronon reperiri poſſit. Ut autem habeatur agitatæ circa axem remotum, oportet trunci centrum gravitatis aut dictam diſtantiam plani per ipſum ducti prius invenire. Semper autem data illa diſtantia in cuneo, itemque centro gravitatis figuræ propoſitæ quæ baſis ejus eſt, etiam diſtantia in trunco ea dabitur, reperieturque hoc modo.

[Fig. 67.]

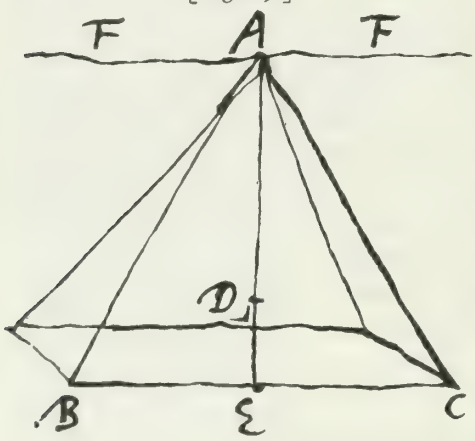


Sit ſuper plana figura qualibet, quæ a latere inſpecta referatur linea AC [Fig. 67], erectus truncus AKLC, abſciſſus plano ducto per rectam EE in eodem figuræ plano jacente et ad quam recta CAE, per figuræ centrum gravitatis quod ſit M, tranſiens, perpendicularis intelligitur. longitudo autem AC tanta putanda eſt quanta eſt diſtantia duarum rectæ EE parallelarum quæ baſin trunci AKLC comprehendunt. Quod ſi jam ducto per K plano KT ipſi AC parallelo dividatur truncus propoſitus in cuneum KLT et prismatoides AKTC; perque centrum gravitatis cunei KLT tranſiens planum ſecet rectam AC

En effet, prolongeons le prismatoïde AKTC [Fig. 67] jusqu'en PO de telle manière que le corps entier APOC soit égal au tronc AKLC, savoir en faisant passer un plan parallèle à AC [2]) par le point N où la perpendiculaire élevée au centre de gravité M rencontre le plan KL. Il en résultera aussi que le prismatoïde KPOT est égal à l'onglet KLT [3]). Or, le prismatoïde APOC est à KPOT comme CO est à OT, c. à. d. comme EN est à NK, c. à. d. comme EM est à MA, c. à. d. comme SM est à MQ. C'est pourquoi le même prismatoïde APOC sera aussi à l'onglet KLT comme SM est à MQ; d'où l'on tire par partage que le rapport du prismatoïde AKTC à l'onglet KLT est égal à SQ : QM. Or, l'onglet KLT a son centre de gravité au-dessus du point S et le prismatoide AKTC a son centre de gravité au-dessus du point M, puisque M est le centre de gravité de sa base. Par conséquent comme SM est divisée de telle manière en Q que les distances QS et QM sont inversement proportionnelles aux poids qui se trouvent au-dessus de S et de M, Q sera le point d'équilibre du poids composé de ces deux poids, l'équilibre étant considéré par rapport à la ligne EE [4]). Par conséquent EQ sera la distance cherchée et en même temps la longueur du pendule isochrone avec la figure AC oscillant autour de l'axe EE.

Lorsqu'un rectangle tel que ABCD [Fig. 68] oscille d'un mouvement solide autour d'un de ses côtés AB, la longueur du pendule isochrone EF sera donc égale à deux tiers du côté AD perpendiculaire à l'axe; en effet, un onglet étant construit sur le rectangle ABCD, onglet limité par un plan passant par AB, l'extrémité d'une perpendiculaire abaissée sur le plan AC et passant par le centre de gravité de l'onglet est située à une distance de AB égale à deux tiers du côté AD. On en conclut aisément que le centre d'oscillation d'une barre ou ligne pesante, en d'autres termes l'extrémité du pendule isochrone avec elle et suspendu au même point, est éloigné de ce point à une distance de deux tiers de la longueur de la barre.

[Fig. 69.]



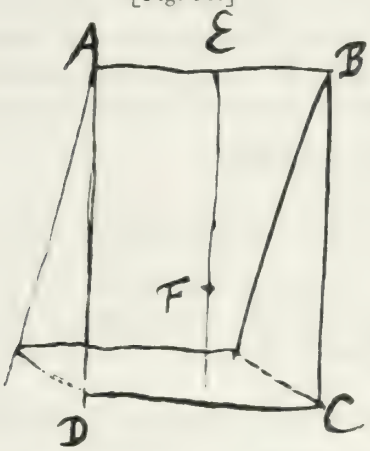
Mais lorsqu'un triangle isoscèle BAC [Fig. 69] suspendu à son sommet A oscille d'un mouvement solide, son centre d'oscillation D se trouvera à une distance de A égale à trois quarts du diamètre AE. En effet, l'onglet construit au-dessus du triangle ABC et limité par un plan passant par FAF qui est parallèle à la base BC, n'est autre chose qu'une pyramide scalène ayant son sommet en A et dont la perpendiculaire du sommet sur la base est le diamètre AE du triangle donné. Or, le plan passant par

[1]) Puisque M est le centre de gravité de la figure plane, S son centre d'oscillation par rapport à

ad angulos rectos in S. Et fiat ficut EM ad MA, ita SM ad MQ [1]). Dico Q effe in plano per centrum gravitatis trunci AKLC tranfeunte ad AC recto.

Extendatur enim prismatoides AKTC (Fig. 67) usque in PO, ut totum APOC fit trunco AKLC æquale, ducto nempe plano oppofito OC [2]) per N punctum, ubi perpendicularis a centro gravitatis M occurrit plano KL. Erit igitur et prismatoides KPOT æquale cuneo KLT [3]). Eft autem prismatoides APOC ad KPOT ut CO ad OT, hoc eft, ut EN ad NK, hoc eft ut EM ad MA, hoc eft, ut SM ad MQ. Quare idem prismatoides APOC erit quoque ad cuneum KLT ut SM ad MQ, et dividendo proinde, ficut prismatoides AKTC ad cuneum KLT ita SQ ad QM. Incumbit autem gravitas cunei KLT fuper S, et gravitas prismatoidis AKTC fuper M, quia M eft centrum gravitatis bafeos ipfius. Ergo cum SM ita divifa fit in Q ut diftantiæ QS, QM gravitatibus fuper S et M contraria ratione refpondeant, erit Q punctum æquilibrij gravitatis ex utrisque compofitæ, faltem refpectu lineæ EE [4]). ideoque EQ erit quæfita diftantia, eademque longitudo penduli quod figuræ AC circa axem EE agitatæ ifochronum fit.

[Fig. 68.]



Si igitur rectangulum ut ABCD [Fig. 68] circa unum laterum AB agitetur motu folido, erit longitudo penduli ifochroni EF æqualis $\frac{2}{3}$ lateris pendentis AD, quia nempe cuneo exiftente fuper rectangulum ABCD, abfciffo plano ducto per AB, terminus perpendicularis per centrum gravitatis cunei in planum AC ductæ abeft ab AB duabus tertijs lateris AB [5]). Unde facile intelligitur etiam virgæ feu lineæ ponderantis centrum ofcillationis feu terminum penduli ifochroni ab eodem puncto fufpenfi, diftare ab hoc puncto duabus tertijs longitudinis virgæ.

Si vero triangulum ifofceles BAC [Fig. 69] ab angulo verticis A agitetur motu folido, centrum ofcillationis ejus D diftabit ab A tribus quartis diametri AE. quia nempe cuneus fuper triangulo ABC, abfciffus plano per FAF bafi BC parallelam, nihil aliud eft quam pyramis fcalena verticem habens A, perpendicularem

---

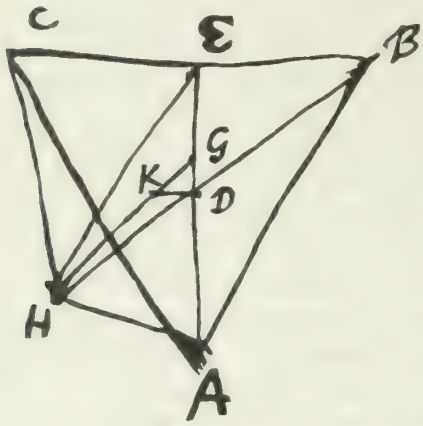
l'axe passant par A et Q celui par rapport à l'axe passant par E, cette proportion correspond pour le cas spécial d'une figure plane en mouvement solide au Théorème XIX de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium". Comparez le deuxième alinéa de la p. 373.

[2]) Les mots: „opposito OC" n'expriment évidemment pas la pensée de l'auteur. Nous traduisons „parallèle à AC". [3]) Comparez le premier alinéa de la p. 501. [4]) L'auteur considère les moments par rapport à EE. [5]) Au lieu de AB, il faut évidemment lire AD.

le centre de gravité de cette pyramide et parallèle à ſa baſe, perpendiculaire par conſéquent au plan du triangle ABC, coupera la droite AE en D, de ſorte que les trois quarts de AE conſtitueront la longueur AD, comme on ſait.

Lorſqu'au contraire le triangle iſoſcèle BAC oſcille autour de ſa baſe CB [Fig. 70], je dis que ſon centre d'oſcillation diviſe le diamètre EA en deux parties égales. En effet, l'onglet conſtruit au-deſſus du triangle ABC et limité par un plan paſſant par CB eſt alors une pyramide ayant le triangle donné ABC pour baſe et un côté AH perpendiculaire à ce triangle, et ſi du ſommet H de cette pyramide on tire une droite juſqu'au point G, centre de gravité du triangle ABC, et qu'on prend ſur cette droite $GK = \frac{1}{4} GH$, K ſera le centre de gravité de la pyramide. Abaiſſons de ce point une perpendiculaire KD ſur le plan du triangle, laquelle aura ſon pied ſur le diamètre du triangle attendu que le ſommet H eſt au-deſſus du point A, alors on aura $GD = \frac{1}{4} GA$, vu que KD eſt parallèle à HA. Puiſque EG eſt égale à $\frac{1}{3}$ EA et GD à $\frac{1}{4}$ GA ou $\frac{1}{2}$EG, ou $\frac{1}{6}$ EA, il eſt manifeſte que la ſomme de EG et de GD eſt égale à la moitié de la longueur totale EA. Or, ED eſt la longueur du pendule iſochrone avec le triangle ABC, attendu que D eſt le pied de la perpendiculaire partant du centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur le triangle et limité par un plan paſſant par CB.

[Fig. 70.]



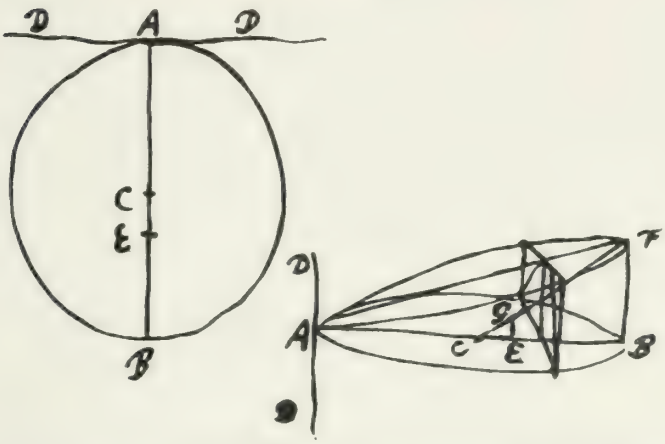
Quant à un cercle AB [Fig. 71] oſcillant autour d'une tangente DA, il ſera iſochrone avec un pendule AE égal à $\frac{5}{8}$ du diamètre AB. En effet, conſidérons l'onglet AFB conſtruit ſur ce cercle et limité par un plan paſſant par AD, et en même temps le cône ſcalène AFB conſtruit ſur la même baſe et ayant ſon ſommet en F. Puiſqu'alors, ſi l'on découpe ce cône et en même temps l'onglet en des tranches très minces par des plans perpendiculaires à la baſe AB et parallèles à la droite AD, les ſections ſont des rectangles dans l'onglet, mais dans le cône des paraboles inſcrites à ces rectangles dont la ſurface eſt égale aux deux tiers de celle du rectangle correſpondant, il eſt évident que le cône et l'onglet ont leurs

[1]) Lisez D, au lieu de E.

vero a vertice in baſin, ipſam AE trianguli diametrum. planum autem per centrum gravitatis pyramidis actum baſi ſuæ parallelum hoc eſt erectum ad planum trianguli ABC, ſecabit rectam AE in E [1]) ut AE ſint $\frac{3}{4}$ AE [2]) ut ſatis notum eſt.

Rurſus ſi circa baſin CB [Fig. 70] agitetur triangulum iſoſceles BAC, centrum oſcillationis ejus bifariam ſecare aio diametrum EA. Eſt enim cuneus, ſuper triangulo ABC, plano per CB abſciſſus, pyramis baſin habens ipſum triangulum ABC, latus vero AH triangulo ad angulos rectos à cujus pyramidis vertice H, ſi ducatur recta ad punctum G quod pono eſſe centrum gravitatis trianguli ABC, ſumaturque in ea GK æqualis $\frac{1}{4}$ GH, erit K centrum gravitatis pyramidis; cadat autem ab ipſo KD perpendicularis in planum trianguli, quæ quidem incidet in diametrum ejus cum vertex H ſit ſupra A, eritque GD ∞ $\frac{1}{4}$GA, cum KD ipſi HA ſit parallela. Quia igitur EG eſt $\frac{1}{3}$ EA, et GD $\frac{1}{4}$ GA ſive $\frac{1}{2}$EG, ſive $\frac{1}{6}$ EA, manifeſtum eſt EG una cum GD efficere dimidium totius EA. Eſt autem ED longitudo penduli triangulo ABC iſochroni, cum in D cadat perpendicularis a centro gravitatis cunei ſuper triangulo abſciſſi plano per CB.

[Fig. 71.]



Circulus autem AB [Fig. 71] agitatus circa tangentem DA iſochronus erit pendulo AE æquali $\frac{5}{8}$diam. AB. Sit enim ſuper ipſum cuneus AFB abſciſſus plano per AD. ſimul autem et conus ſcalenus AFB ſuper eadem baſi intelligatur conſtitutus verticem habens F. Quia igitur ſecando conum hunc ſimulque cuneum in ſolida minima planis ſuper AB baſi erectis parallelisque rectæ AD, in cuneo quidem ſectiones ſunt rectangula in cono vero parabolæ ſingulis rectangulis iſtis inſcriptæ,

[2]) Au lieu de AE, il faut lire AD.

centres de gravité au-deſſus d'un même point de la droite AB. Mais ſi l'on réunit F, ſommet du cône, par une droite FC au centre de la baſe, et qu'on prend $CG = \frac{1}{4} CF$, G ſera le centre de gravité du cône; et ſi de là on abaiſſe une perpendiculaire GE ſur AB, E ſera le point au-deſſus duquel ſe trouve le centre de gravité du cône, partant auſſi celui de l'onglet AFB. Et comme GE eſt parallèle à FB, on aura $CE = \frac{1}{4} CB$, et par conſéquent $AE = \frac{5}{8} AB$. Telle ſera donc auſſi la longueur du pendule iſochrone avec le cercle [1]).

[1]) Le texte qui suit cette Pièce a été biffé par Huygens (p. 198—199 du Manuscrit B). En marge du texte biffé on lit: hic sequi debent quæ scripta folio quod incipit, Porro ex inventa &c. Nous ne trouvons aucun feuillet ou feuille séparée qui contienne un passage commençant par les mots cités.

Le texte biffé est le suivant: Quod ſi circulus aut triangulum isosceles aut rectangulum agitetur circa axem qui non tangat figuram sed ab illa distet ut in fig. sequenti [nous supprimons cette figure] facile quoque et his casibus pendula iſo-

quæ ubique eorum ſunt ſubſeſquialteræ, manifeſtum eſt conum cuneumque centro gravitatis ſuæ incumbere eodem puncto rectæ AB. Ducta autem FC a vertice coni F ad centrum baſeos, ſumtaque CG $\infty \frac{1}{4}$ CF, erit G centrum gravitatis coni; unde ſi cadat in AB perpendiculum GE, erit punctum E ſuper quo incumbit centrum gravitatis coni ac proinde et cunei AFB. Et quia GE eſt parallela FB erit CE $\infty \frac{1}{4}$ CB. ideoque AE $\infty \frac{5}{8}$ AB. Ergo tanta quoque erit longitudo penduli circulo iſochroni [1]).

---

chrona reperientur reperto trunci super figura qualibet, plano per axem oscillationis transeunte abscissi, centro gravitatis. Quoniam distantia hujus a plano per axem oscillationis ducto quod sit plano figuræ ad angulos rectos, est longitudo quæsita ex prop.... (Comparez la p. 458 et les deux derniers alinéas de la p. 507).

Nunc alium oscillationis motum figurarum planarum consideremus quem planum vocavimus nempe super axem qui sit plano figuræ ad angulos rectos.

Le texte biffé est suivi par un lemme (voir la p. 503 qui précède et la note 2 de la p. 501).

XVI[1].

[1664][2].

On connaîtra le pendule iſochrone avec une figure plane quelconque ſymétrique par rapport à un axe, ſuſpendue en un point ſitué ſur le prolongement de cet axe et oſcillant d'un mouvement plan [3], lorſque le pendule iſochrone avec la même figure ſuſpendue au même point et oſcillant d'un mouvement ſolide [3] eſt donné, ainſi que le pendule iſochrone avec la demi-figure oſcillant d'un mouvement ſolide autour de l'axe de la figure, et encore le centre de gravité de la demi-figure. En effet, la longueur du pendule cherché eſt égale à celle du premier des pendules donnés augmentée d'une droite, dont le rapport à la longueur du ſecond pendule donné eſt égal au rapport de la diſtance du centre de gravité de la demi-figure juſqu'à l'axe de la figure à la diſtance du centre de gravité de la figure juſqu'au point de ſuſpenſion.

Soit BAC [Fig. 72] la figure plane ſymétrique par rapport à l'axe AD. J'appelle ſymétrique par rapport à un axe toute figure dont les deux moitiés, ayant tourné autour de cet axe juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent, s'appliquent parfaitement l'une ſur l'autre. Et ſoit E le point ſur le prolongement de l'axe auquel la figure qui oſcille dans ſon plan eſt ſuſpendue. EH eſt la longueur donnée du pendule iſochrone avec la figure lorſqu'elle ſe meut d'un mouvement ſolide, étant ſuſpendue au même point; et HK la longueur du pendule iſochrone avec la demi-figure ADC lorſque cette dernière oſcille d'un mouvement ſolide autour de l'axe AD. Soit de plus L le centre de gravité de la figure ABC et M celui de la demi-figure DAC. Prenons HN de telle manière que $EL : LM = KH : HN$. Je dis que EN eſt la longueur du pendule iſochrone avec le mouvement plan de la figure ABC ſuſpendue en E. Appelant QP ou x le pendule iſochrone avec la figure, je montrerai donc que ce pendule a une longueur égale à EN.

En effet, ſuppoſons la demi-figure ABD diviſée en de très petits carrés égaux

---

[1]) Manuscrit B p. 200—211.

[2]) Comparez la note 2 de la p. 435.

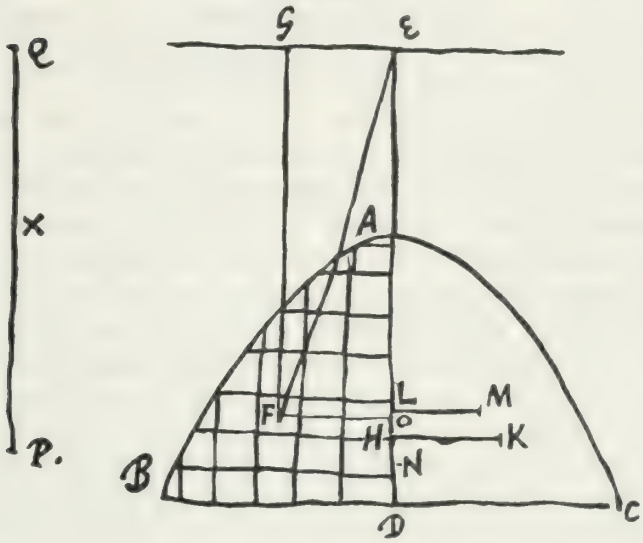
[3]) Comparez sur le „motus planus" (mouvement plan) et le „motus solidus" (mouvement solide) les définitions données à la p. 499.

XVI[1].

[1664][2].

Figuræ cuivis planæ circa axem ordinatæ et a puncto in axe producto ſuſpenſæ motuque plano [3]) agitatæ pendulum iſochronon habebitur, ſi detur pendulum iſochronon figuræ eidem ab eadem ſuſpenſione motu ſolido [3]) agitatum; alterumque item iſochronon dimidiæ figuræ motu ſolido agitatæ circa figuræ axem ac præterea centrum gravitatis figuræ dimidiæ. Componitur enim quæſiti penduli longitudo, ex priore datorum pendulorum et ex ea linea quæ ſit ad poſterius pendulum datum ſicut diſtantia centri gravitatis figuræ dimidiæ ab axe figuræ, ad diſtantiam centri gravitatis figuræ a puncto ſuſpenſionis.

[Fig. 72.]



Sit figura plana BAC [Fig. 72] circa axem ordinata qui ſit AD. Intelligo autem circa axem ordinatam figuram omnem, cujus medietates duæ circa axem rotatæ donec ſibi mutuo occurrant, altera alteri congruant. Et ſit in producto axe punctum E, unde ſuſpenſa figura agitetur motu plano. Ponatur autem EH eſſe longitudo penduli ipſi iſochroni cum motu ſolido ex eadem ſuſpenſione agitatur. HK vero longitudo penduli iſochroni dimidiatæ figuræ ADC, ſi circa axem AD agitetur motu ſolido. Sit autem L centrum gravitatis figuræ ABC, et M dimidiatæ DAC. Et ut EL ad LM ita ſit KH ad HN. Dico EN eſſe longitudinem penduli iſochroni motui plano figuræ ABC ex E ſuſpenſæ. Poſito enim pendulo QP ſive x, quod ſit figuræ iſochronon, oſtendam hoc longitudinem habere ipſius EN.

Intelligatur enim dimidia figura ABD ſecta in quadratula minima æqualia, duc-

entre eux, et considérons, après avoir mené la droite EG perpendiculairement à ED, l'un quelconque de ces très petits carrés, p. e. celui dont F est le centre, duquel nous pouvons abaisser sur les droites ED et EG les perpendiculaires FO et FG. Tirons de plus la droite FE.

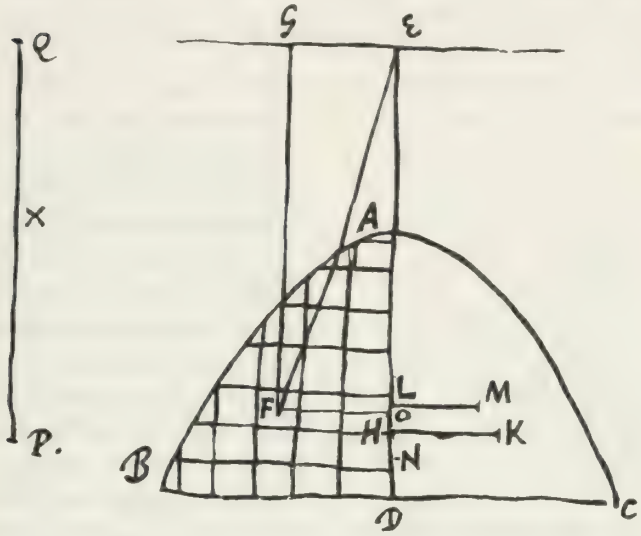
Or, le pendule x étant par hypothèse isochrone avec la figure ABC, si l'on suppose que l'un et l'autre exécutent une demi-oscillation maximale, c. à. d. d'un quart de cercle, après cette demi-oscillation la vitesse du poids P sera à celle du très petit carré F comme la longueur QP ou x est à la longueur EF que nous désignerons par b. En effet, il est évident que la vitesse du point F dépend de sa distance du point E, de sorte que d'autres points quelconques du plan ABC situés à la même distance du point E acquièrent la même vitesse. Mais comme QP^2 ou x^2 est à EF^2 ou b^2, ainsi est la hauteur à laquelle s'élève le poids P après avoir exécuté une demi-oscillation à la hauteur à laquelle monterait le petit carré F, si après avoir exécuté avec le plan une demi-oscillation il pouvait ensuite convertir seul son mouvement en ascension. Mais la dite hauteur du poids P est égale à QP ou x même, puisqu'il est certain que ce poids montera à une hauteur égale à celle dont il est descendu. Par conséquent, comme $x^2 : b^2 = x : \frac{b^2}{x}$, $\frac{b^2}{x}$ sera la hauteur à laquelle, comme nous l'avons dit, pourrait s'élever le petit carré F. Multipliant le petit carré par cette hauteur, on trouve donc $\frac{b^2 f}{x}$, c. à. d. le produit de EF^2 par le petit carré F, divisé par x. Or, le carré de EF est égal à la somme de FG^2 et de FO^2. Par conséquent le produit considéré du carré de EF par le petit carré F, divisé par x, sera égal à la somme des produits de FG^2, et de FO^2, multipliés l'un et l'autre par le petit carré F et divisés par x.

Pareillement le produit de chacun des autres petits carrés par la hauteur à laquelle il pourrait s'élever si, après avoir exécuté une demi-oscillation, il s'élevait ensuite librement, sera trouvé égal à la somme de deux produits, obtenus en multipliant le petit carré lui-même par les carrés des perpendiculaires abaissées de son centre respectivement sur ED et sur EG, et divisés l'un et l'autre par x. Il s'ensuit donc que la somme de tous les produits des petits carrés par les hauteurs correspondantes auxquelles ils pourraient s'élever, est égale à la somme de tous les carrés des perpendiculaires abaissées des centres des petits carrés sur les droites ED et EG, multipliée par un petit carré tel que F et divisée par x. Nous pouvons représenter cette somme par l'expression $\frac{c^2 f}{x} + \frac{d^2 f}{x}$, en appelant c^2 la somme des carrés de toutes les perpendiculaires nommées sur EG et d^2 celle des carrés de toutes les perpendiculaires sur ED. Mais la somme mentionnée des produits des petits carrés chacun par sa hauteur d'ascension doit être égale au produit de l'ensemble de tous les petits carrés, c. à. d. de la demi-figure ABC, par la hauteur dont son centre de gravité est descendu, c. à. d. par EL; en effet, ceci doit nécessairement avoir lieu

tâque EG perpendiculari in ED, conſideretur unum quoddam dictorum quadratulorum, puta cujus centrum F, a quo in rectas ED, EG, ducantur perpendiculares FO, FG et jungatur FE.

Jam quia pendulum x iſochronon ponitur figuræ ABC; ſi tum illud tum hæc maximam ſemioſcillationem facere concipiantur, hoc eſt, quadrantalem, erit, in fine ejus, velocitas ponderis P ad velocitatem quadratuli F, ſicut longitudo QP ſive x ad longitudinem EF, quæ dicatur b. Patet enim velocitatem puncti F pendere a diſtantia ejus à puncto E, adeo ut quælibet alia puncta plani ABC quæ tantundem ab E diſtant eandem quoque acquirant velocitatem. Sicut vero quadr. QP ſive xx ad quadr. EF ſive bb ita eſt altitudo ad quam aſcendit peracta ſemioſcillatione pondus P, ad altitudinem aſcenſus quadratuli F, ſi peracta cum plano ſemioſcillatione ſeparatim deinde ſurſum convertat motum ſuum. Dicta autem altitudo ponderis P eſt ipſa QP ſive x; quum conſtet ad æqualem ei unde deſcendit altitudinem aſcenſurum; ergo quia xx ad bb ut x ad $\frac{bb}{x}$, erit $\frac{bb}{x}$ altitudo ad quam, uti dictum eſt, aſcenderet quadratulum F. quo itaque ducto in altitudinem iſtam, ſit $\frac{bbf}{x}$, hoc eſt, quadratum EF ductum in quadratulum F productumque diviſum per x. Eſt autem quadr. EF æquale quadratis FG et FO. Itaque dictum productum ex quadrato EF in quadratulum F, diviſum per x, æquabitur productis duobus ex quadratis FG et FO ſingulis in quadratulum F, diviſiſque per x.

[Fig. 72.]

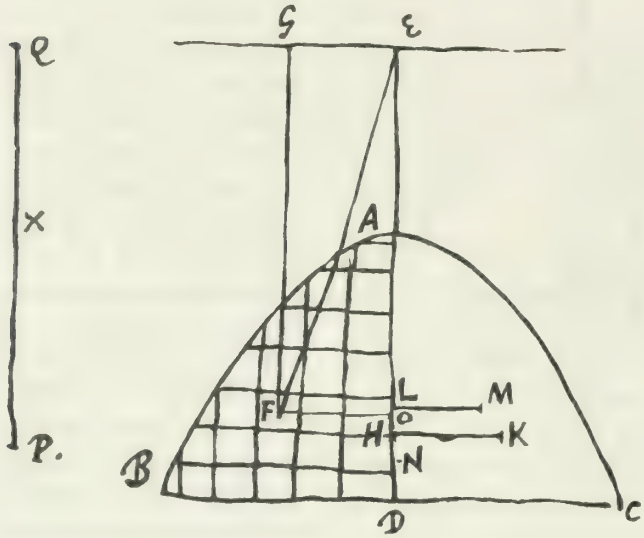


Eadem autem ratione productum ex unoquoque reliquorum quadratulorum in altitudinem ad quam ipſum aſcenderet, ſi facta ſemioſcillatione libere deinde ſurſum moveretur, invenietur æquale productis duobus ex quadratis perpendicularium a centro ejus in ED et EG cadentibus, ductis in ipſum quadratulum, ſinguliſque diviſis per x. Unde itaque ſequitur ſummam omnium productorum ex quadratulis in dictas quo aſcenderent altitudines, æquari ſummæ omnium quadratorum [1]) quæ

[1]) C. à. d. quadratorum perpendicularium.

afin que le centre de gravité de tous les petits carrés, lorſqu'ils ſe ſont élevés ſéparément et librement après avoir exécuté une demi-oſcillation, ſe trouve à la même hauteur qu'avant le commencement de la demi-oſcillation. Par conſéquent la ſomme mentionnée plus haut $\frac{c^2f+d^2f}{x}$ ſera égale au produit de la demi-figure ABD par la droite EL. Appelons ce produit pg, où la figure plane ABD eſt déſignée par p et la droite EL par g. Comme on a donc $\frac{c^2f+d^2f}{x}=pg$, on trouvera, en multipliant tous les termes par x, $c^2f+d^2f=pgx$. Or, l'expreſſion d^2f, c. à. d. la ſomme des carrés des perpendiculaires à AD [2]) qui partent des centres de tous les petits carrés, multipliés chacun par le carré correſpondant, eſt égale au produit de la demi-figure ABD ou CAD [2]) par le rectangle des deux longueurs KH, ML, parce que ML eſt la diſtance du centre de gravité de la figure DAC [2]) à l'axe AD [2]), et KH le bras de levier par rapport à AD [2]) correſpondant au centre de gravité du tronc érigé ſur la figure CAD [2]) ou ABD et limité par un plan paſſant par AD [2]); c'eſt ce qui réſulte de notre ſuppoſition que HK eſt la longueur du pendule iſochrone avec la demi-figure conſidérée oſcillant autour de l'axe AD [2]). Pour une raiſon ſemblable c^2f, c. à d. la ſomme des carrés des perpendiculaires ſur EG, multipliés chacun par un F correſpondant, eſt égale au produit de la demi-figure ABD par le rectangle des deux longueurs HE et EL. En poſant HE $=k$; EL, comme plus haut, $=g$; KH $=m$; ML $=n$, on aura donc

[Fig. 72.]



$$c^2f+d^2f=kgp+mnp.$$

Or, nous avions $\quad c^2f+d^2f=pgx.$

Donc auſſi $\quad pgx=pgk+pmn.$

Rayant partout p et diviſant par g, on obtient $x=k+\frac{mn}{g}$. Par conſéquent,

ex centris quadratulorum cadunt in rectas ED et EG ductæ in quadratulum unum ut F divisæque per x. quæ summa dicatur $\frac{ccf}{x} + \frac{ddf}{x}$, ponendo cc pro quadratis dictarum perpendicularium omnium super EG et dd pro quadratis omnium perpendicularium super ED. Atqui illa productorum summa, ex quadratulis in eas quo ascenderent altitudines, æqualis esse debet producto ex omnibus quadratulis hoc est ex dimidio figuræ ABC in altitudinem unde descendit ejus centrum gravitatis, quæ est EL; ita enim necesse est fieri quo centrum gravitatis quadratulorum omnium, postquam facta semioscillatione singula deinde liberæ [1]) sursum ascenderunt, æque altum inveniatur atque ante cœptam semioscillationem fuerat. Ergo summa prædicta $\frac{ccf + ddf}{x}$ æquabitur producto figuræ dimidiæ ABD in rectam EL. quod productum vocetur pg, ponendo p pro plano ABD, et g pro recta EL. quia ergo $\frac{ccf + ddf}{x} \infty pg$; ductis omnibus in x, fiet $ccf + ddf \infty pgx$. Est autem ddf, hoc est summa quadratorum ex perpendicularibus super BD [2]) quæ a centris quadratulorum omnium exeunt, ductorum in singula quadratula, æqualis producto ex dimidia figura ABD seu CBD [2]) in rectangulum duarum KH, ML, quia ML est distantia centri gravitatis figuræ DBC [2]) ab axe BD [2]); KH vero distantia ex qua ponderat truncus erectus super figura CBD [2]) vel ABD, absciffusque plano per BD [2]); quippe cum ponatur HK longitudo penduli isochroni dictæ dimidiæ figuræ agitatæ circa axem BD [2]). Similemque ob rationem ccf, hoc est summa quadratorum à perpendiculis super EG, ductorum in singula F, æquatur producto ex dimidia figura ABD ducta in rectangulum duarum HE, EL. Ponendo itaque HE ∞k, EL uti suprà ∞g; KH ∞m; ML ∞n;

erit $$ccf + ddf \infty kgp + mnp.$$
erat autem $$ccf + ddf \infty pgx.$$
Ergo et $$pgx \infty pgk + pmn.$$

Et delendo ubique p ac dividendo per g, fit $x \infty k + \frac{mn}{g}$. Ergo cum k sit EH, et $\frac{mn}{g}$ quarta proportionalis tribus g, n, m, hoc est tribus EL, LM, KH, ac proinde

---

[1]) Lisez „libere" ou „libera".

[2]) La figure que nous avons désignée par „Fig. 72", se trouve à la p. 200 du Manuscrit; au revers de cette page Huygens reproduit la même figure en intervertissant les lettres A et B. Nous n'avons rien changé dans le texte latin, mais dans le texte français nous nous sommes conformés à la Fig. 72.

comme k eſt EH, et que $\frac{mn}{g}$ eſt quatrième proportionnelle aux trois longueurs g, n, m, c. à. d. aux trois longueurs EL, LM et KH, que $\frac{mn}{g}$ eſt donc égale par conſtruction à HN, l'expreſſion $k + \frac{mn}{g}$ ſera égale à la ligne entière EN. Par conſéquent x, c. à. d. QP, ſera auſſi égale à EN. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparaît donc qu'on peut trouver un pendule iſochrone avec une figure plane quelconque ſuſpendue en un point arbitraire du prolongement de l'axe et oſcillant d'un mouvement plan, pourvu qu'on connaiſſe les centres de gravité ſuivants: 1) celle de la figure entière, 2) celle de la demi-figure, ſituée de part et d'autre de l'axe. Il faut connaître en outre la diſtance du centre de gravité de l'onglet érigé ſur la figure entière et limité par un plan paſſant par l'axe d'oſcillation, jusqu'à un plan mené par le même axe d'oſcillation et perpendiculaire au plan de la figure; et enfin la diſtance du centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur la demi-figure et limité par un plan paſſant par l'axe de la figure, jusqu'à un plan paſſant par le même axe et perpendiculaire à la figure [1]).

Trouver le pendule iſochrone avec un rectangle ſuſpendu en un point qui diviſe un des côtés en deux parties égales et qui oſcille dans ſon plan.

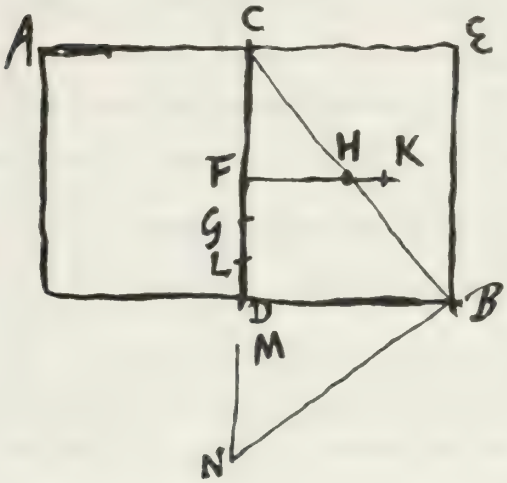
Suppoſons le rectangle AB [Fig. 73] ſuſpendu au point C qui diviſe le côté AE en deux parties égales, et ſoit CD l'axe du rectangle et F le point milieu de cet axe; F eſt donc le centre de gravité du rectangle AB, et ſi l'on tire la droite FH parallèle à CE et égale à la moitié de CE, H ſera le centre de gravité du rectangle CB. Et ſi l'on prolonge la même droite FH jusqu'en K de ſorte que $FK = \frac{2}{3}CE$, FK ſera la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle CB, ſuppoſé que celui-ci oſcille autour de l'axe CD. Pareillement ſi l'on prend $CG = \frac{2}{3}CD$, CG ſera la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle entier AB oſcillant autour de l'axe AE, bien entendu d'un mouvement ſolide. Soit $CE = a$ et $CD = b$. Il importe donc de conſtruire une nouvelle longueur FL de telle manière que l'on ait CF : FH, c. à. d. $\frac{1}{2}b : \frac{1}{2}a = FK$, ou $\frac{2}{3}a$: FL, laquelle ſera donc $\frac{2}{3}\frac{a^2}{b}$. Et en ajoutant cette longueur à $CG = \frac{2}{3}b$, on trouve $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}\frac{a^2}{b}$ pour la longueur cherchée du pendule iſochrone avec le rectangle AB. Or, on trouvera cette longueur par une conſtruction très facile en traçant la diagonale CB du demi-rectangle, et enſuite la droite BN perpendiculaire à CB et rencontrant le prolongement de l'axe CD au point N, enfin en

æqualis ex conſtructione ipſi HN; æquabitur $k + \frac{mn}{g}$ toti EN. Ideoque et x hoc eſt QP ipſi EN æqualis erit. quod erat demonſtrandum.

Patet igitur cuivis figuræ planæ a puncto quovis in axe producto ſuſpenſæ motuque plano agitatæ pendulum iſochronon inveniri poſſe, ſi modo hæc centra gravitatis noſcantur, nempe figuræ totius; figuræ dimidiæ ab alterutra parte axis. Præterea diſtantia centri gravitatis ungulæ ſuper figura tota plano per axem oſcillationis abſciſſæ, a plano per eundem oſcillationis axem ducto quod ſit plano figuræ ad angulos rectos ac denique diſtantia centri gravitatis ungulæ ſuper figura dimidia plano per axem figuræ abſciſſæ, à plano per eundem axem ducto atque ad figuram erecto [1]).

Rectangulo ſuſpenſo ex puncto quod latus bifariam dividit, motuque plano agitato pendulum iſochronon invenire.

[Fig. 73.]



Eſto rectangulum AB [Fig. 73] ſuſpenſum ex C puncto, latus AE bifariam dividente. ſitque axis rectanguli CD, qui bifariam dividatur in F: Eſt ergo F centrum gravitatis rectanguli AB et ducta FH parallela CE ipſique dimidiae CE æquali, erit H centrum gravitatis rectanguli CB. Eadem vero FH productâ ad K ut ſit FK $\infty \frac{2}{3}$ CE; erit FK longitudo penduli iſochroni rectangulo CB, ſi ſuper axi CD agitari concipiatur. ſimiliterque ſumta CG $\infty \frac{2}{3}$ CD, erit ea longitudo penduli iſochroni rectangulo toti AB agitato circa axem AE, hoc eſt motu ſolido. Sit CE ∞a, CD ∞b. Oportet igitur facere ſicut CF ad FH, hoc eſt, ſicut $\frac{1}{2}b$ ad $\frac{1}{2}a$ ita FK ſive $\frac{2}{3}a$ ad aliam FL, quæ erit $\frac{2}{3}\frac{aa}{b}$. quâ addita ad CG $\infty \frac{2}{3}b$, fit $\frac{2}{3}b + \frac{2}{3}\frac{aa}{b}$ longitudo penduli iſochroni rectangulo AB quæ quærebatur. Conſtructione autem facillima invenietur ea longitudo ſi ducatur CB diagonalis rectanguli dimidij. ipſique CB ad angulos rectos BN quæ cum producto axe CD conveniat in N; ac ſumatur CM æqualis $\frac{2}{3}$ CN. Erit enim tota

[1]) Comparez, à la p. 477, les deux derniers alinéas de la note 2 de la p. 476.

prenant $CM = \frac{2}{3} CN$. En effet, la longueur totale CN ſera égale à $b + \frac{a^2}{b}$, et par conſéquent $CM = \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} b + \frac{2}{3} \frac{a^2}{b}$ ſera égale à la longueur cherchée.

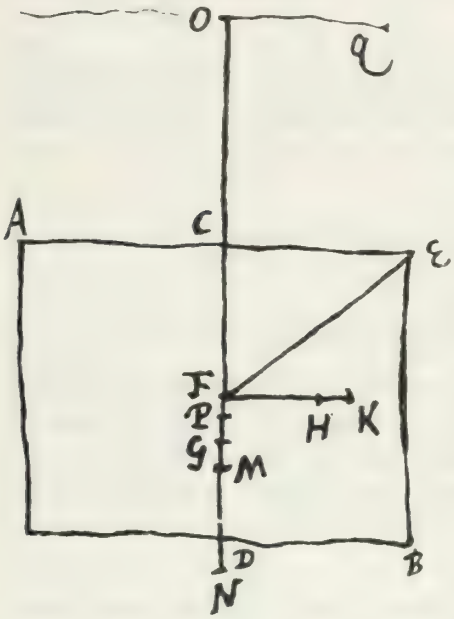
Mais pour trouver le pendule iſochrone avec ce même rectangle lorsqu'il eſt ſuspendu en un point O ſitué ſur le prolongement de l'axe DC [Fig. 74], nous pouvons poſer $OF = c$ et conſtruire la longueur FP de telle manière que OF : FC, c. à. d. $c : \frac{1}{2} b = GF$, ou $\frac{1}{6} b : FP$, laquelle ſera donc $\frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$. Par conſéquent $PO = c + \frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$ ſera le bras de levier du tronc conſtruit ſur le rectangle AB et limité par un plan mené par OQ parallèlement à AE, d'après la propoſition. . . [1]) et par conſéquent la même longueur OP ſera la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle AB oſcillant autour de OQ d'un mouvement ſolide [2]). D'autre part $FK = \frac{2}{3} a$ eſt, comme plus haut, la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle CB oſcillant autour de CD. Et en conſtruiſant une longueur de telle manière que OF : FH, c. à. d. $c : \frac{1}{2} a = FK$, ou $\frac{2}{3} a$: cette longueur, celle-ci ſera $\frac{1}{3} \frac{a^2}{c}$, et en l'ajoutant à $OP = c + \frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$, on obtiendra pour la longueur cherchée du pendule iſochrone avec le rectangle AB ſuspendu en O la formule $c + \frac{1}{3} \frac{a^2}{c} + \frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$. Pour conſtruire cette longueur il faut d'abord trouver FN de telle manière que OF : FE, moitié de la diagonale du rectangle AB, = FE : FN, dont il faut prendre le tiers FM; la longueur entière OM ſera alors la longueur cherchée du pendule. En effet, comme $FE = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} b^2}$, on aura $FN = \frac{a^2 + \frac{1}{4} b^2}{c}$, et ſon tiers $FM = \frac{\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{12} b^2}{c}$; et par conſéquent la longueur entière $OM = c + \frac{\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{12} b^2}{c}$, ce qui était la formule donnant la longueur du pendule [3]).

On trouvera de la même manière le pendule iſochrone avec le triangle iſoſcèle

CN $\infty\, b + \frac{aa}{b}$, ideoque CM $\infty\, \frac{2}{3}$ CN $\infty\, \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}\frac{aa}{b} \infty$ longitudini quæſitæ.

Rectangulo autem eidem ex puncto O in axe DC [Fig. 74] producto ſuſpenſo iſochronon pendulum ut inveniatur ſit OF $\infty\, c$ et fiat ut OF ad FC, hoc eſt, ut c ad $\frac{1}{2}b$, ita GF hoc eſt $\frac{1}{6}b$ ad FP, quæ itaque erit $\frac{1}{12}\frac{bb}{c}$. Eritque PO $\infty\, c + \frac{1}{12}\frac{bb}{c}$ brachium trunci ſuper rectangulo AC abſciſſi plano per OQ parallelam AE ducto, per prop.... [1]) ac proinde eadem OP longitudo penduli iſochroni rectangulo AB motu ſolido circa OQ agitato. FK autem $\infty\, \frac{2}{3}a$, eſt, ut prius, longitudo iſochrona rectangulo CB circa CD agitato [2]). Quare faciendo ut ſicut OF ad FH, hoc eſt, ut c ad $\frac{1}{2}a$, ita FK $\infty\, \frac{2}{3}a$ ad aliam, ea erit $\frac{1}{3}\frac{aa}{c}$, qua addita ad OP $\infty\, c + \frac{1}{12}\frac{bb}{c}$, fiet longitudo quæſita penduli iſochroni rectangulo AB ex O ſuſpenſo æqualis $c + \frac{1}{3}\frac{aa}{c} + \frac{1}{12}\frac{bb}{c}$ quæ longitudo invenietur, ſi quemadmodum OF ad FE ſemidiagonium rectanguli AB, ita ſit FE ad FN, cujus tertia pars ſumatur FM, tota enim OM erit longitudo penduli quæſita. Quia enim FE $\infty\, \sqrt{aa + \frac{1}{4}bb}$, ſit FN $\infty\, \frac{aa + \frac{1}{4}bb}{c}$, ejuſque triens FM ∞ $\infty\, \frac{\frac{1}{3}aa + \frac{1}{12}bb}{c}$; ac proinde tota OM $\infty\, c + \frac{\frac{1}{3}aa + \frac{1}{12}bb}{c}$, quæ erat inventa penduli longitudo [3]).

[Fig. 74.]



Eadem methodo triangulo iſoſceli ABC [Fig. 75], ſuſpenſo ex puncto D in

[1]) Huygens n'a pas indiqué la proposition qu'il avait en vue. Voir les p. 507–509 (Fig. 67).
[2]) Voir la p. 509 qui précède.
[3]) Comparez la p. 469.

ABC [Fig. 75] ſuſpendu au point D ſitué ſur le prolongement de l'axe BE. En effet, ſi l'on poſe DE $= a$, BE $= b$, EC, moitié de la baſe, $= c$, la longueur du pendule iſochrone deviendra $a - \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}b^2 + \frac{1}{6}c^2}{a - \frac{1}{3}b}$. Remarquons que $a - \frac{1}{3}b$ eſt la longueur DF, c. à. d. la diſtance du point de ſuſpenſion au centre de gravité du triangle. Dans le cas $a = b$, c. à. d. ſi le triangle eſt ſuſpendu en ſon ſommet B, il apparaît que la dite longueur ſera $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a}$. Et ſi en outre $c = a$, c. à. d. ſi l'angle ABC eſt droit, la dite longueur du pendule iſochrone devient égale à a, c. à. d. à BE.

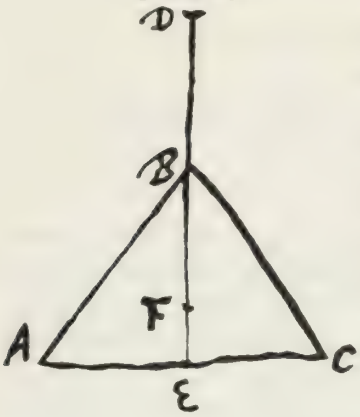
Mais ſi le même triangle iſoſcèle eſt renverſé [Fig. 76], le point de ſuſpenſion D ſe trouvant toujours ſur le prolongement de l'axe du triangle, et qu'on poſe de nouveau DE $= a$, EB $= b$, EC ou EA $= c$, la longueur du pendule iſochrone deviendra égale à $a + \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}b^2 + \frac{1}{6}c^2}{a + \frac{1}{3}b}$, où l'on peut remarquer de nouveau que $a + \frac{1}{3}b$ n'eſt autre que DF, diſtance du point de ſuſpenſion au centre de gravité du triangle ABC. On voit aiſément d'après cette formule que le triangle, ſuſpendu comme nous l'avons fait ici, ſera iſochrone avec le triangle ſuſpendu de la manière précédente, ſi la diſtance DF eſt la même dans les deux cas. Mais ceci ſera démontré plus loin d'une façon plus générale [1]). Si dans le cas conſidéré $a = 0$, c. à. d. ſi le triangle eſt ſuſpendu en E, point milieu de la baſe, la longueur du pendule iſochrone ſera égale à $\frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{2}c^2}{b}$; en d'autres termes, ſi l'on tire CN perpendiculairement au côté CB et rencontrant le prolongement de l'axe en N, la moitié de la longueur entière BN ſera la longueur du pendule iſochrone. Et ſi de plus $c = b$, cette longueur ſera égale à b, c. à. d. à EB. D'où il apparaît que le triangle droit iſoſcèle a des oſcillations iſochrones dans les deux cas où il eſt ſuſpendu reſpectivement au ſommet et au milieu de la baſe.

Cette méthode nous permet auſſi de trouver le pendule iſochrone avec le ſecteur ABDC [Fig. 77] ſuſpendu en A, centre du cercle dont il fait partie, ou en un point quelconque ſitué ſur le prolongement de ſon axe AD. Ce qui ne peut être

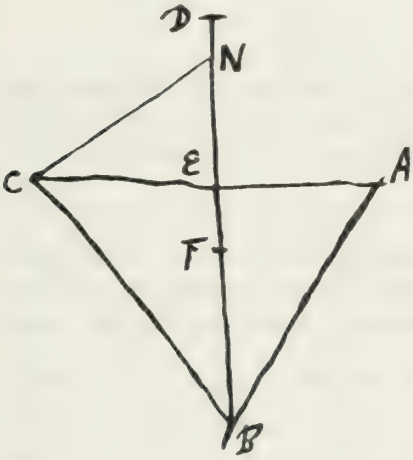
[1]) Comparez la note 3 de la p. 461, ainsi que le quatrième alinéa de la note 3 de la p. 462 et les Prop. XII, XIII et XVI de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium".

axe producto BE, pendulum isochronon invenietur. Nam positis DE ∞ a; BE ∞ b; EC dimidia basi ∞ c fit longitudo penduli isochroni $a - \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{6}cc}{a - \frac{1}{3}b}$. notetur vero quod $a - \frac{1}{3}b$ est DF, quæ nempe à puncto suspensionis pertingit ad trianguli gravitatis centrum. Si vero $a \infty b$, hoc est si triangulum ex vertice B suspendatur, patet prædictam longitudinem fore $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}\frac{cc}{a}$. Quod si insuper $c \infty a$, hoc est angulus ABC rectus, fit dicta penduli isochroni longitudo ∞ a, hoc est, ∞ BE.

[Fig. 75.]



[Fig. 76.]



Si vero inversum fuerit triangulum idem isosceles [Fig. 76] ut tamen punctum suspensionis D sit in axe trianguli producto; ponendo rursus DE ∞ a; EB ∞ b; EC vel EA ∞ c; fiet longitudo penduli isochroni $\infty\ a + \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{6}cc}{a + \frac{1}{3}b}$. ubi notetur rursus $a + \frac{1}{3}b$ esse DF, quæ nempe à puncto suspensionis pertingit ad centrum gravitatis trianguli ABC. unde facile perspicitur, triangulum ita ut hic suspensum isochronum fore priori modo suspenso, si distantia DF utrobique eadem fuerit. sed hoc postea universalius demonstrabitur [1]). Quod si hic fuerit $a \infty 0$, hoc est, si triangulum ex puncto mediæ [2]) basis E suspendatur, erit longitudo penduli isochroni $\infty \frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{2}cc}{b}$. hoc est ducta CN perpendiculari super latus CB, quæ occurrat axi producto in N, erit semissis totius BN, longitudo penduli isochroni. Si vero insuper sit $c \infty b$; erit ea longitudo ∞ b, hoc est, EB. Unde patet triangulum rectangulum isosceles, sive ex vertice sive ex media basi suspendatur isochronas oscillationes habere.

[2]) Lisez plutôt „medio".

calculé d'une autre manière excepté dans le cas de la ſuſpenſion en A: dans ce dernier cas toutefois on peut aiſément trouver le résultat d'après une autre méthode comme nous le montrerons plus loin [1]).

Soit AD, le diamètre du ſecteur, c. à. d. le rayon du cercle, $= r$; l'arc BD ou DC $= p$; le ſinus BG $= b$, le ſinus verſus GD $= a$.

On a donc (F étant le centre de gravité du ſecteur ABC) AF $= \frac{2}{3}\frac{br}{p}$, parce que $\frac{2}{3}$ DA : AF $=$ l'arc BD : ſinus BG, comme nous l'avons démontré dans le livre ſur la quadrature du cercle [2]). Or, ſi nous tirons FO dans une direction parallèle à GC et AP de telle manière qu'elle diviſe l'angle DAC en deux parties égales, l'interſection des deux droites FO et AP, ſavoir H, ſera le centre de gravité du demi-ſecteur ADC. Et comme CA : AG $=$ CP : PG, on aura par compoſition CA + AG : AG $=$ CG : GP, et par permutation CA + AG : CG, c. à. d. $2r - a : b$, $=$ AG : GP ou bien $=$ AF, ou $\frac{2}{3}\frac{br}{p}$: FH; cette dernière longueur ſera donc $\frac{\frac{2}{3}b^2r}{2rp - ap}$.

Suppoſons conſtruit ſur le ſecteur ABC un onglet limité par un plan paſſant par AQ parallèle à BC; nous avons déjà trouvé [3]) que la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité de l'onglet ſur le plan ABC, a ſon pied en E, où AE $= \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. Conſidérons encore l'onglet conſtruit ſur le demi-ſecteur ADC, limité par un plan paſſant par AD; nous avons trouvé que la diſtance entre la perpendiculaire, abaiſſée du centre de gravité de cet onglet ſur le plan ABC, d'une part et l'axe AD d'autre part, diſtance que nous déſignerons par EK, eſt égale à $\frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$ [4]). Si l'on conſtruit donc une autre longueur EL de telle manière que le rapport AF : FH, c. à. d. $2r - a : b$ (car nous avons démontré que c'eſt là la valeur du rapport AF : FH) ſoit égal au rapport de EK, ou $\frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$, à EL, celle-ci ſera $\frac{\frac{3}{8}b^2a - \frac{3}{8}b^2r + \frac{3}{8}pbr}{2ar - a^2}$, en d'autres termes, parce que $2ar - a^2 = b^2$ [5]), la même longueur EL ſera égale à $\frac{3}{8}a - \frac{3}{8}r + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. Et

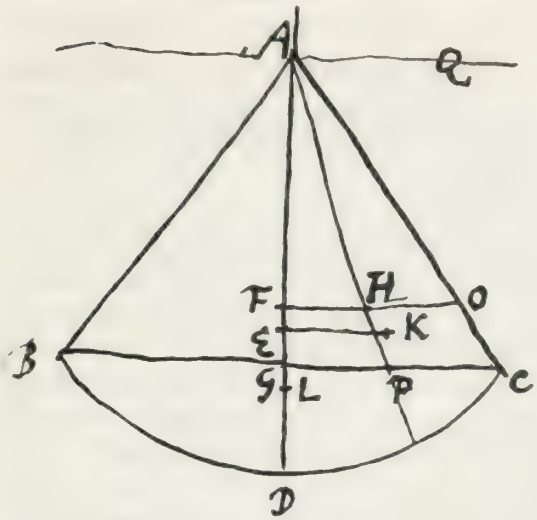
[1]) Comparez lez p. 487—488, ainsi que le Theorème XXI de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium (deuxième méthode pour trouver le „centrum oscillationis sectoris circuli").

[2]) Voir à la p. 309 du T. XI le Theor. VIII des „Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli ex dato portionum gravitatis centro".

[3]) En marge: „superius in hoc libro". Voir la p. 487 qui précède.

Sectori ABDC [Fig. 77] ex A centro circuli sui suspenso vel ex puncto quovis in producto axe AD pendulum isochronum hoc modo inveniri poterit, quod alio fieri non potest, licet ex A suspenso facile inveniatur alia via, ut postea ostendetur [1]).

[Fig. 77.]



Sit AD diameter sectoris hoc est radius circuli $\infty\, r$ arcus BD vel DC $\infty\, p$. sinus BG $\infty\, b$. sinus versus GD $\infty\, a$.

Est igitur AF (posito F centro gravitatis sectoris ABC) $\infty\, \frac{2}{3}\frac{br}{p}$; quia ut arcus BD ad sinum BG ita est $\frac{2}{3}$ DA ad AF, ut demonstravimus in libro de quadratura circuli [2]). Ducta autem FO parallela GC, et AP quæ bifariam dividat angulum DAC, erit intersectio duarum FO, AP, nempe H centrum gravitatis dimidij sectoris ADC. Et quia CA ad AG ut CP ad PG, erit componendo, CA + AG ad AG ut CG ad GP, et permutando CA + AG ad CG hoc est ut $2r - a$ ad b ita AG ad GP sive AF $\infty\, \frac{2}{3}\frac{br}{p}$, ad FH, quæ erit $\frac{\frac{2}{3}bbr}{2rp - ap}$.

Porro si intelligatur cuneus super sectore ABC, abscissus plano per AQ parallelam BC, invenimus [3]) perpendicularem a centro gravitatis cunei ductam in planum ABC, cadere in E, ut sit AE $\infty\, \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. Item si intelligatur cuneus super dimidio sectore ADC, abscissus plano per AD, invenimus distantiam inter perpendiculum à centro gravitatis cunei hujus ductam in planum ABC, interque axem AD, quæ distantia sit EK, esse $\infty\, \frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$ [4]). Ergo si fiat ut AF ad FH, hoc est, ut $2r - a$ ad b (nam hæc ostensa est ratio AF ad FH) ita EK $\infty\, \frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$, ad aliam EL; ea erit $\frac{\frac{3}{8}bba - \frac{3}{8}bbr + \frac{3}{8}pbr}{2ar - aa}$; sive quia $2ar - aa \infty\, bb$ [5]), erit eadem EL $\infty\, \frac{3}{8}a - \frac{3}{8}r + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. qua addita ad AE $\infty\, \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a +$

---

[4]) Cette longueur EK a été trouvée dans le calcul de la p. 481, ou elle s'appelait KC.

[5]) En marge: „Euclid." (Prop. XXXV du Lib. III des „Elementa").

en ajoutant cette longueur à $AE = \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$, on obtient $AL = \frac{3}{4}\frac{pr}{b}$, ce qui eſt la longueur cherchée du pendule iſochrone avec le ſecteur. C'eſt-à-dire, ſi l'on conſtruit une longueur de telle manière qu'on ait: ſinus BG : arc BD (ou bien corde BC: arc BDC) $= \frac{3}{4}$ rayon AD: la dite longueur, cette dernière ſera AL, longueur cherchée du pendule. Et l'on déterminera enſuite ſans difficulté le pendule iſochrone, ou bien le centre d'oſcillation, correſpondant au même ſecteur dans le cas de ſuſpenſion en un point plus éloigné, après que nous aurons démontré d'abord le théorème général qui ſuit.

Les diſtances des centres d'oſcillation au centre de gravité d'une figure quelconque ſymétrique par rapport à un axe et oſcillant dans ſon plan, ſont inverſement proportionnelles aux diſtances du point de ſuſpenſion à ce centre de gravité [1]). Par conſéquent, lorſque le centre d'oſcillation d'une figure a été trouvé dans le cas de ſuſpenſion contigue, ce centre ſera auſſi connu dans le cas de ſuſpenſion éloignée, pourvu que l'on ſuppoſe le centre de gravité de la figure également connu.

Soit L [Fig. 78] le centre d'oſcillation de la figure ABC ſuſpendue en T, c. à. d. ſoit TL la longueur du pendule iſochrone avec la figure. D'autre part ſoit F le centre de gravité de la figure. Puiſſe la même figure enſuite être ſuſpendue en V, et qu'on ait VF : FT = LF : FO. Je dis que O eſt le centre d'oſcillation de la figure ſuſpendue en V [2]).

En effet, ſoit FH la diſtance de l'axe AD au centre de gravité de la demi-figure ADC, et EK la diſtance du même axe à la perpendiculaire paſſant par le centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur ADC et limité par un plan paſſant par AD. Soit E pareillement le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc ſur la figure ABC, limité par un plan paſſant par la droite TX, perpendiculaire à l'axe AD et ſituée dans le plan de la figure. Par conſéquent ſi l'on conſtruit FN de telle manière que VF : FT = EF : FN, N ſera le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc limité par un plan paſſant par VM. Et ſi l'on conſtruit enſuite EP de ſorte que VF : FH = KE : EP, VN ajoutée à la longueur EP conſtituera la longueur du pendule iſochrone avec le ſecteur ſuſpendu en V. Mais puiſque, par hypothèſe, le pendule de longueur TL eſt iſochrone avec

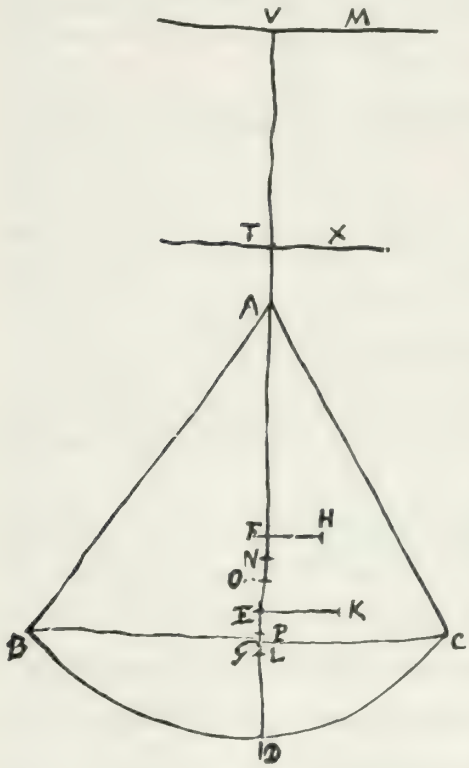
[1]) Comparez la note 1 de la p. 508 où l'on trouve la même proposition pour un autre cas spécial: celui de l'oscillation solide d'une figure plane.

[2]) Sur une des feuilles collées dans le Manuscrit B (voir la note 2 de la p. 435), plus précisément sur la p. 98 recto d'après la numération nouvelle, on lit la même Proposition dans la forme suivante: „Sicut distantiæ puncti suspensionis à centro gravitatis figuræ suspensæ inter se ita distantiæ centrorum oscillationis à centro gravitatis figuræ cujuslibet contraria ratione respondent distantijs puncti suspensionis ab eodem centro gravitatis. Ideoque invento centro oscillationis figuræ in suspen-

$+\frac{3}{8}\frac{pr}{b}$, fit AL ∞ $\frac{3}{4}\frac{pr}{b}$, longitudo penduli ſectori iſochroni quæ quærebatur. Hoc eſt ſi fiat ut ſinus BG ad arcum BD, ſive ut ſubtenſa BC ad arcum BDC, ita $\frac{3}{4}$ radij AD ad aliam ea erit AL longitudo penduli quæſita. Eidem vero ſectori in ſuſpenſione remota nunc facile pendulum iſochronon ſive centrum oſcillationis aſſignabitur, demonſtrato prius hoc theoremate univerſali.

Diſtantiæ centrorum oſcillationis à centro gravitatis figuræ cujuslibet circa axem ordinatæ motuque plano agitatæ, contraria ratione reſpondent diſtantijs puncti ſuſpenſionis ab eodem centro gravitatis [1]). Ideoque invento centro oſcillationis figuræ in ſuſpenſione contigua, idem quoque centrum habebitur in ſuſpenſione remota, dummodo et centrum gravitatis figuræ datum ponatur.

[Fig. 78.]



Sit figuræ ABC [Fig. 78] ſuſpenſæ ex T centrum oſcillationis L, hoc eſt, ſit TL longitudo penduli figuræ iſochroni. F vero ſit figuræ centrum gravitatis. Deinde eadem figura ex V ſuſpendatur, et ſicut VF ad FT, ita ſit LF ad FO. Dico O eſſe centrum oſcillationis figuræ ex V ſuſpenſæ [2]).

Sit enim FH diſtantia axis AD à centro gravitatis dimidiæ figuræ ADC, EK vero ejuſdem axis diſtantia à perpendiculari per centrum gravitatis cunei ſuper ADC, abſciſſi plano per AD. Sitque E ſimiliter ſub centro gravitatis trunci ſuper figura ABC, abſciſſi plano per rectam TX, perpendicularem axi AD, inque plano figuræ ſitam. Si igitur fiat ut VF ad FT ita EF ad FN, erit N ſub centro gravitatis trunci abſciſſi plano per VM. Rurſus ſi fiat ut VF ad FH ita KE ad EP, conſtituet VN una cum EP longitudinem penduli iſochroni ſectori ſuſpenſo ex V. Quia autem eidem ex T ſuſpenſo iſochro-

sione contigua, idem quoque inventum erit in suspensione remota". Ici aussi il n'est question que de „figuræ" c. à. d. de surfaces planes; plus tard Huygens a étendu ce théorème aux corps oscillants quelconques („Horologium oscillatorium", Pars Quarta, Prop. XIX).

le même ſecteur ſuſpendu en T, laquelle longueur eſt la ſomme de TE et de EL, et que E eſt le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc limité par un plan paſſant par TX, il eſt néceſſaire que EL : EK = HF : FT. Or, nous avions EK : EP = VF : FH. Par conſéquent, par la règle de la proportion dérangée [1]) on aura EL : EP = VF : FT. Mais nous avions auſſi EF : FN = VF : FT. Par conſéquent auſſi la ſomme LE + EF, c. à. d. LF, eſt à la ſomme EP + FN, comme VF eſt à FT. Mais nous savions que la même longueur LF eſt à FO, comme VF eſt à FT. Par conſéquent FO = FN + EP, et VO = VN + EP. Et il a été démontré que cette dernière ſomme conſtitue la longueur du pendule iſochrone lorsque la ſuſpenſion eſt en V. La ligne VO ſera donc, elle auſſi, la dite longueur du pendule, en d'autres termes, O ſera le centre d'oſcillation. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on poſe donc, dans le cas du ſecteur que nous avons conſidéré plus haut [2]), la diſtance VF, depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre de gravité du ſecteur, $= q$, et qu'on déſigne les autres longueurs par les mêmes lettres qu'auparavant, ſavoir AD $= r$, BG $= b$, l'arc BD $= p$, la longueur du pendule iſochrone VO devient égale à $q + \frac{\frac{1}{2}r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$. En effet, nous avions trouvé AL $= \frac{3}{4}\frac{pr}{b}$. Si nous retranchons de cette longueur AF $= \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, il reſte FL $= \frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$. En conſtruiſant la longueur FO de telle manière que VF, ou q : FA, ou $\frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, $=$ FL, ou $\frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$: FO, cette dernière devient égale à $\frac{\frac{1}{2}r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$, et en y ajoutant VF $= q$ on obtient VO $= q + \frac{1}{2}\frac{r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$, comme nous l'avons dit.

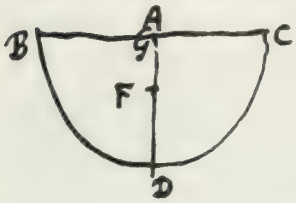
Dans le cas où le ſecteur occupe tout un demi-cercle [Fig. 79], et que de plus le point de ſuſpenſion eſt le centre A, on aura AD = BG, c. à. d. $r = b$, et $q =$ AF $= \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}$, et en ſubſtituant partout cette valeur de q, on obtient VO $= \frac{3}{4}p$. Mais ſi l'on ſuppoſe que le ſecteur remplit le cercle entier, BG s'annule, et par conſéquent VO $= q + \frac{1}{2}\frac{r^2}{q}$, dans quel cas, ſi $q = r$, c. à. d. ſi le cercle eſt ſuſpendu au point B [Fig. 79] de la circonférence, la longueur du pendule deviendra BO $= \frac{3}{2}r$, c. à. d. les trois quarts du diamètre. Mais nous arriverons à ce réſultat [3]) encore par

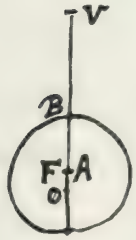
[1]) Voir la note 22 de la p. 304 du T. XI. [2]) Voir la p. 527. [3]) Voir les deux premiers alinéas de la p. 537.

num eſt pendulum longitudinis TL, ex hypotheſi, compoſitum nempe ex TE et EL eſtque E ſub centro gravitatis trunci abſciſſa plano per TX; neceſſe eſt EL eſſe ad EK, ſicut HF ad FT. Atqui EK erat ad EP ut VF ad FH. Ergo ex æquali in proportione perturbata [1]), erit EL ad EP ut VF ad FT. Sed ut VF ad FT ita quoque erat EF ad FN. Ergo etiam utraque ſimul LE, EF, hoc eſt LF ad utraque EP et FN, ſicut VF ad FT. Erat autem ut VF ad FT ita eadem LF ad FO. Ergo FO æqualis erit duabus FN et EP; ac proinde tota VO æqualis duabus VN et EP. Quas oſtenſum eſt conſtituere longitudinem penduli iſochroni cum ſuſpenſio eſt in V. Itaque et VO erit prædicta penduli longitudo, ſive O centrum oſcillationis, quod erat demonſtrandum.

In ſectore igitur de quo ante egimus [2]), ſi ponatur diſtantia VF, a puncto ſuſpenſionis uſque ad centrum gravitatis ſectoris $\infty\, q$; cæteris longitudinibus notatis ut prius, nempe AD $\infty\, r$, BG $\infty\, b$; arcu BD $\infty\, p$; fit longitudo penduli iſochroni VO $\infty\, q + \frac{\frac{1}{2}rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$. Erat enim inventa AL $\infty\, \frac{3}{4}\frac{pr}{b}$. à qua auferendo AF $\infty\, \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, manet FL $\infty\, \frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$. quare faciendo ut VF, $\infty\, q$, ad FA $\infty\, \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$ ita FL $\infty\, \frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$ ad FO, fit ea $\infty\, \frac{\frac{1}{2}rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$, additaque VF $\infty\, q$, fit VO $\infty\, q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$, uti dictum.

[Fig. 79.]





Quod ſi ſector ſemicirculum explet [Fig. 79], ſimulque ſuſpenſio ſit ex centro A, erit AD ∞ BG, hoc eſt, $r \infty\, b$: et $q \infty$ AF $\infty\, \frac{2}{3}\frac{rr}{p}$, quo ubique ſubſtituto in locum q, fit VO $\infty\, \frac{3}{4}p$. Si vero circulum integrum ſector explere intelligatur, fit BG nihilo æqualis, ideoque VO $\infty\, q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q}$, ubi, ſi q fuerit æqualis r, hoc eſt ſi circulus ex circumferentiæ puncto B [Fig. 79] ſuſpendatur, fiet longitudo penduli BO $\infty\, \frac{3}{2}r$ ſive tribus quartis diametri. ſed hæc alijs modis quoque inveſtigabimus [3]). Dignum vero eſt animadverſione, quod in quolibet ſectore, ſi longitudo VA [Fig. 78] ex qua ſuſpenſus eſt, fit $\infty \sqrt{\frac{1}{2}rr}$, hoc eſt, quæ poſſit dimidium quadratum radij AB, erit longitudo penduli iſochroni VO dupla VA, hoc eſt æqualis lateri

d'autres procédés. Ce qui mérite d'être remarqué, c'eſt que, dans le cas d'un ſecteur quelconque, ſi la longueur de la ligne VA [Fig. 78] à laquelle le ſecteur eſt ſuſpendu, eſt égale à $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$, c. à. d. ſi la longueur de cette ligne eſt telle que ſon carré eſt égal à la moitié du carré du rayon AB, la longueur du pendule iſochrone VO ſera le double de VA, ce qui veut dire qu'elle ſera égale au côté d'un carré inſcrit dans le cercle du ſecteur; ce qu'on vérifie en ſubſtituant partout q, ou VF, $= \sqrt{\frac{1}{2}r^2 + \frac{2}{3}\frac{rb}{p}}$, c. à. d. $=$ VA $+$ AF, dans la valeur de VO trouvée auparavant, ſavoir $VO = q + \frac{\frac{1}{2}r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$: on trouvera ainſi $VO = \sqrt{2r^2}$. Mais nous avons obtenu ce réſultat par une méthode différant de celle que nous avons expliquée ici.

Soit ABG [Fig. 80] une barre impondérable ſuſpendue en A; on demande d'attacher en un point donné B de cette barre deux triangles égaux BC et BD, formant avec l'axe AB des angles égaux (triangles dont les angles B sont par hypothèſe très petits ou plutôt infiniment petits), de telle manière que les triangles, ſuſpendus de cette façon en A, ayent leurs oſcillations iſochrones avec un pendule ſimple de longueur donnée AL. Je dis que les baſes des triangles, D et C (car ces baſes peuvent être conſidérées comme des points), ſe trouvent ſur une circonférence de cercle [1]).

En effet, ſoit $AB = a$, et la longueur $AL = b$. Abaiſſons la perpendiculaire DG ſur AG et appelons BG, x et GD, y. Pour trouver maintenant le pendule iſochrone avec la figure compoſée par les triangles BC et BD, ſuivant la méthode indiquée dans la propoſition... [2]), ſuppoſons conſtruit au-deſſus de chacun des deux triangles un tronc limité par un plan paſſant par AM, parallèle à GD. Le centre de gravité commun de ces deux troncs ſe trouvera ſur le diamètre BG, et ſera ſitué de la droite AM à une diſtance égale à la diſtance de cette droite du centre de gravité d'un tronc ſur le triangle BG, dont l'angle au ſommet B eſt également infiniment petit par hypothèſe. Et l'on trouve le centre de gravité de ce tronc en prenant $BE = \frac{2}{3}BG$, de ſorte que E eſt le centre de gravité du triangle BG, et enſuite $BF = \frac{3}{4}BG$, de ſorte que F eſt le centre de gravité de l'onglet conſtruit au-deſſus du même triangle et limité par un plan paſſant par B, et en conſtruiſant

[1]) Ou plutôt: que le lieu des points C et D, pour une longueur donnée AL, est une circonférence de cercle.

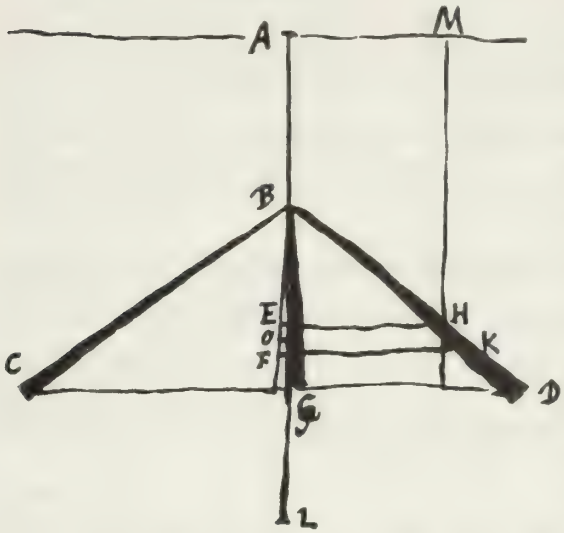
[2]) Voir à la p. 515 le premier alinéa de la Pièce XVI.

[3]) Voir la note 1 de la p. 535.

inſcripti quadrati in circulo ſectoris: quod apparet verum eſſe ſi in VO, ante reperta $\infty\, q + \frac{\frac{1}{2}rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$, ubique loco $q \infty$ VF, ſubſtituatur $\sqrt{\frac{1}{2}rr + \frac{2}{3}\frac{rb}{p}}$, hoc eſt, VA + AF. fiet enim VO $\infty \sqrt{2rr}$. Alia tamen via huc devenimus, quam hic explicavimus.

Virga ABG [Fig. 80] ponderis expers ſuſpenſa ſit in A, oporteatque ad datum in ea punctum B affigere triangula duo paria et paribus angulis ab axe AB recedentia BC, BD; quorum anguli ad B tanquam minimi, ſive infinitè parvi conſiderentur; quæque ita ſuſpenſa ab A, oſcillationes iſochronas habeant pendulo ſimplici datæ longitudinis AL. Dico baſes triangulorum D et C, hæ enim ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam [1]).

[Fig. 80.]



Sit enim AB ∞ a. longitudo AL ∞ b. ductaque DG perpendiculari in AG, vocetur BG, x; GD, y. Ut jam figuræ ex triangulis BC, BD compoſitæ pendulum iſochronum inveniatur ſecundum methodum traditam propoſitione...[2]) intelligatur ſuper utroque triangulorum truncus erectus abſciſſus plano per AM ipſi GD parallelam. Horum truncorum centrum gravitatis commune erit in diametro BG, et tantundem diſtabit ab recta AM, atque centrum gravitatis trunci ſuper triangulo BG cujus item in vertice B minimum eſſe angulum putandum eſt. hujus vero trunci centrum gravitatis invenitur, ſumendo BE $\infty \frac{2}{3}$ BG, ut E ſit centrum gravitatis trianguli BG; deinde BF $\infty \frac{3}{4}$ BG, ut ſit F centrum gravitatis cunei ſuper triangulo eodem abſciſſi plano per B; ac faciendo demum ut AE, $a + \frac{2}{3}x$, ad EB, $\frac{2}{3}x$, ita FE, $\frac{1}{12}x$, ad EO, $\frac{\frac{1}{18}xx}{a + \frac{2}{3}x}$. erit enim O centrum gravitatis [3]) trunci dicti ſuper

enfin EO de telle manière que AE, ou $a+\frac{2}{3}x$, ſoit à EB, ou $\frac{2}{3}x$, comme FE, ou $\frac{1}{12}x$, eſt à EO, d'où l'on tire $EO = \frac{\frac{1}{18}x^2}{a+\frac{2}{3}x}$. En effet, O ſera alors le centre de gravité [1]) du tronc conſidéré conſtruit ſur le triangle BG et limité par un plan paſſant par AM. $AO = a+\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}\frac{x^2}{a+\frac{2}{3}x}$ eſt donc la longueur du pendule iſochrone avec les triangles BC et BD oſcillant d'un mouvement ſolide autour de l'axe AM. Il faut chercher enſuite la longueur du pendule iſochrone avec l'un des deux triangles BD oſcillant autour de l'axe BG, laquelle longueur ſera FK, ligne tracée parallèlement à GD et rencontrant le triangle BD au point K; en effet, on aura $BK = \frac{3}{4}BD$, et par conſéquent K ſera le centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur le triangle BD et limité par un plan paſſant par BG, attendu que l'onglet a ici la forme d'une pyramide.

Pareillement, ſi l'on tire EH parallèle à GD, on aura $BH = \frac{2}{3}BD$, et par conſéquent H ſera le centre de gravité du triangle BD. Si l'on conſtruit donc une nouvelle longueur de telle manière que AE, ou $a+\frac{2}{3}x$, ſoit à EH ou $\frac{2}{3}GD$ ou $\frac{2}{3}y$, comme KF, qui eſt égale à $\frac{3}{4}DG$ ou $\frac{3}{4}y$, eſt à la dite longueur, celle-ci ſera $\frac{\frac{1}{2}y^2}{a+\frac{2}{3}x}$, et en l'ajoutant à AO qui avait la valeur $a+\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}\frac{x^2}{a+\frac{2}{3}x}$, on obtiendra la longueur du pendule iſochrone avec les triangles BC et BD, oſcillant dans leur plan, ſavoir $a+\frac{2}{3}x+\frac{\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{2}y^2}{a+\frac{2}{3}x}$, qui doit donc être égale à la ligne donnée AL ou b, d'où l'on tire

$$y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - x^2}.$$

Cette équation fait voir que l'extrémité de la ligne GD ou y, lorſque BG, ou x, eſt conſidérée comme une grandeur variable, ſe trouve ſur une circonférence de cercle, parce que l'on a ſous la racine le terme $-x^2$. Nous donnerons bientôt une deſcrip-

triangulo BG, abſciſſi plano per AM. Eſt igitur AO $\infty\, a + \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}\frac{xx}{a+\frac{2}{3}x}$ longitudo penduli iſochroni triangulis BC, BD motu ſolido agitatis circa axem AM. Inſuper vero quærenda eſt penduli longitudo quod ſit iſochronum alteri triangulorum BD agitato circa axem BG, quæ quidem longitudo erit FK, quæ nempe linea ducta eſt parallela GD, triangulo BD occurrens in K; erit enim BK $\infty\, \frac{3}{4}$ BD, ideoque K centrum gravitatis cunei ſuper triangulo BD abſciſſi plano per BG, cum cuneus hic pyramidis formam habeat.

Similiter vero ducta EH parallela GD, erit BH $\infty\, \frac{2}{3}$ BD, ideoque H centrum gravitatis trianguli BD. Itaque ſi fiat ut AE $\infty\, a + \frac{2}{3}x$ ad EH $\infty\, \frac{2}{3}$ GD $\infty\, \frac{2}{3}y$, ita KF quæ eſt $\infty\, \frac{3}{4}$ DG $\infty\, \frac{3}{4}y$ ad aliam $\frac{\frac{1}{2}yy}{a+\frac{2}{3}x}$, hæc addita ad AO, quæ erat ∞ $a + \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}\frac{xx}{a+\frac{2}{3}x}$ faciet longitudinem penduli iſochroni triangulis BC, BD, motu plano agitatis, $a + \frac{2}{3}x + \frac{\frac{1}{18}xx + \frac{1}{2}yy}{a+\frac{2}{3}x}$; quæ debet itaque æquari ipſi AL ſive b unde fit

$$y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}.$$

Ex hac autem æquatione patet terminum lineæ GD ſive y, quando BG ſive x ut indeterminata conſideratur, eſſe ad circuli circumferentiam quia habetur $-xx$. Cujus circuli deſcriptionem mox dabimus, ſed prius animadvertendum eſt, quod ſi $a \infty 0$, hoc eſt, ſi punctum B ubi affiguntur trianguli ponatur idem quod A, fore æquationem

$$y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}.$$

[1]) Ou plutôt la projection de ce centre de gravité sur le plan CBD.

tion de ce cercle, mais il faut remarquer d'abord que, si $a = 0$, c. à. d. si le point B où sont attachés les triangles est par hypothèse le même que A, l'équation sera

$$y = \sqrt{\frac{4}{3}bx - x^2}.$$

Cela veut dire que, si l'on prend $AO = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}AL$ [Fig. 81], et qu'on décrit par A une circonférence de cercle ADN avec le centre O, l'extrémité de la perpendiculaire GD se trouvera sur cette circonférence.

Par conséquent, comme deux triangles quelconques à sommets A, infiniment aigus et symétriques, placés dans la circonférence ADNC, ont le centre d'oscillation L, où $AL = \frac{3}{4}$ diamètre AN; et comme le cercle entier est composé de pareilles paires de triangles, et que la même chose est vraie pour une portion quelconque BCDN du cercle, possédant des côtés égaux BC et BD: il est manifeste que le centre d'oscillation est en L, tant pour le cercle entier que pour une portion quelconque de ce genre [1]).

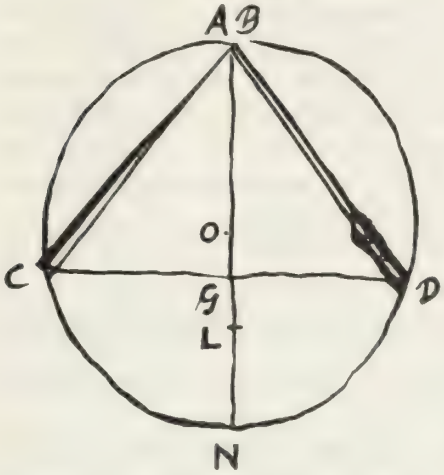
Autre cas particulier: si l'on substitue, dans l'équation, $\frac{8}{3}a = \frac{4}{3}b$, en d'autres termes $2a = b$, c. à. d. si l'on suppose les triangles attachés en B, point milieu de la longueur AL, on aura $y = \sqrt{2a^2 - x^2}$ [Fig. 82]. Cette équation nous apprend que si l'on décrit du centre B avec un rayon dont le carré est égal au double du carré de BA, une circonférence de cercle CND, deux triangles quelconques infiniment aigus à sommets B, terminés par des bases situées sur la circonférence et symétriques par rapport à AB, auront leur centre d'oscillation au point L, s'ils sont suspendus en A. Il en résulte, puisque le cercle total CND, aussi bien qu'un secteur quelconque de ce cercle symétrique par rapport à la droite AN, sont composés de paires de pareils triangles, que manifestement le point L sera le centre d'oscillation de ce cercle aussi bien que celui de tous ces secteurs. Par conséquent:

Tout secteur de cercle suspendu en un point éloigné du centre de son cercle à une distance égale à la moitié du côté du carré inscrit au cercle, aura un pendule isochrone égal au côté entier du carré nommé. C'est ce que nous avons déjà remarqué plus haut [3]). Et si l'on pouvait trouver encore dans un autre cas le pendule isochrone avec un secteur sans supposer la longueur de l'arc de ce secteur donnée, de même que nous avons trouvé ici ce pendule sans connaître l'arc, on pourrait au contraire en déduire la longueur de l'arc du secteur. En effet, puisqu'un secteur

---

[1]) Comparez la p. 455.
[2]) Lisez „super".
[3]) Voir la fin de la p. 531.

[Fig. 81.]

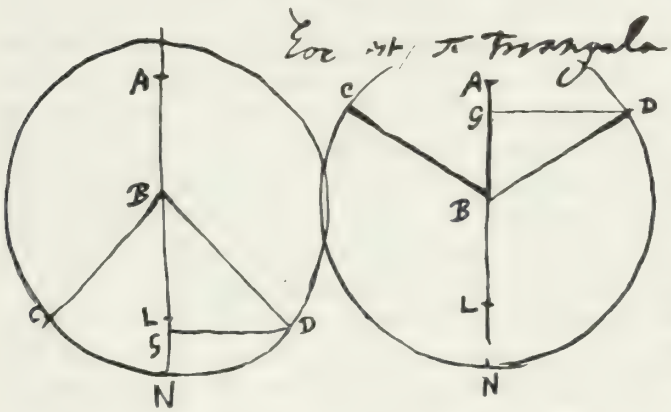


Hoc eſt, ſi ſumatur AO $\infty \frac{2}{3}b \infty \frac{2}{3}$ AL [Fig. 81], centroque O per A circulus deſcribatur ADN; terminus perpendicularis GD erit ad ejus circumferentiam.

Cum igitur quælibet duo triangula acutiſſima quæ ex A ad circumferentiam ADNC conſtituuntur, magnitudine et ſitu ſibi mutuo reſpondentia, centrum oſcillationis habeant punctum L, poſitâ AL $\infty \frac{3}{4}$ diametri AN: cumque circulus totus ex ejuſmodi triangulorum paribus componatur, uti et portio ejus quælibet ut BCND, latera BC, BD æqualia habens: manifeſtum eſt, tum circuli totius centrum oſcillationis eſſe in L, tum portionis cujuslibet qualem diximus [1]).

Rurſus ſi in æquatione inventa ſit $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, hoc eſt $2a \infty b$, hoc eſt, ſi triangula affigi intelligantur in B [Fig. 82] quod bifariam dividat longitudinem AL, erit $y \infty \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod ſi centro B, radio qui poſſit duplum BA, circumferentia deſcribatur CND, bina quælibet triangula acutiſſima vertices in B habentia, atque ad circumferentiam eam baſibus terminata, anguliſque æqualibus ſuber [2]) AB inclinata, quod inquam ſuſpenſa ex A, centrum oſcillationis habebunt punctum L. Unde cum et circulus integer CND, et ſector ejus quilibet, axem habens rectam AN, ex triangulorum talium paribus componatur, manifeſtum eſt circuli et ſectorum iſtorum centrum oſcillationis fore punctum L. Itaque

[Fig. 82.]



Quilibet circuli ſector ſuſpenſus à puncto quod diſtet a centro circuli ſui ſemiſſe lateris quadrati circulo inſcripti, pendulum iſochronum habebit æquale integro dicti quadrati lateri. quod etiam ſupra animadvertimus [3]). quod ſi vero aliquo præterea caſu, pendulum ſectori alicui inveniri poſſet iſochronon, non ſuppoſita

quelconque BCD ſuſpendu en A, de la même manière que plus haut, ſavoir en ſorte que le carré de BA eſt égal à la moitié du carré de BC, a ſon centre d'oscillation en L [Fig. 83], où BL = BA, il ſuffira, ſi ce ſecteur, ſuſpendu en un autre point donné R, a un centre d'oſcillation P donné, de diviſer la droite RL en Q de telle manière qu'on ait RQ : QL = AR : LP, où ces deux dernières longueurs ſont données, pour trouver Q, centre de gravité du ſecteur BCD, comme cela reſſort de la Prop... [1]); et, ce centre de gravité étant donné, nous ſavons que la corde CD eſt à l'arc correſpondant comme BQ eſt à $\frac{2}{3}$ du rayon BC.

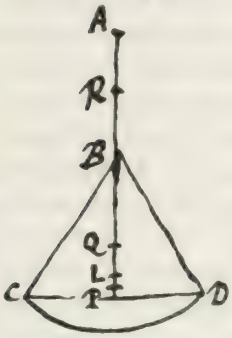
Enfin, pour exécuter la conſtruction générale correſpondant à l'équation trouvée plus haut $y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - x^2}$, ajoutons et retranchons des quantités qui ſe trouvent ſous le radical les termes $+ \frac{16}{9}a^2 + \frac{16}{9}ab + \frac{4}{9}b^2$; on obtiendra alors $y = \sqrt{\frac{2}{9}ab - \frac{2}{9}a^2 + \frac{4}{9}b^2 - \left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}b + x\right)^2}$.

Par conſéquent il faut diviſer la longueur AL en deux parties égales en E [Fig. 84] et ajouter à BE ſa tierce partie EF; F ſera alors le centre de la circonférence que nous devons décrire. Quant au rayon FO, ce ſera la ligne dont le carré eſt égal au double de la différence des carrés de AE et de EF. Si l'on conſtruit donc du point B deux triangles ſymétriques extrêmement aigus et s'étendant juſqu'à la circonférence, tels que BD et BC, leur centre d'oſcillation ſera L lorsqu'ils ſont ſuſpendus en A. Par conſéquent c'eſt également en L que ſe trouvera le centre d'oſcillation d'une partie quelconque du cercle CCDD, telle que BCOD ou BCMD, ayant ſon ſommet en B, ſymétrique par rapport à la droite AL et ſuſpendue en A. Il en ſera de même pour les ſegments de cercle KON et KMN; mais dans tous les autres cas, les centres d'oſcillation de pareils ſegments ne peuvent être trouvés que lorſque la grandeur de l'arc eſt donnée.

Que ſi une partie du cercle telle que BCD eſt donnée, ou un ſegment de cercle tel que KON, et qu'on demande de trouver ſon point de ſuſpenſion A de telle manière que cette partie de cercle ou ce ſegment ſoit iſochrone avec un pendule de longueur donnée AL, il faut, après avoir déterminé le centre F du cercle correſpondant, diminuer la diſtance FB d'un quart (FE) et prendre les longueurs EA et EL l'une et l'autre égale à une droite dont le carré eſt égal à la moitié du carré du rayon, augmenté du carré de EF.

[1]) Voir le deuxième alinéa de la p. 529.

[Fig 83.]

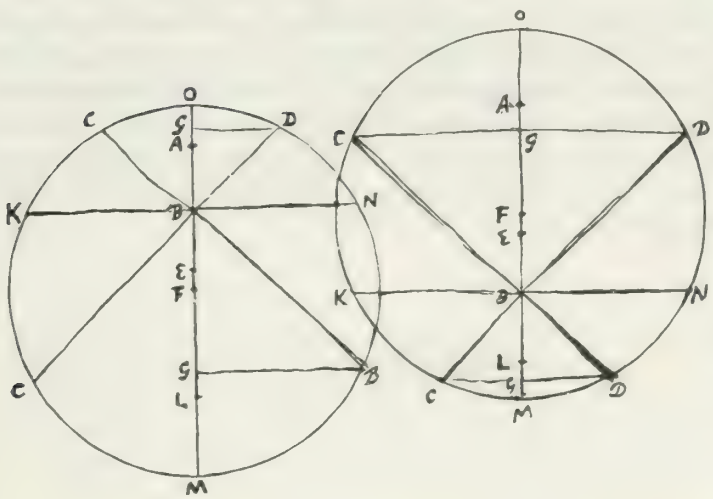


arcus longitudine data, ſicut hic abſque ea invenitur, daretur inde arcus ſectoris ejus longitudo. Cum enim ſector quivis BCD ſuſpenſus ex A, ut modo, ut nempe BA poſſit $\frac{1}{2}$ quadrati BC, habeat centrum oſcillationis L [Fig. 83], ut ſit BL ∞ BA. ſi jam ex alio dato puncto R ſuſpenſus habeat centrum oſcillationis datum P, oportebit tantum dividere rectam RL in Q, ut ſit RQ ad QL ut AR ad LP quæ datæ ſunt, eritque Q centrum gravitatis ſectoris BCD, ut conſtat ex propos... [1]). dato autem hoc gravitatis centro ſcimus eſſe ut BQ ad $\frac{2}{3}$ radij BC, ita ſubtenſam CD ad ſuum arcum.

Porro ad univerſalem conſtructionem æquationis ſupra inventæ $y \infty$ $\infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$; addatur et auferatur, quantitatibus in radice contentis, $+ \frac{16}{9}aa + \frac{16}{9}ab + \frac{4}{9}bb$, fietque

$$y \infty \sqrt{\frac{2}{9}ab - \frac{2}{9}aa + \frac{4}{9}bb - \square \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}b + x}.$$

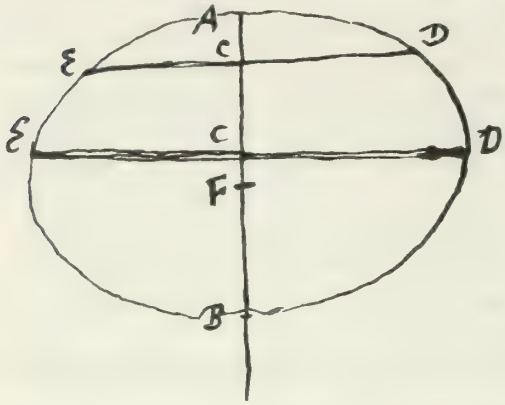
[Fig. 84.]



Itaque dividatur longitudo AL bifariam in E [Fig. 84], et apponatur ad BE pars tertia ſua EF, eritque F centrum deſcribendi circuli. Radius autem FO, erit linea quæ poteſt duplum differentiæ quadratorum AE et EF. Si itaque ex puncto B ad deſcriptam circumferentiam triangula duo paria acutiſſima conſtituantur ut BD, BC, illorum ex A ſuſpenſorum centrum oſcillationis erit L. Quare et portionis cujuſlibet circuli CCDD, cujus vertex ſit in B axemque habeat in recta AL, quales ſunt portiones

Conſidérons encore une barre impondérable AB ſuſpendue en A [Fig. 85] à laquelle on demande d'attacher en ſon point milieu C une autre barre pondérable ED de telle manière que cette barre ainſi ſuſpendue ait des oſcillations iſochrones avec un pendule de longueur donnée AB. Soit AB $= a$; appelons AC x et CD y, ces deux longueurs étant regardées comme indéterminées. Le pendule iſochrone avec la barre ED ſuſpendue à AC eſt alors facilement trouvé d'après ce qui a été démontré plus haut au ſujet des rectangles [2]); en effet, on peut conſidérer la barre ED comme un rectangle de très petite largeur, auquel ſera iſochrone un pendule de longueur AC augmentée d'un tiers de la troiſième proportionnelle à AC et CD. Cette longueur totale ſera donc ici $x + \frac{1}{3}\frac{y^2}{x}$; par hypothèſe elle doit être égale à la longueur donnée AB ou a. On en tire $y^2 = 3ax - 3x^2$, ou $y = \sqrt{3ax - 3x^2}$. Cette équation nous apprend que le lieu des points D et E eſt une ellipſe, parce nous avons ſous le radical le terme $-3x^2$. Le centre de cette ellipſe ſera le point F qui diviſe la longueur AB en deux parties égales. Et ſon „latus rectum" par rapport aux ordonnées perpendiculaires à AB ſera $3a$, c. à. d. le triple de AB, tandis que AB elle-même ſera le „latus tranſverſum". Par conſéquent dans une ellipſe AEBD décrite de cette manière toute droite pondérable ECD attachée en ſon centre à l'axe AB, le point de ſuſpenſion reſtant en A, ſera iſochrone avec le pendule de longueur AB. Il en réſulte que l'ellipſe totale auſſi bien qu'une partie quelconque de l'ellipſe compriſe entre une ou deux droites perpendiculaires à l'axe AB eſt iſochrone avec le même pendule AB [3]).

[Fig. 85.]



[1]) Lisez „suspensæ".
[2]) Voir la p. 523.
[3]) Voir sur cette ellipse la p. 446 qui précède. Dans la note 3 de cette p. 446 nous donnons le sens précis de l'expression „latus rectum... secundum quod possunt ordinatim applicatæ".

BCOD, BCMD, ex A ſuſpenſi [1]), centrum oſcillationis erit in L. atque adeo etiam ſegmentorum circuli KON et KMN; quorum alijs quibuſcunque caſibus, centrum oſcillationis non niſi ſuppoſita arcus dimenſione inveniri poteſt.

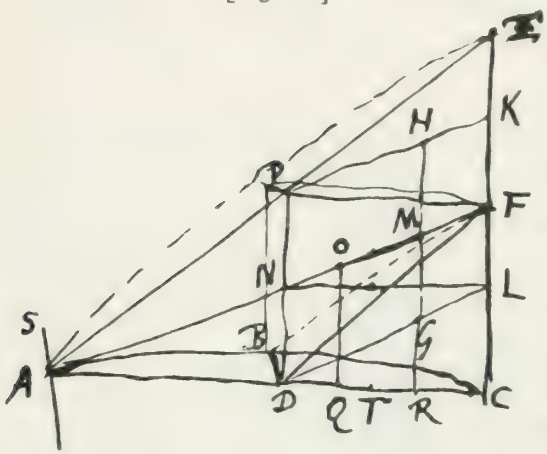
Quod ſi data ſit circuli portio ut BCD vel ſegmentum circuli ut KON oporte- atque invenire illius punctum A, unde ſuſpenſum iſochronum ſit pendulo notæ longitudinis AL; invento circuli cujus datum eſt ſegmentum centro F; minuenda eſt diſtantia FB parte ſui quarta FE; ſumendæque EA, EL ſingulæ æquales ei quæ poteſt dimidium quadratum radij una cum quadrato EF.

Sit rurſus virga ſine pondere AB ſuſpenſa in A [Fig. 85], cui alia virga ponderans, ED, affigenda ſit puncto ſui medio C. quæ ſic ſuſpenſa oſcillationes iſochronas habeat pendulo datæ longitudinis AB. Sit AB ∞a. AC vero vocetur x. CD, y: quæ ambæ tanquam indeterminatæ conſiderantur: Pendulum itaque iſochronum virgæ ED ex AC ſuſpenſæ, facile invenitur ex ijs quæ ſupra de rectangulis oſtenſa ſunt [2]), poteſt enim ED virga ut rectangulum minimæ latitudinis conſiderari, cui iſochronum pendulum æquale erit AC una cum triente tertiæ proportionalis duabus AC, CD: quæ igitur tota longitudo hic erit $x + \frac{1}{3}\frac{yy}{x}$, quæ ex hypotheſi æquari debet datæ AB ∞ a. Unde fit $yy \infty 3ax - 3xx$; ſive $y \infty \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quæ æquatio docet locum puncti D vel E eſſe ad ellipſin, quia habetur $-3xx$. cujus ellipſis centrum erit F punctum quo longitudo AB bifariam dividitur. Latus rectum vero ſecundum quod poſſunt ordinatim applicatæ ad AB erit $3a$ ſive triplum AB, atque ipſa AB latus tranſverſum. Itaque in Ellipſi AEBD ſecundum iſta deſcripta, quælibet recta ponderans ECD axi AB medio ſui puncto affixa, manente puncto ſuſpenſionis A, iſochrona erit pendulo longitudinis AB. unde patet et Ellipſin totam et quamlibet ejus partem abſciſſam recta una vel duabus axi AB perpendicularibus, eidem pendulo AB iſochronum eſſe [3]).

XVII [1]).

[1664 ou 1665] [2])

[Fig. 86.]



Si fuerit figura plana ad axem ordinata ut ABC [Fig. 86], cujus axis BD [3]); cuneoque AEC ſuper figura tota abſciſſo, ducto plano per AS rectam æquidiſtantem axi BD. datum ſit brachium cunei illius ſuper AS, quod ſit QA, ac præterea brachium dimidiæ figuræ, BCD, ſuper axe BD, quod ſit TD. Dico etiam brachium cunei ſive ungulæ ſuper dimidia figura abſciſſi plano per axem BD [4]), ſuper eundem axem datum eſſe. Et contra, dato hoc brachio, itemque brachio dicto dimidiæ figuræ TD, dari quoque brachium QA, cunei ſuper figura tota. Secetur enim AEC planis PF, PD quorum hoc per axem BD ductum intelligatur figuræ ad angulos rectos, illud vero plano figuræ parallelum. fiunt itaque ſolida duo æqualia ac ſimilia APD, PDF, quorum centra gravitatis cum æqualiter diſtent a plano PD, erit commune utriuſque gra-

---

[1]) Manuscrit C, p. 2.

[2]) La dernière date qu'on trouve dans le Manuscrit B, est le 21 novembre 1664; et la première date dans le Manuscrit C est le 22 février 1665 (p. 28).

[3]) La figure plane (symétrique par rapport à BD et située en entier d'un même côté de la droite SA) qui forme la base de l'onglet considéré, n'est pas nécessairement limitée par la droite AC (perpendiculaire à BD et à SA), comme la Fig. 86 semble l'indiquer. Ce n'est que dans le cas où la figure plane est symétrique par rapport à AC, que les points Q, T et R (considérés comme projections des centres de gravité correspondants; le texte ne parle que des *bras de levier* DQ, etc.) seront situés sur AC.

[4]) On peut se figurer ce plan parallèle au plan sécant passant par AS, quoique le bras de levier de l'onglet correspondant soit indépendant de l'inclinaison du plan.

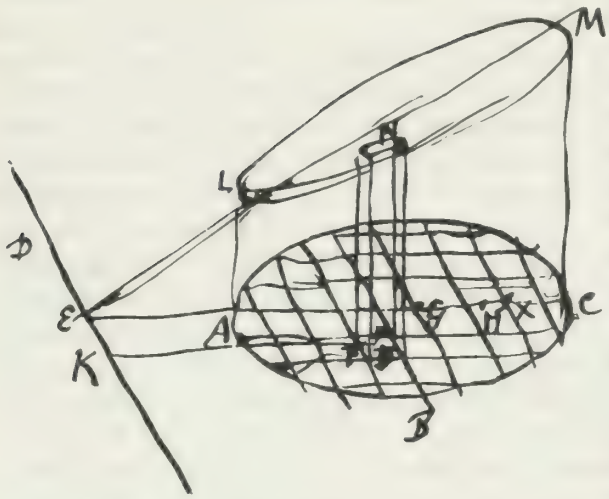
vitatis centrum in ipſo plano PD; itaque brachium eorum ſuper AS eſt DA. Totius vero cunei AEC brachium ſuper AS eſt QA; Ergo ſi fiat DQ ad QR ſicut gravitas cuneorum DFC, PEF ad gravitatem ſolidorum APD, PDF, hoc eſt ſicut cuneus DFC ad ſolidum PDF, Erit RA brachium cuneorum DFC, PEF ſuper AS. datur autem ratio cunei DFC ad ſolidum PDF, quæ nempe eſt eadem quæ DT ad TC [1]). Ergo et ratio DQ ad QR. et DQ data eſt, ergo et QR et tota DR. Cum vero centra gravitatis cuneorum DFC, PEF, ſint in eadem recta perpendiculari ad planum ABC, patet utriuſlibet brachium ſuper DB eſſe DR. Faciendo itaque ut TD ad DC ita QD ad DR habetur brachium DR cunei DFC. Et contra ſi dentur DR et DT, faciendo ut CD ad DT ita RD ad DQ, erit AQ brachium cunei AEC ſuper AS.

[1]) Si l'on suppose les plans sécants (voir la note précédente) inclinés à 45°, ce qui ne change pas le rapport des volumes, on aura FC = DC, le volume du cylindre à base BDC (ou bien possédant une base, dont BDC fait partie, voir la note 3 de la 543) sera égal à cette base multipliée par DC; tandis que le volume de l'onglet BDCF sera égal à la même base multipliée par DT d'après le théorème de la p. 501. Le „solidum PDF" est donc égal au produit de cette base par TC (différence des longueurs DC et DT).

XVIII[1].

[1665?][2]

[Fig. 87.]



Data figura plana quavis ABC [Fig. 87] quæ divisa sit in particulas æquales minimas, dataque in eodem cum figura plano lineâ rectâ, in quam ex particulis singulis perpendiculares ductæ intelligantur, ut FK &c. Invenire summam quadratorum omnium dictarum perpendicularium.

Sit primum recta DE extra figuram ABC et sit GE distantia centri gravitatis figuræ ab recta ED; et HE distantia inter ipsam ED et perpendicularem quæ ex centro gravitatis trunci super figura ABC abscissi plano per ED cadit in figuram ABC. dico summam quæsitam quadratorum omnium perpendicularium in rectam ED, æquari rectangulo linearum GE, EH multiplici secundum numerum omnium dictarum perpendicularium, sive omnium particularum in quas figura secta est.

demonstratio repetenda ex libro B, lemmatis ℵ[3]), ubi concluditur, summam productorum ex particulis singulis in quadrata suarum perpendicularium super ED, sive summam quadratorum horum omnium in particulam unam, æquari producto ex figura ABC in rectangulum distantiarum HE, EG [3]). Est autem figura AB [4])

---

[1]) Manuscrit C, p. 9—12.

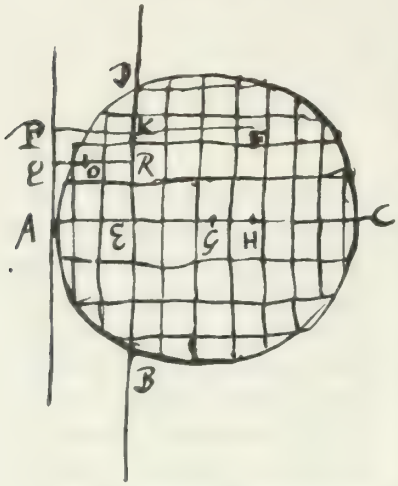
[2]) Comparez la note 2 de la p. 543 qui précède. La présente Pièce est de 1664 ou de 1665 (comparez la p. 519 du T. XIV où nous avons adopté la dernière date).

[3]) Voir la note 2 de la p. 501 et la p. 503 de ce Tome.

[4]) Ou ABC.

id quod fit ex particula una in numerum particularum in quas divisa est. Itaque omissa utrimque multiplicatione in particulam figuræ, apparet summam omnium quadratorum à perpendicularibus super ED æquari producto rectanguli HE, EG in numerum particularum in quas figura divisa est [1]).

[Fig. 88.]



Sit jam recta DE [Fig. 88] quæ figuram secet in partes DAB, DCB et oporteat invenire summam quadratorum a perpendicularibus omnibus quæ utrinque è particulis figuræ ABC ducuntur in rectam DE ut FK, OR &c. Quod si dentur distantiæ centrorum gravitatis partis utriusque ab recta DE, nec non distantiæ punctorum superquibus gravitant cunei super dictis partibus abscissi planis per DE ductis, jam quasi duæ figuræ erunt et extra utramque data linea ED; ac proinde eodem modo quo antea colligentur summæ omnium quadratorum à perpendicularibus quæ utrinque in rectam ED cadunt à particulis sectæ figuræ. at non datis illis centrorum distantijs (quæ sepe [sic] inventu difficiles aut impossibiles sunt) sed tantum datis ab recta AP, quæ tangat figuram sitque parallela ED distantijs AG, centri gravitatis figuræ totius, et AH puncti super quo gravitat cuneus abscissus plano per AP, ostendemus tamen dari summam quæsitam omnium quadratorum, quam nempe æqualem esse dicimus rectangulo AGH una cum quadrato EG multiplicibus secundum numerum particularum in quas figura tota dividitur [2]).

Sit enim AE distantia inter rectas ED, AP ∞ a, ductisque ab F et O perpendicularibus in rectam AP, sit FP ∞ b, OQ ∞ c. Est itaque perpendicularis FK ∞ $b - a$, et perpend. OR ∞ $a - c$. adeoque quadratum FK ∞ $bb - 2ba + aa$, et

---

[1]) Ici Huygens intercala la remarque: „Ostende generaliter, si AX [Fig. 87] sit brachium cunei, quadrata distantiarum ab ED aequari rectangulo AGX una cum quadrato EG, multiplicibus per numerum particularum".

Il s'agit ici du „cuneus" à base ABC limité par un plan sécant oblique passant par la tangente, parallèle à ED, au point A de la figure ABC. On trouve cette démonstration générale (la droite DE pouvant être extérieure à la figure) à la p. 107 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" (Prop. IX de la Pars Quarta), où le rectangle AGX s'appelle AGH, conformément à la Fig. 88.

[2]) C'est la proposition énoncée dans la note précédente; mais ici Huygens ne considère que le cas où la droite DE coupe la figure.

[3]) Le rectangle HAG correspond au rectangle HEG de la Fig. 87 dans le cas particulier où le point E de la Fig. 87 est situé sur le contour de la figure.

[4]) On lit en marge: „multiplicibus secundum numerum particularum", ce qui s'applique

quadratum OR ∞ $cc - 2ca + aa$, patetque eadem ratione quadrata ſingularum perpendicularium tam quæ ex particulis portionis DCB quam DAB cadunt in rectam ED, æquari quadrato diſtantiæ particulæ cujuſque ab recta AP, una cum quadrato AE, minus duplo rectangulo à dicta diſtantia in ipſam AE. Quare ad colligendam omnium iſtorum quadratorum ſummam, appellemus nn ſummam quadratorum quæ fiunt a diſtantijs ſingularum particularum ab recta AP. Item appellemus m ſummam omnium earundem diſtantiarum; unde dupla omnia rectangula ex diſtantijs ſingulis in rectam AE erunt $2ma$. Denique et numerum particularum in quas diviſa eſt figura ABCD vocemus θ. unde quadratum rectæ AE toties ſumptum quot ſunt in figura particulæ, erit θaa. ac ſumma proinde omnium quadratorum à perpendicularibus in rectam ED, fiet

$$nn + \theta aa - 2ma.$$

Eſt autem nn, hoc eſt, ſumma omnium quadratorum a perpendicularibus in rectam AP, æqualis rectangulo HAG multiplici ſecundum θ ſive numerum particularum uti parte prima hujus propoſitionis demonſtratum fuit [3]). θaa vero apparet eſſe quadratum AE multiplex item ſecundum dictum particularum numerum. ac denique $2ma$ æquari dico duplo rectangulo ex GA, AE, multiplici ſecundum eundem particularum numerum, cum a ſit ∞ AE; m vero, ſive ſumma omnium perpendicularium a particulis figuræ ABC in rectam AP deſcendentium, æqualis ſit perpend. GA a centro gravitatis figuræ deſcendenti multiplici ſecundum numerum perpendicularium ſeu particularum a quibus eductæ ſunt. Conſtat itaque $nn + \theta aa - 2ma$, ſive ſummam omnium quadratorum à perpendicularibus in rectam ED, æquari iſtis quæ dicemus multiplicibus ſecundum numerum particularum, rectangulo nimirum HAG una cum quadrato AE, minus duplo rectangulo GAE, quæ æqualia eſſe probantur rectangulo AGH una cum quadrato EG. Nam ſi AH vocetur h: AG vero g: Et AE, ut ante, ſit a. Erit quidem rectangulum HAG, una cum quadrato AE, minus duplo rectangulo GAE, æquale $hg + aa - 2ga$. At rectangulum AGH erit $hg - gg$; et quadratum EG, $gg - 2ag + aa$, quæ ſimul addita efficiunt quoque $hg + aa - 2ag$. Itaque apparet et dictam ſummam omnium quadratorum æquari rectangulo AGH, unà cum quadrato EG [4]). quod erat demonſtrandum [5]).

Iiſdem poſitis ſi recta DE [Fig. 89] tranſit per G centrum gravitatis figuræ ABC, manifeſtum eſt dictam quadratorum ſummam [6]) æqualem fore ſoli □° AGH [4]),

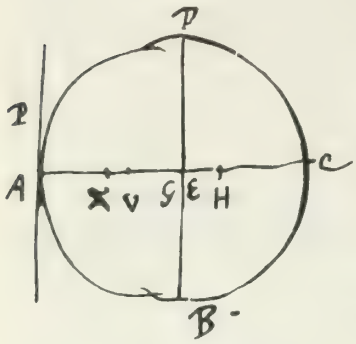
sans doute tant au rectangle AGH augmenté du carré EG qu'au rectangle AGH seul (dernière ligne de cette page).

[5]) Huygens intercala les mots: „hic incipit prop. nova". Voir l'alinéa qui suit et qui correspond à la Prop. X de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium".

[6]) On lit entre les lignes: „sit rursus nova prop." Comparez la note précédente.

cum EG nulla ſit. Atque hinc porro ſequitur [1]), ſi DE ſit axis figuræ ABC [Fig. 89] in duo ſegmenta æqualia ipſam dividens, AP vero ipſi parallela extra figuram. Et ſit uti prius AG brachium figuræ totius ſuper AP: AH vero brachium cunei vel trunci abſciſſi ſuper figura tota plano per AP. Figuræ autem dimidiæ DAE brachium ſuper DE ſit VG, et XG brachium cunei ſuper eadem dimidia figura abſciſſi plano per DE. his poſitis ſequitur inquam rectangulum AGH æquale eſſe rectangulo XGV.

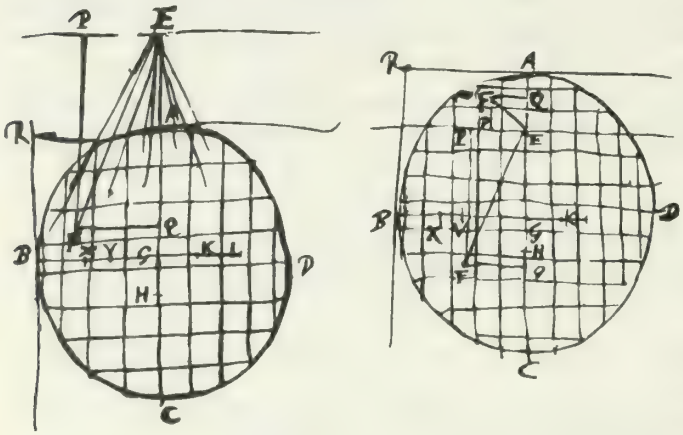
[Fig. 89.]



Eſt enim rectangulum XGV multiplex ſecundum numerum particularum figuræ dimidiæ DAE, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem dimidiæ figuræ in rectam DE cadentium. Ac proinde idem rectangulum XGV multiplex ſecundum numerum particularum figuræ totius ABCD, æquale erit quadratis perpendicularium a particulis totius figuræ utrinque in rectam DE eductarum, hoc eſt, per ante oſtenſa [1]), rectangulo AGH ſecundum eundem omnium figuræ particularum numerum multiplici. unde patet rectangula ipſa VGX, AGH æqualia eſſe [2]).

Data figura plana, et in eodem plano puncto, intra vel extra, diviſaque figura in particulas æquales minimas, a quibus ſingulis ad dictum punctum rectæ ducantur. invenire ſummam omnium quæ ab ipſis fiunt quadratorum. ſive invenire planum cujus multiplex ſecundum iſtarum particularum numerum æquetur dictæ quadratorum ſummæ.

[Fig. 90.]



Sit figura plana ABCD [Fig. 90] et in eodem plano punctum E, diviſaque figura in particulas minimas æquales intelligantur a ſingulis rectæ ad punctum E ductæ, ſicut a particula F ducta FE. Oportet invenire ſummam quadratorum ab omnibus hiſce rectis.

Secetur figura in partes duas, ductâ rectâ quæ per datum punctum E perque centrum gravitatis figuræ G tranſeat. Alteraque item per punctum E recta ducatur EP quæ ſecet EG ad

angulos rectos. Sit autem data AH ſubcentrica cunei, ſuper figura abſciſſi plano per AR tangentem figuram ac parallelam rectæ EP. Item BK ſubcentrica cunei ſuper figura abſciſſi plano per BR, tangentem figuram extrinſecus ac parallelam EG. Dico ſummam quadratorum à rectis quæ ducuntur ad punctum E ex omnibus figuræ particulis æquari rectangulis BGK, AGH una cum quadrato EG multiplicibus ſecundum numerum particularum in quas ſecta eſt figura.

Ductis enim ab F perpendicularibus FP, FQ in rectas EP, EG. manifeſtum eſt quadratum FE æquari quadratis FP, PE vel FP, FQ. Eademque ratione quadrata ſingula diſtantiarum cujuſque particulæ à puncto E, æquari quadratis binis diſtantiarum ejuſdem particulæ ab rectis EP, EG. Quamobrem quadrata omnium diſtantiarum a puncto E, æqualia erunt ſummæ quadratorum perpendicularium ab omnibus figuræ particulis in rectam EP ductarum, una cum ſumma omnium quæ fiunt a perpendicularibus in rectam EG ductis. Eſt autem ſumma horum per præced. æqualis rectangulo BGK multiplici ſecundum numerum particularum, ſumma vero iſtorum æqualis rectangulo AGH una cum quadrato EG, ſimiliter multiplicibus [3]). Itaque quadrata omnia diſtantiarum a puncto E æqualia eſſe liquet rectangulis BGK, AGH cum quadrato EG, multiplicibus ſecundum quadratorum vel particularum numerum. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi autem recta EC ſit axis figuræ ABCD, in duo æqualia ac ſimilia ſegmenta eam dividens, deturque GV brachium figuræ dimidiæ ſuper recta EG, itemque GX brachium cunei ſuper figura eadem dimidia abſciſſi plano per EG, poteſt loco rectanguli BGK ſumi rectangulum XGV; quemadmodum prop. . . . [4]) oſtenſum eſt.

---

[1]) Voir la dernière ligne de la p. 515.

[2]) Huygens intercala les mots: „sit rursus prop. nova". C'est la Prop. XI de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium".

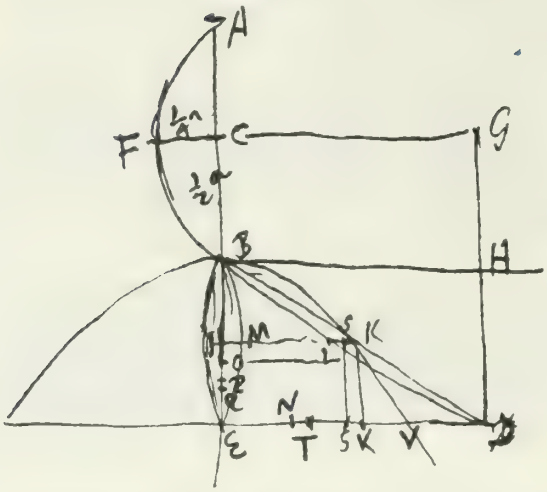
[3]) Voir les deux derniers alinéas de la p. 547.

[4]) Voir la note 2.

XIX [1]).

[1665] [2]).

[Fig. 91] [3]).



AB ∞ a [Fig. 91]

BE ∞ b

EV ∞ c

$\frac{1}{4}\frac{bb}{a}$ ∞ HM [4])

---

[1]) La Pièce est empruntée aux p. 50 et 51 du Manuscrit C.

[2]) La p. 38 du Manuscrit porte la date du 16 mars 1665 et la p. 65 est datée: juillet 1665.

[3]) Huygens se propose de calculer la longueur du pendule isochrone avec un segment d'un hyperboloïde de révolution suspendu en son sommet.

[4]) Il y a deux lettres H dans la figure, ce qui cependant ne peut guère donner lieu à des confusions. Remarquons en même temps que les projections des points S et K sur la droite ED sont désignées par Huygens par les mêmes lettres.

HM est le diamètre de la parabole BME. Cette parabole a été trouvée comme suit. Pour calculer la longueur du pendule isochrone d'après la formule $x = \frac{\Sigma y^2 + \Sigma z^2}{n(b)}$ (comparez p. e. la note 7 de la p. 485), où (b) représente la distance de B au centre de gravité du corps considéré, y la distance d'un point pesant quelconque de ce corps à un plan horizontal passant par la droite BH (perpendiculairement au plan du papier), et z la distance de ce point à un plan passant par l'axe AE perpendiculairement au plan du papier, Huygens cherche d'abord $\frac{\Sigma y^2}{n(b)}$, ce qui représente la longueur du pendule isochrone avec une surface plane oscillant perpendiculairement à son plan et contenant tous les points pesants de l'hyperboloïde à leurs vraies distances du plan horizontal nommé. $\frac{\Sigma y^2}{n(b)}$ représente donc aussi (voir la p. 458 ou le dernier alinéa de la p. 503) la distance du point de suspension B à un plan horizontal passant par le centre de gravité d'un onglet élevé sur cette surface et limité par un plan oblique passant par la droite horizontale BH. Cette surface plane est la figure EHBLDE, où EHB est une droite et BLD (partie de la courbe AFBLD) une parabole (comparez sur cette substitution d'une

$BO \infty \frac{3}{5} b$	BO brachium cunei BMEH [5]).	
$BP \infty \frac{3}{4} b$	BP brachium cunei BKDE [5]).	
$\frac{3}{4} - \frac{3}{5}$	$\frac{3}{20}$ [6])	
$\frac{1}{2} a + b$	CE vel GD	
$\frac{\frac{1}{4} aa + ab + bb}{a}$	FG [7])	s. [8])
$\frac{1}{4} a$	FC [7])	

figure plane à un corps le dernier alinéa de la p. 471 ou la note 2 de la p. 473); le facteur arbitraire qui entre dans la longueur des ordonnées parallèles à l'horizontale BH a été choisi de telle manière que la parabole passe non seulement par le point B, mais aussi par le point A, AB ou a étant la distance des sommets ou „latus transversum" de l'hyperbole BKV.

Mais cette surface plane peut être transformée en une autre possédant les mêmes ordonnées parallèles à l'horizontale BH, savoir la surface limitée par les droites BKD et DE et la parabole EMB, où il faut donner à l'axe HM de cette dernière la valeur indiquée dans le texte. L'expression $\frac{\Sigma y^2}{n(b)}$ est donc égale à la distance du point B au plan horizontal passant par le centre de gravité d'un onglet élevé sur la surface BKDEMB et limité par un plan oblique passant par l'horizontale BH.

Il est évident qu'on pourrait tout aussi bien prendre une surface plane de forme symétrique, obtenue en ajoutant à la figure considérée une figure pareille à gauche de BE (comparez la Fig. 3 de la Tab. XXVI de l'„Horologium oscillatorium"; cette figure correspond à la Prop. XXII de la Pars Quarta, mentionnée dans la note de la p. 555).

5) L'onglet considéré (voir le troisième alinéa de la note précédente) est la différence des onglets BKDEHB (ou BKDE) et BMEHB (ou BMEH), limité l'un et l'autre par un plan oblique passant par la droite horizontale BH. Le premier (BKDE) est une pyramide scalène à base perpendiculaire au plan du papier; il est donc facile de voir que son bras de levier par rapport au point B a la valeur $\frac{3}{4} b$. Quant au bras de levier correspondant à l'onglet BMEH, la valeur $\frac{3}{5} b$ ou $\left(\frac{1}{2} b + \frac{1}{5} \cdot \frac{b}{2}\right)$ s'accorde avec la valeur de la „λ cunei" de la Pièce XI (voir le huitième alinéa de la p. 472).

6) La différence $\frac{3}{20} b$ des deux bras de levier BO et BP est la distance OP.

7) La parabole BLD ayant été choisie de telle manière qu'elle passe par le point A aussi bien que par le point B (comme nous l'avons dit dans la note 4), FG et FC doivent avoir les valeurs indiquées dans le texte.

8) s. = subtrahendo. Voir le résultat de la soustraction à la page suivante.

$b + \frac{bb}{a}$ ED ∞ CG $\frac{1}{4}\frac{bb}{a}$ HM [2])

$\frac{1}{2}b$ $\frac{2}{3}b$

$\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a}$ △BED $\frac{1}{6}\frac{b^3}{a}$ parab. BME

$\frac{2}{3}b$ $\frac{1}{2}b$ BH [3])

$\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{3}\frac{b^4}{a}$ [1]) $\frac{1}{12}\frac{b^4}{a}$ [4])

$4a + 4b$ — b

cuneus EED [5]) ad cuneum BMEH [6])

OP

$4a + 3b$ — b — $\frac{3}{20}b$ [7])

$\frac{\frac{3}{20}bb}{4a + 3b}$ PQ [8])

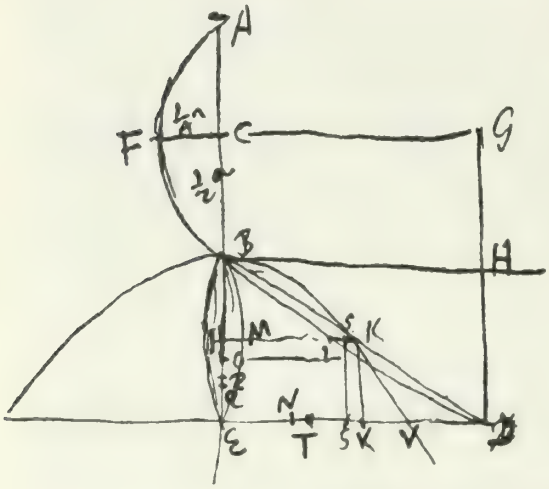
$\frac{3}{4}b$ BQ

a. [9])

$\frac{\frac{12}{5}bb + 3ab}{4a + 3b}$ BQ brachium cunei BEDLB [10]).

$\frac{\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a} - \frac{1}{6}\frac{b^3}{a}}{3a + 3b - b}$ [11])

[Fig. 91.]



$3a + 2b$ — b — $\frac{1}{6}b$

$\frac{\frac{1}{6}bb}{3a + 2b}$ [12])

$\frac{2}{3}b$

$\frac{\frac{3}{2}bb + 2ab}{3a + 2b}$ brachium figuræ BKDEMB super B [12])

HM ∞ $\frac{1}{4}\frac{bb}{a}$

$\frac{2}{5}$

KS $\frac{1}{10}\frac{bb}{a}$ [13])

$$\frac{\text{ex KT} \quad \frac{1}{6}b + \frac{1}{6}\frac{bb}{a}}{\text{ST} \quad \frac{1}{15}\frac{bb}{a} + \frac{1}{6}b}$$ [14])

[1]) C'est le moment du triangle BED par rapport au point B.

[2]) Voir la note 4 de la p. 550.

[3]) Comparez le premier alinéa de la note 4 de la p. 550. Il s'agit ici du point inférieur H.

[4]) C'est le moment du segment de parabole BMEHB par rapport au point B.

[5]) Lisez BED.

[6]) Les volumes des onglets nommés sont dans le rapport des moments de leurs bases (qui sont le triangle BED et le segment parabolique BMEHB) par rapport à l'horizontale BH, d'après la proposition de la p. 501; ce rapport a ici la valeur $(4a + 4b) : b$.

[7]) Voir la note 6 de la p. 551.

[8]) L'équation $4a + 3b : b = \text{OP} : \text{PQ}$ ou $(4a + 3b)\,\text{PQ} = \frac{3}{20}b^2$ exprime que les moments des onglets à base EMBKDE et à base BMEB par rapport à une droite horizontale passant par le point P (voir la note 6 de la p. 551) sont égaux, vu que le moment de l'onglet à base triangulaire BED par rapport à cette droite est nul.

[9]) a. = addendo.

[10]) Il ressort de ce que nous avons dit dans le troisième alinéa de la note 4 de la p. 550 que le bras de levier de l'onglet BHEDLB (ou BEDLB) par rapport à l'horizontale BH est identique avec le bras de levier de l'onglet à base EMBKDE par rapport à la même droite. Ce bras de levier est égal à $\frac{\Sigma y^2}{n(b)}$ d'après le deuxième alinéa de la même note 4. Les calculs qui suivent servent à déterminer $\frac{\Sigma z^2}{n(b)}$. Voir la note 4 de la p. 554.

[11]) C'est le rapport de la surface du triangle BED au segment parabolique BMEHB.

[12]) L'équation $3a + 2b : b = \frac{1}{6}b : \beta$, d'où l'on tire la valeur de β, exprime l'égalité des moments des surfaces EMBKDE et BMEHB par rapport à une horizontale passant par le centre de gravité du triangle BED. En ajoutant $\frac{2}{3}b$ à β, on trouve la distance du point B à l'horizontale passant par le centre de gravité de la surface EMBKDE. C'est la longueur (voir la note 4 de la p. 550) que nous avons désignée par (b).

[13]) Les surfaces des segments paraboliques BMEB et BKDLB étant égales (voir le troisième alinéa de la note 4 de la p. 550), leurs diamètres sont aussi égaux (voir la note 4 de la p. 466). En prenant $\text{KS} = \frac{2}{5}$ (diamètre), on trouve le centre de gravité S du segment parabolique BKDLB. La projection KS a la même longueur. On a évidemment $\text{EK} = \frac{1}{2}\,\text{ED}$.

[14]) Le point T est la projection sur ED du centre de gravité du triangle BED. On a donc $\text{ET} = \frac{1}{3}\,\text{ED}$ et $\text{KT} = \frac{1}{6}\,\text{ED}$; or, ED est connue (voir la première ligne de la p. 552).

$$3a + 2b \;\text{—}\!\!\!\!\text{—}\; b \;\text{—}\!\!\!\!\text{—}\; \mathrm{ST}\,[\text{—}\!\!\!\!\text{—}\; \mathrm{TN}]\ ^{1)}$$

$$\frac{\frac{1}{15}\frac{b^3}{a} + \frac{1}{6}bb}{3a + 2b}\,\mathrm{TN}$$

$$\text{s.}\ ^{2)}\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{TE} \infty \frac{1}{3}\,\mathrm{ED} \infty & \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}\frac{bb}{a} \\ \mathrm{TN} & \dfrac{\frac{1}{15}\frac{b^3}{a} + \frac{1}{6}bb}{3a + 2b} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{EN} \qquad \frac{ab + \frac{3}{2}bb + \frac{3}{5}\frac{b^3}{a}}{3a + 2b}\ ^{3)}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{ED} \qquad \mathrm{EN}$$

$$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\frac{bb}{a} \;\text{—}\!\!\!\!\text{—}\; \frac{ab + \frac{3}{2}bb + \frac{3}{5}\frac{b^3}{a}}{3a + 2b} \;\text{—}\!\!\!\!\text{—}\; \frac{1}{4}cc \;\Bigg|\; \frac{\frac{1}{4}cca + \frac{3}{8}bcc + \frac{3}{20}\frac{bbcc}{a}}{\frac{3}{2}a + \frac{5}{2}b + \frac{b^2}{a}}\ ^{4)}$$

$$\frac{\frac{31}{40}cc}{5}$$

---

[1]) N est la projection sur ED du centre de gravité de la surface BHEDLB. $3a + 2b : b$ est le rapport des surfaces BHEDLB et BKDLB. L'équation $3a + 2b : b = \mathrm{ST} : \mathrm{TN}$, qui sert à calculer TN, exprime l'égalité des moments des surfaces BHEDLB et BKDLB par rapport à une droite verticale (située dans le plan du papier) passant par le point T (voir la note précédente).

[2]) s. = subtrahendo.

[3]) C'est la distance du centre de gravité de la surface BHEDLB à l'axe BE.

[4]) La proportion $\frac{1}{2}\,\mathrm{ED} : \mathrm{EN} = \frac{1}{4}c^2 : Z$, d'où l'on tire la valeur de Z, qui est identique avec $\frac{\Sigma z^2}{n}$ (voir la note 4 de la p. 550), correspond à la proportion $\mathrm{P\Delta} : \mathrm{P\Phi} = \square\,\mathrm{BCK} : Z$, qu'on trouve dans la Prop. XV de la Pars Quarta de l'„Horologium Oscillatorium". Cette méthode se rattache à celle de la p. 482 (voir à la p. 483 les sept dernières lignes de la note 4 et aussi la note 2 de la p. 485 et la p. 372 de l'Avertissement). Pour trouver $\frac{\Sigma z^2}{n(b)}$ il faut diviser Z par (b), c. à. d. par le „brachium figuræ BKDEMB super B" (voir la note 12 de la p. 553).

Huygens pose $a = b$; le „brachium" en question a alors la valeur $\frac{7}{10}b$, et Z la valeur $\frac{31}{200}c^2$. On trouve donc $\frac{\Sigma z^2}{n(b)} = \frac{31}{140}\frac{c^2}{b}$.

Comme $\frac{\Sigma v^2}{n(b)}$, en d'autres termes, comme le „brachium cunei BEDLB" (voir la note 10 de la

$$\frac{\frac{31\,cc}{200}}{\frac{7}{10}\,b}$$

$\frac{27}{35}\,b + \frac{31}{140}\,\frac{cc}{b}$ [4]) pendulum iſochronon conoidi hyperbolico cum latus rectum [5]) $a \infty$ axi b et ſuſpenſio ex vertice.

---

p. 553) acquiert pour $a = b$ la valeur $\frac{27}{35}\,b$, la longueur cherchée du pendule isochrone avec l'hyperboloïde de révolution $l = \frac{\Sigma r^2}{n(b)}$ ou $l = \frac{\Sigma y^2}{n(b)} + \frac{\Sigma z^2}{n(b)}$ est, pour $a = b$, égale à la somme de $\frac{27}{35}\,b$ et de $\frac{31}{140}\,\frac{c^2}{b}$.

Comparez l'„Horologium oscillatorium", où l'on trouve la même valeur de l, calculée à peu près de la même manière (Prop. XXII de la Pars Quarta, au § „Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici"). Seulement la parabole BLD y a été choisie de telle manière qu'elle ne passe pas par le point A, mais par le point V (qui coïncide donc avec le point D), et il n'y est pas fait mention de la parabole BME, qui d'ailleurs n'est pas indispensable.

Si l'on ne pose pas $a = b$, on trouve d'après les formules de Huygens

$$l = \frac{3(5a+4b)}{5(4a+3b)}\,b + \frac{10a^2+15ab+6b^2}{10(a+b)(4a+3b)}\cdot\frac{c^2}{b}.$$

Dans le sommaire de sa lettre à P. Petit du 30 oct. 1664 (T. V, p. 129) Huygens parle déjà du conoïde hyperbolique („Des pendules Isochrones... Sphere, conoide hyperbolique. Methode générale"). Comparez la note 1 de la p. 482. Mais comme le présent calcul date de 1665 (comparez la note 2 de la p. 550), il est probable que le calcul primitif, qui nous manque, n'était pas entièrement le même.

[5]) Lisez „latus transversum", comme Huygens appelle correctement la longueur a dans la Proposition de l'„Horologium oscillatorium" citée dans le quatrième alinéa de la note précédente.

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

Page.

DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE. 1703. [SUR LE MOUVEMENT DES CORPS PAR PERCUSSION.] ..... 1—91

Avertissement ..... 3—27

Titre 29

Hypothèſes I—III ..... 30—33

Propoſ. I. Lorſqu'un corps en repos eſt rencontré par un autre, qui lui eſt égal, après le contact ce dernier entrera bien en repos, mais celui qui était en repos acquerra la même viteſſe qui était dans le corps pouſſant ..... 32—37

Propoſ. II. Lorſque deux corps égaux ſe pouſſent avec des viteſſes inégales, ils ſe mouvront après le contact avec des viteſſes réciproquement échangées ..... 36—39

Hypothèſe IV ..... 38—39

Propoſ. III. Un corps quelque grand qu'il ſoit, pouſſé par un corps quelconque quelque petit qu'il ſoit et d'une viteſſe quelconque, eſt mis en mouvement .... 38—41

Hypothèſe V ..... 40—41

Propoſ. IV. Toutes les fois que deux corps entrent en colliſion, la viteſſe relative de l'éloignement eſt la même que fut celle du rapprochement ..... 42—45

Propoſ. V. Si deux corps retournent de nouveau à la rencontre, chacun avec la viteſſe dont il a rejailli après le choc, ils acquerront après le ſecond choc la même viteſſe qu'ils avaient avant le premier ..... 46—49

Propoſ. VI. Dans deux corps qui ſe rencontrent la quantité de mouvement, priſe pour les deux enſemble, ne ſe conſerve pas toujours la même après le choc qu'elle était auparavant, mais peut être augmentée ou diminuée ..... 48—51

Propoſ. VII. Lorſqu'un corps plus grand rencontre un corps plus petit en repos, il lui donne une viteſſe moindre que le double de la ſienne ..... 50—51

Préparation de la démonſtration de la Propoſ. VIII ..... 52—53

Page.

Propoſ. VIII. Lorſque deux corps, dont les viteſſes ſont inverſement proportionnelles à leurs grandeurs, ſe rencontrent de côtés oppoſés, chacun d'eux rejaillira avec la même viteſſe avec laquelle il ſ'eſt approché ..... 52—65

Propoſ. IX. Étant donnés deux corps inégaux ſe rencontrant directement, dont tous les deux, ou ſeulement un des deux ſoit en mouvement; étant donnée auſſi la viteſſe de chacun, ou celle d'un ſeul, lorſque l'autre eſt en repos, trouver les viteſſes avec leſquelles ils ſe meuvent après le choc ..... 64—71

Propoſ. X. La viteſſe qu'un corps plus grand donne à un corps plus petit en repos, ſe rapporte à celle que le corps plus petit avec la même viteſſe imprime au plus grand en repos comme la grandeur du plus grand à celle du plus petit ..... 70—71

Propoſ. XI. Dans le cas de deux corps qui ſe rencontrent, ce que l'on obtient en prenant la ſomme de leurs grandeurs multipliées par les carrés de leurs viteſſes ſera trouvé égal avant et après la rencontre: ſavoir lorſque les rapports des grandeurs et des viteſſes ſont données en nombres ou en lignes ..... 72—77

Lemme I. Soit la droite AB diviſée en C et D de ſorte que le ſegment AC eſt moindre que CD et CD moindre que BD; je dis que le rectangle ſur AD et CB eſt moindre que le double de la ſomme des deux rectangles ACD et CDB..... 76—79

Lemme II. Soient AB, AC, AD trois droites proportionnelles, dont AB eſt la plus grande et ajoutons à chacune d'elles la même longueur AE. Je dis que le rectangle ſur BE et DE eſt plus grand que le carré CE ..... 78—81

Propoſ. XII. Si quelque corps ſe meut vers un plus grand ou un plus petit qui eſt en repos, il lui donnera une plus grande viteſſe par le moyen d'un corps interposé de grandeur intermédiaire, de même en repos, que ſ'il ſe heurte contre lui ſans aucun intermédiaire. Et dans ce cas il lui communiquera une viteſſe maximum lorsque le corps interposé eſt moyen proportionnel entre les deux extrêmes .... 80—87

Propoſ. XIII. À meſure qu'un plus grand nombre de corps ſont interpoſés entre deux corps inégaux, dont l'un ſoit en repos, et l'autre en mouvement, un plus grand mouvement pourra être communiqué au corps en repos. Mais le plus grand mouvement ſera transmis par un même nombre de corps interpoſés lorſque ces corps conſtituent avec les deux extrêmes une ſuite continue de grandeurs proportionnelles ..... 86—91

Appendice I. Premières recherches de Huygens ſur les lois de la percuſſion, empruntées à des feuilles détachées portant une pagination apportée plus tard par lui [1652—1654.] ..... 92—136

Première partie. [1652.] ..... 92—94

Deuxième partie. [1652.] ..... 94—97

Troiſième partie. [1652.] ..... 98—99

Quatrième partie. [1654.] ..... 99—104

Cinquième partie. [1654.] ..... 104—107

Sixième partie. [1654.] ..... 108—113

Page.

Septième partie. [1654.] ..... 114—118

Huitième partie. [1654.] Démonſtration de deux théorèmes concernant le mouvement relatif de deux corps ſe mouvant avec une viteſſe uniforme ſur une même ligne droite ..... 118—120

Neuvième partie. [1654.] Démonſtration de deux théorèmes identiques avec les Prop. I et II formulées plus haut ..... 121—125

Dixième partie. [1654.] Démonſtration de deux théorèmes dont l'un repréſente un cas particulier de la Prop. IV et dont l'autre eſt identique avec la Prop. III formulée plus haut ..... 125—132

Onzième partie. [1654.] Solution de quelques problèmes ſur la percuſſion des corps 132—136

Appendice II. Rédaction primitive probablement de 1656 du Traité „Sur le mouvement des corps par percuſſion" avec esquiſſe d'une préface, tous les deux empruntés à des feuilles détachées, paginées par Huygens ..... 137—149

Première partie. [1656.] Esquiſſe d'une préface au Traité ..... 137—143

Deuxième partie. [1656.] Rédaction primitive du Traité ..... 143—149

Appendice III. Pièces et annotations qui ſe rattachent au Traité „De motu" .... 150—168

I. [1656.] Addition à la rédaction primitive de 1656 du Traité ..... 150—151

II. [1656.] Conſtruction géométrique de la ſolution du problème le plus général du choc direct des corps durs ..... 151—152

III. [1656.] Calculs ſur le cas où des corps en repos ſe trouvent entre un corps en mouvement et un corps en repos ..... 153—155

IV. [1659.] Remarque concernant les règles de Descartes ſur la percuſſion .. 156

V. [1667?] Même ſujet que III ..... 156—158

VI. [1667?] Machine pour faire des expériences ſur le choc 158

VII. [1667?] Conſidérations ſur la nature du choc ..... 159—160

VIII. [1667?] Même ſujet ..... 160—161

IX. [1667?] Sur le choc des corps mous ..... 161—164

X. [1667?] Sur le choc des corps ſemi-durs ..... 164—168

XI. [1667?] Remarque ſur la nature des corps durs et leur reſſort 168

XII. [1675?] Même ſujet 168

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. HUGENS À L'AUTEUR DU JOURNAL SUR LES REGLES DU MOUVEMENT DANS LA RENCONTRE DES CORPS. 1669 ..... 169—181

AVERTISSEMENT ..... 171—178

Règles du mouvement dans la rencontre des corps ..... 179—181

Appendice. Annotations de Huygens qui lui ont ſervi dans les discuſſions du 4, 11 et 18 Janvier 1668 dans l'Académie des ſciences. [1668] ..... 182—186

MANUSCRITS ULTÉRIEURS CONCERNANT L'HISTORIQUE DE LA THÉORIE DU CHOC DES CORPS ET LA QUESTION DE L'EXISTENCE ET DE LA PERCEPTIBILITÉ DU „MOUVEMENT ABSOLU" ..... 187—233

Page.

AVERTISSEMENT ..... 189—200

PREMIÈRE PARTIE. [1690?] Projet inachevé d'une préface pour un traité ſur le choc des corps et la force centrifuge ..... 201—208

Appendice. De motu ex colliſione vel occurſu corporum. [Sur le mouvement par la colliſion ou la rencontre des corps]. [1689?] ..... 209—212

DEUXIÈME PARTIE. [?] Pièces et fragments concernant la queſtion de l'exiſtence et de la perceptibilité du „mouvement abſolu" ..... 213—233

DE VI CENTRIFUGA. [SUR LA FORCE CENTRIFUGE]. ..... 235—301

AVERTISSEMENT ..... 237—251

TITRE 253

Introduction. Conſidérations générales ..... 254—267

Propoſ. I. Lorſque deux mobiles égaux parcourent en des temps égaux des circonférences inégales, la force centrifuge correſpondant à la plus grande circonférence ſera à celle de la plus petite circonférence dans un rapport égal à celui des circonférences elles-mêmes ou de leurs diamètres ..... 266—269

Propoſ. II. Lorſque des mobiles égaux tournent dans les mêmes ou d'égales circonférences ou roues avec des viteſſes différentes mais l'un et l'autre d'un mouvement uniforme, la force centrifuge du plus rapide ſera à celle du plus lent dans un rapport égal à celui des carrés des viteſſes. C'est-à-dire ſi les fils par leſquels les mobiles ſont retenus paſſent de haut en bas par le centre de la roue et qu'ils portent des poids par leſquels la force centrifuge des mobiles eſt tenue en échec et exactement équilibrée, ces poids ſeront entre eux comme les carrés des viteſſes. 268—271

Propoſ. III. Lorſque deux mobiles égaux ſe meuvent avec la même viteſſe ſuivant des circonférences inégales, leurs forces centrifuges ſeront inverſement proportionnelles aux diamètres, de ſorte que dans le cas de la plus petite circonférence la force nommée eſt la plus grande ..... 270—273

Propoſ. IV. Lorſque deux mobiles égaux, décrivant des circonférences inégales, ont une force centrifuge égale, le temps de révolution dans la plus grande circonférence ſera au temps de révolution dans la plus petite dans un rapport égal à la racine carrée du rapport des diamètres ..... 272—275

Propoſ. V. Lorſqu'un mobile décrit une circonférence de cercle avec la viteſſe qu'il acquiert en tombant d'une hauteur égale à la quatrième partie du diamètre, il aura une tendance à s'éloigner du centre égale à ſa gravité, c'eſt-à-dire il tirera le fil par lequel il eſt retenu avec la même force que lorſqu'il y eſt ſuſpendu .... 274—277

Propoſ. VI. Étant donnée la diſtance qu'un mobile parcourt en un certain temps, par exemple en une ſeconde, en tombant verticalement en partant du repos; trouver un cercle tel que ſi le mobile parcourt ſa circonférence horizontalement en accompliſſant ſa révolution également en une ſeconde, il ait une force centrifuge égale à ſa gravité ..... 276—280

Lemme I. Lorſqu'un poids C eſt maintenu ſur un plan incliné AB [Fig. 13, p. 281]

Page.

par un poids D librement ſuſpendu, et que la corde CE eſt parallèle à l'horizon, la gravité D ſera à la gravité C comme la perpendiculaire BF eſt à la baſe FA. Ceci eſt évident d'apres la Mécanique. Par conſéquent, lorſque la droite BF eſt priſe égale à FA, la gravité D devra être égale à C ..... 280—281

Lemme II. Lorſque des poids égaux ſont maintenus ſur des plans diverſement inclinés par des lignes parallèles à l'horizon, les puiſſances équilibrantes ſeront entre elles comme les tangentes des angles ſuivant leſquels les plans ſont inclinés par rapport au plan de l'horizon ..... 280—281

Propoſ. VII. Sur la ſurface courbe d'un conoïde parabolique à axe vertical, toutes les révolutions d'un mobile parcourant des circonférences parallèles à l'horizon, qu'elles ſoient grandes ou petites, ſeront accomplies dans des périodes égales; chacune d'elles étant égale au temps de deux oſcillations d'un pendule dont la longueur eſt la moitié du latus rectum de la parabole engendrante ..... 280—285

Propoſ. VIII. Lorſque deux mobiles ſuſpendus à des fils inégaux ſont mis en rotation de telle manière qu'ils parcourent des circonférences horizontales, l'autre bout du fil demeurant immobile, et que les axes ou hauteurs des cônes dont les fils décrivent la ſurface par ce mouvement ſont égaux, les périodes pendant leſquelles chaque mobile parcourt ſa circonférence ſeront auſſi égales ..... 284—287

Propoſ. IX. Les périodes de révolution ſuivant des circonférences horizontales CD et BE [Fig. 17, p. 287], l'angle de giration étant le même, ſont dans un rapport égal à la racine carrée de celui des longueurs des fils AC et AB ..... 286—287

Propoſ. X. Lorſque deux mobiles quelconques ſuſpendus à des fils décrivent en tournant des circonférences horizontales, les périodes de révolution ſeront entre elles comme les racines carrées des hauteurs des cônes dont les ſurfaces ſont parcourues par les fils ..... 286—289

Propoſ. XI. Lorſqu'un mobile ſuſpendu à un fil décrit par ſon mouvement, tandis que l'extrémité ſupérieure du fil demeure en repos, des circonférences horizontales inégales, les périodes correſpondant à ces circonférences ſeront dans un rapport égal à la racine carrée de celui des ſinus des angles ſuivant leſquels le fil eſt incliné par rapport à un plan horizontal ..... 288—289

Propoſ. XII. Lorſqu'un pendule animé d'un mouvement conique décrit de très petites circonférences, les périodes correſpondant à chacune d'elles ſeront au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale au double de la longueur du pendule dans un rapport égal à celui d'une circonférence de cercle à ſon diamètre, partant égales au temps de deux oſcillations latérales très petites de ce même pendule ..... 288—291

Propoſ. XIII. Lorſqu'un mobile parcourt une circonférence et accomplit chaque révolution dans le même temps dans lequel un pendule ayant pour longueur le rayon de cette circonférence pourrait parcourir d'un mouvement conique une très petite circonférence ou exécuter deux oſcillations latérales très petites, il

Page.

aura une force centrifuge égale à ſa gravité ..... 290—293

Propoſ. XIV. Les périodes de révolution d'un pendule quelconque animé d'un mouvement conique ſeront égales au temps d'une chute verticale d'une hauteur égale au fil du pendule, lorſque l'angle d'inclinaiſon du fil par rapport à un plan horizontal ſera de 2° 54′ environ. En termes précis: lorſque le ſinus dudit angle ſera au rayon comme un carré inſcrit dans une circonférence eſt au carré de la même circonférence ..... 292—295

Propoſ. XV. Lorſque deux pendules égaux en poids, mais de longueur de fil différente, ſont animés d'un mouvement conique et que les hauteurs des cônes ſont égales, les forces avec leſquelles ils tendront leurs fils ſeront entre elles dans un rapport égal à celui des longueurs des fils ..... 294—295

Propoſ. XVI. Lorsqu'un pendule simple eſt animé de la plus grande oſcillation latérale poſſible, c'eſt-à-dire lorſqu'il deſcend ſuivant un quart de circonférence, il tendra ſon fil, loſqu'il aura atteint le point le plus bas de la circonférence, avec une force trois fois plus grande que ſ'il y était simplement ſuſpendu ..... 294—299

Propoſ. XVII. Un globe attaché par un fil au centre d'un cercle vertical ne peut tourner ſuivant la circonférence de ce cercle, que ſi le fil peut ſupporter une tenſion égale à ſix fois le poids ſuſpendu ..... 298—301

Appendice I. Citation d'Horace. Premières recherches ſur la force centrifuge empruntées au manuſcrit mentionné dans la note 1 de la p. 254 [1659] ..... 302—311

Première partie ..... 302—303

Deuxième partie ..... 303—304

Troiſième partie ..... 305—311

Appendice II. Treize théorèmes ſur la force centrifuge, empruntés à un manuſcrit où Huygens avait la coutume d'inſcrire ſes principales découvertes [?] ..... 312—314

Appendice III. Les treize théorèmes publiés en 1673 ſans démonſtrations à la fin de l'„Horologium oſcillatorium" ..... 315—318

Appendice IV. Annotations ſur la durée des oſcillations d'un pendule ordinaire et des rotations d'un pendule conique [1659] 319

Appendice V. Eſquiſſe de la démonſtration d'un des treize théorèmes de l'„Horologium oſcillatorium" [1659] ..... 320—322

Appendice VI. Recherches ſur la force centrifuge cauſée par la rotation de la terre. 323—326

Première partie [1666] ..... 323—324

Deuxième partie [1666] 325

Troiſième partie [?] 326

Appendice VII. Inſtrument pour faire des expériences ſur la force centrifuge ..... 327—328

TRAVAUX DIVERS DE STATIQUE ET DE DYNAMIQUE DE 1659 À 1666 . 329—555

AVERTISSEMENT ..... 331—378

PREMIÈRE PARTIE. Statique ..... 379—383

I. Deux problèmes ſur l'équilibre de différents poids, ſuſpendus à des fils [1659] 379

Page.

II. Autre problème du même genre. [1659] ..... 379—380

III. Sur les moments de rupture d'une poutre horizontale ſupportée en deux endroits. [1662] ..... 381—383

DEUXIÈME PARTIE. Dynamique ..... 384—555

I. Sur la chute de deux ſphères de diamètres différents dans un milieu réſiſtant. [1659] ..... 384—385

II. Premières recherches ſur le centre d'oſcillation ſe bornant au cas d'une barre et d'un ou deux points matériels ſe trouvant dans une même droite paſſant par le point de ſuſpenſion. [1659] ..... 385—391

III. Sur le tautochronisme de la cycloïde. [1659] ..... 392—413

Première partie ..... 392—397

Deuxième partie ..... 398—400

Troiſième partie ..... 401—403

Quatrième partie ..... 404—405

Cinquième partie ..... 405—412

Sixième Partie ..... 412—413

IV. De centro oſcillationis *ſive* Ad invenienda perpendicula ſimplicia iſochrona propoſitis perpendiculis compoſitis [Du centre d'oſcillation *ou* Méthode pour trouver des pendules ſimples iſochrones avec des pendules compoſés linéaires donnés]. [1661] ..... 414—433

V. Même ſujet. [1664] ..... 434—439

VI. Détermination du centre d'oſcillation de figures de genres différents. [1664]. 441—448

Première partie. Demi-circonférence de cercle ſuſpendu en ſon centre. Demi-cercle ſuſpendu de même manière ..... 441—443

Deuxième partie. Barre horizontale ſuſpendue en un point de la perpendiculaire paſſant par ſon centre. Ellipſe particulière et ſes ſegments horizontaux ſuſpendus en un des ſommets de l'ellipſe ..... 444—446

Troiſième partie. Points matériels égaux placés aux extrémités d'une barre horizontale ſuſpendue en un point de la perpendiculaire paſſant par ſon centre. Deux triangles, et deux pyramides, infiniment aigus à ſommet commun placés ſymétriquement par rapport à la verticale paſſant par leur ſommet et ſuſpendus en ce ſommet ..... 447—448

VII. Détermination du centre d'oſcillation de deux barres formant les côtés égaux d'un triangle iſoſcèle, ſuſpendues au point milieu de la baſe du triangle, et de celui du triangle lui-même. [1664] ..... 449—454

Première partie. Cas des barres ..... 449—452

Deuxième partie. Cas du triangle ..... 452—454

VIII. Centre d'oſcillation du cercle ſuſpendu en un point de sa circonférence, de certains de ſes ſegments, de triangles iſcoſcèles et de rectangles ſuſpendus en certains points de leur plan. [1664] ..... 455—456

Page.

IX. Premières recherches ſur les centres d'oſcillation de figures planes oſcillant autour d'un axe ſitué dans leur plan (oſcillation ſolide). [1664]..... 457—460

X. Théorème ſur le lieu géométrique des points de ſuſpenſion d'une figure plane, qui correſpondent à une même longueur du pendule ſimple iſochrone (oſcillation plane). Centre de l'oſcillation plane d'un triangle et d'un rectangle. [1664]..... 461—469

Première partie. Énoncé du théorème 461

Deuxième partie. Cas d'un triangle iſoſcèle ſuſpendu en ſon ſommet et oſcillant autour d'un axe perpendiculaire à ſa ſurface 462

Troiſième partie. Cas analogue d'un rectangle ..... 463—469

XI. Détermination des centres d'oſcillation de quelques figures ſolides et planes [1664]..... 470—486

Première partie. Sphère ſuſpendue en un point extérieur..... 470—472

Deuxième partie. Ellipsoïde de révolution ſuſpendu en un point quelconque ſitué ſur le prolongement de l'axe ..... 473—474

Troiſième partie. Calculs dont les réſultats ont été utiliſés en partie dans la deuxième partie..... 475

Quatrième partie. Ellipſe ſuſpendue en un point ſitué ſur le prolongement de l'un de ſes axes..... 476—478

Cinquième partie. Calculs dont les réſultats ont été utiliſés en partie dans la quatrième partie ..... 478—481

Sixième partie. Cas particulier d'un ellipſoïde de révolution ſuſpendu en ſon ſommet et de ſes ſegments découpés par des plans horizontaux 481

Septième partie. Conditions dans lesquelles on peut trouver le centre d'oſcillation des figures planes et ſolides..... 482

Huitième partie. Segment de paraboloïde de révolution ſuſpendu en ſon ſommet ..... 483—486

XII. Détermination du centre d'oſcillation d'un ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle et oſcillant dans ſon plan. [1664]..... 487—490

Première partie. Calcul du centre d'oſcillation du ſecteur oſcillant perpendiculairement à ſon plan (ce qui conduit au centre d'oſcillation cherché). 487—489

Deuxième partie. Calcul plus bref..... 489—490

XIII. Détermination du centre d'oſcillation de deux triangles infiniment aigus à ſommet commun, ſitués ſymétriquement par rapport à un axe et ſuſpendus en un point de cet axe. Application au demi-cercle et à des ſecteurs de cercle. [1664] ..... 491—494

XIV. Détermination du centre d'oſcillation de la ſurface d'un hexagone régulier ſuſpendu en un point d'un axe de ſymétrie paſſant par deux de ſes ſommets [1664]..... 495—496

XV. Méthode générale pour déterminer le centre d'oſcillation d'une figure plane

Page.

oſcillant autour d'un axe ſitué dans le plan de la figure (oſcillation ſolide). Application à quelques cas ſimples. [1664] . . . . . 498—513

XVI. Méthode générale pour déterminer le centre d'oſcillation d'une figure plane oſcillant dans ſon plan (oſcillation plane). Application à pluſieurs cas ſe rapportant ſucceſſivement à un rectangle, un triangle, un ſecteur de cercle, deux triangles infiniment aigus placés ſymétriquement par rapport à la verticale, une barre horizontale et un cas particulier de l'ellipſe. Relation entre les longueurs des pendules ſimples iſochrones correſpondant à des axes parallèles. [1664] . . . . . 514—541

XVII. Relation entre la ſituation du centre de gravité de certains onglets et celle du même centre d'une de leurs parties. [1664 ou 1665] . . . . . 543—544

XVIII. Détermination de ce qu'on appelle en langage moderne le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à un axe ſitué dans le plan et de même par rapport à un axe perpendiculaire au plan. [1665?] . . . . . 545—549

XIX. Détermination du centre d'oſcillation d'un ſegment d'hyperboloïde de révolution. [1665] . . . . . 550—555

II. PERSONNES ET INSTITUTIONS MENTIONNÉES.

Dans cette liſte on a rangé les noms ſans avoir égard aux particules *de*, *a*, *van* et autres.
Les chiffres gras déſignent les pages où l'on trouve des renſeignements biographiques.

Aa (Pierre van der). 207.
Academia Piſana. 101, 179.
Académie des Sciences. 12, 157, 173, 178, 182, 185, 196, 205, 207, 208, 209.
Adam (Paul). 3, 5, 38, 49, 101, 103, 105, 139, 144, 156, 178, 191, 193, 199, 215, 221, 232, 233, 242, 341, 342, 352.
Albinus (Veuve de Joannes). 350.
Alembert (Jean le Rond d'). 224, 247, 248, 249.
Amyot (Jacques). 251.
Aniſſon (L.). 194, 339.
Antiphanes. 182.
Archimède. 190, 240, 249, 304, 339, 348, 349, 378, 409, 466, 479, 485.
Ariſtarque. 190, 191.
Ariſtote. 190, 230, 240, 341, 349, 350, 351, 359.
Auteur du „Journal des Sçavans". Voir Gallois.
Auteurs ſcolaſtiques (les). 341.
Auzout (Adrien). 172.
Bachelier. 17.
Bacon (Francis). 192.
Baldi (Bernardinus). 350, 351.
Ball (Rouſe). 176, 198.
Ball (W.). 176.
Bannier (J. A.). 352.
Barth (J. A.). 247, 250.
Bekker (I.). 190.
Benacius (Alexander). 336.

Benedetti ou Benedictus (Giovanni Battista). 338, 339.
Bentley (Richard). 193.
Bernoulli (Jean). 359.
Bertier (Antoine). 184, 332.
Bevilaqua (Nicolaus). 338.
Bibliotheca Regia (à Paris). 208.
Birch (Th.). 173, 174, 176, 177, 344, 349, 354, 356, 375.
Birkhoff (G. D.). 250.
Blondel (François). 333.
Bonneveau (Mme de). 172.
Borelli (Giovanni Alphonso). 179, 183, 184, 194, 202, 203, 226, 227, 249, 250, 251.
Bosscha (J.). 250.
Boulliau (Ismaël). 345.
Boyle (Robert). 354, 375.
Brahé (Tycho). 195.
Briasson. 107.
Brouncker (William). 172, 173, 174, 175, 205, 344, 349, 354, 375.
Bruno (Giordano). 191, 192, 194, 199.
Cajori (Fl.). 250.
Cantor (Moritz Benedict). 373.
Carilian. Voir Gueury.
Carra de Vaux. Voir Vaux, de.
Cartes (René des). 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 24, 30, 38, 49, 71, 93, 96, 100, 101, 102, 103, 105, 106, 108, 113, 116, 129, 130, 131, 132, 133, 138, 139, 140, 141, 144, 146, 156, 157, 158, 172, 178, 179, 182, 191, 192, 193, 198, 199, 202, 203, 207, 210, 214, 215, 221, 232, 233, 240, 241, 242, 247, 248, 328, 341, 342, 352, 353, 359.
Cartesiens (les). 359.
Cauchy (Augustin Louis). 17.
Caus (Salomon de). 341.
Cavalieri (Bonaventura). 340, 348, 378.
Cavendish (William). 352.
Cazræus (Petrus). 184.
Champion (Joannes). 179.
Changuion (François). 237.
Clarke (Samuel). 237.
Clavius (Christoffel). 56, 75.
Clerselier (Claude de). 156.
Commandinus (Federicus). 336, 337.
Compagnie des Indes (les Directeurs de la). 377.
Company (the Williams & Wilkins). 250.

Copernicus. Voir Kopernik.
Coriolis (G.). 248, 359.
Corſinus (Ed.). 190.
Cotes (Roger). 198.
Coup (Pierre de). 227.
Croone (William). 173.
Dalmont (V.). 248.
Dechales (Claude François Milliet). 164, 165, 206.
Démocrite. 190.
Deſcartes. Voir Cartes, des.
Devenet (J. B.). 194.
Diogène. 190.
Directeurs de la Compagnie des Indes. 377.
Duhamel (J. B.). 177, 178, 209.
Duhamel (J. M. C.). 215, 225, 230, 233, 248.
Duhem (P.). 56, 332, 338, 339, 342.
Duilliers (Fatio de). 13, 14.
Dijkſterhuis (E. J.). 106, 392.
Edelheer (Jacobus). 99.
Éditeurs des „Opuſcula poſtuma". Voir Fullenius et Volder, de.
Einſtein (A.). 27, 248.
Elzevirs (les). 101, 319, 333.
Engelmann (Th. H. W.). 250.
Engelmann (Wilhelm). 90, 248, 250, 374.
Épicure. 190.
Eſtienne. 356, 429.
Euclide. 56, 57, 75, 300, 396, 527.
Eudoxus. 182.
Euler (Leonhard). 372, 378.
Experts du „Rijksmuſeum d'Amſterdam". 34.
Fabri. (Honorato), 179, 182, 202, 203, 339.
Fermat (Pierre de). 153.
Fiorentino (F.). 191.
Franchi (S.). 100.
Fullenius (Bernhard), éditeur (avec B. de Volder) des „Opuscula poſtuma". 34, 183, 238, 239, 243, 245, 246, 259, 260, 267, 278, 281, 282, 286, 293, 294, 295, 298, 300, 306, 308, 311, 312, 315, 316, 317, 318, 321, 322.
Galilei (Galileo). 9, 11, 52, 53, 99, 100, 101, 105, 106, 107, 112, 113, 115, 119, 138, 140, 141, 143, 150, 151, 178, 179, 182, 191, 193, 194, 201, 202, 203, 214, 228, 230, 240, 241, 242, 247, 248, 249, 251, 254, 255, 256, 257, 303, 319, 336, 337, 338, 343, 345, 346, 348, 393, 394, 397, 404, 406, 407, 408.

Gallois (Jean), auteur du „Journal des Sçavans". 169, 179, 182, 202, 209.
Gaſſendi (Pierre). 184, 194.
Gauthier-Villars. 215.
Gelbhaar (G.). 336.
Gerhardt (C. I.) 196, 199 359.
Girard (Albert). 333.
Godart. Voir Goddard.
Goddard (Jonathan). 172.
Golius (J.) 350.
Gotſcovius. Voir Gutſchoven, van.
Graveſande (Willem Jacob's). 243.
Gregorius à St. Vincentio. 99, 499.
Gregory (David). 198.
Guederville (de). 172.
Gueury (Carilian-). 248.
Guevara (Joannes de). 350, 351.
Gulden ou Guldin (Paulus). 336, 337, 439.
Gutſchoven (Gerard van). 4, 99, 101.
Gvenon (Henry). 336.
Hartmann (L.). 17.
Hausdorff (Felix). 90, 248.
Hauttius (David). 101.
Heckſcher. (A.) 374.
Heiberg (Johan Ludwig). 190, 191, 409, 480.
Hermann (A.). 56, 332.
Héron d'Alexandrie. 339.
Hertz (H.). 18, 19, 20, 246, 247, 249.
Heſperius (Cyllenius). 339.
Hill (Abraham). 176.
Hire (Philippe de la). 13, 183, 377.
Hoffmann (Nicolaus). 56.
Hooke (Robert). 15, 17, 173, 356, 375.
Horace. 303.
Huygens (Conſtantyn, père). 3, 242, 342, 349, 350, 352.
„ („ , frère). 243, 328.
„ (Lodewyk). 243, 333.
Ingoli (Fr.). 191.
Innys (G.). 200.
Innys (J.). 200.
Jordanus. 339.
Kempffer (M.). 192.

Kepler (Johannes). 192, 230, 240, 241.
Kinner von Löwenthurn (Gottfried Aloys). 6, 171.
Kopernik (Nicolaus). 101. 172, 190, 191, 192, 193, 195, 197, 230, 233, 240.
Korteweg (D. J.). 13.
Lagrange (Joſeph Louis). 248, 249.
Lamy (François). 336.
Leibniz (Gottfried Wilhelm von). 14, 189, 195, 196, 197, 198, 199, 237, 359.
Longman (T.). 193.
Lucrèce. 191.
Macmillan. 198.
Maizeaux (Des). 237.
Manolessius (C.). 336.
Marci de Kronland (Johannes Marcus). 100, 139.
Mariotte (Edme). 200, 207, 208, 209, 210, 211, 226.
Martin (la veuve d'E.). 338.
Martyn (J.). 354.
Maſcardus (J.). 350.
Mathematiker Vereinigung (Deutsche). 213.
Maurolycus (Franciſcus). 339, 340, 341.
Medicis (Ferdinando II de). 101.
Medicis (Leopoldo de). 249, 345, 346, 348.
Merſenne (Marin). 144, 156, 184, 332, 333, 336, 337, 338, 339, 345, 349, 350, 351, 352, 353.
Meyer (O. E.). 17.
Michallet (Eſtienne). 207.
Montius (Iacobus). 179.
Morano (D.). 191.
Moray (Robert). 172, 173, 174, 177, 178, 256, 343, 344, 349, 353, 354, 355, 356, 374, 375, 384, 429, 441, 447, 455, 462, 472, 482.
Mortier (P.). 336.
Mouſnerius (Petrus). 179, 202.
Müller (W.). 20.
Murray (J.). 193.
Mutſchmann (H.). 226.
Mylon (Claude). 80, 171, 172.
Neile (Sir Paul). 172, 176.
Neumann (F.). 17.
Newton (Isaac). 10, 25, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 209, 213, 222 223, 225, 226, 230, 237, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 377.
Niemeyer (Max). 240.
Nierop (Rembrantſz. van). Voir Rembrantſz.

W. Müller, Zur Kenntniſſ der Stoſſdauer elaſtiſcher Körper, 1914, **20.**
Is. Newton, De Mundi Syſtemate liber, 1728, **193**, 194.
„ Optice: ſive de reflexionibus, refractionibus, etc., 1719, **199**, 200.
„ Philoſophiæ naturalis principia mathematica, 1687, 10, 25, 193, 194—198, 222, 223, 225, 226, 230, 231, 246, 247, 250, 251.
„ Principia, ed. altera de R. Cotes, 1713, **198.**
F. Neumann, Vorleſungen über die Theorie der Elaſtizität der feſten Körper und des Lichtäthers, 1885, **17.**
L. Olſchki, Galilei und ſeine Zeit, 1927, **240.**
Ovidius, Metamorphoſes, 406, 407, 412, 413.
I. G. Pardies, Diſcours du mouvement local, 1670, 195, 206, 226, 227.
„ La Statique ou la ſcience des forces mouvantes, 1673, 184, 227.
„ Œuvres de mathématiques, 1725, **227.**
Plutarchus, De facie in orbe lunari, 251.
„ Œuvres mêlées publiées par Amyot, 1803, 251.
„ ou *Pſeudo-Plutarchus*, De Placitis Philoſophorum, ed. E. Corſini, 1750, **190.**
S. D. Poiſſon, Traité de Mécanique, 1833, **17.**
Cl. Ptolemæus, Opera quæ extant omnia, ed. J. L. Heiberg, 1898, **191.**
Cl. Quillet, Henritias (Manuſcrit), 172.
C. Ramſauer, Experimentelle uud theoretiſche Grundlagen des elaſtiſchen und mechaniſchen Stoffes, 1909, **17**, 18.
G. B. Riccioli, Almagestum novum, 1651, 192, 254, 255, 303, 354.
A. Ritter, Beitrag zur Theorie des elaſtiſchen Stoffes, 1891, **17.**
G. P. de Roberval, Obſervation ſur le ſuiet de la precedente lettre de M. Deſcartes a M. Cavendiſche, 1646, **352**, 490.
F. Roſenberger, Iſaac Newton und ſeine phyſikaliſchen Principien, 1895, **250.**
B. de Saint-Venant, Sur le choc longitudinal de deux barres élaſtiques, 1867, **17.**
Fr. van Schooten, Algebra (Manuſcrit), **4.**
„ Exercitationes mathematicæ, 1656, 99.
J. A. Schouten, Die relative und abſolute Bewegung bei Huygens, 1920, **213.**
Sextus Empiricus, Opera, ed. H. Mutſchmann, 1914, 194, **226.**
W. Snellius, Eratoſthenes Batavus, 1617, 304, 305, 323, 326.
Th. Sprat, Hiſtory of the Royal Society, 1667, 354, 355.
S. Stevin, Beghinſelen der Weeghconſt, 1586, 333.
„ Œuvres mathématiques, augmentées par A. Girard, 1634, **333.**
N. Tartalea. Voir *Jordanus.*
Thomſon and Tait, Treatiſe on natural philoſophy, 1867, 1879, **17.**
Ev. Torricelli, De Motu Gravium naturaliter deſcendentium et projectorum, 1644, 332, 333.
Ev. Torricelli, Opera Geometrica, 1644, 332, 333.
L. Valerius, De Centro gravitatis ſolidorum libri tres, 1661, **336**, 337.
P. Varignon, Nouvelle Mécanique ou Statique, 1725, **338**, 359.

P. Varignon, Projet d'une nouvelle Méchanique, 1685, **338**.
W. Voigt, Die Theorie des longitudinalen Stoffes cylindrifcher Stäbe, 1883, **18**.
„ Zur Theorie des longitudinalen Stoffes zylindrifcher Stäbe, 1915, **18**.
J. Wallis, A Summary account of the general Laws of Motion, 1669, 175, 176, 204, 205, 210.
„ De Centro Gravitatis ejufque Calculo, 1670, 340, 341.
„ Mechanica: five Tractatus de Motu, 1669, 1670, 1671, 176, 204, 205, 206, 210 340, 341.
„ Opera mathematica, 1695, 176, 206, 210, 340, 341.
„ Tractatus duo, de Cycloide et Epiftolaris de Ciffoide, 1659, 340.
E. Wohlwill, Die Entdeckung des Beharrungsgefetzes, 1884, **106**.
C. Wordsworth. Voir R. Bentley.
J. A. Worp, De Briefwiffeling van Conftantyn Huygens, 1911, **350**, 352.
C. Wren, Lex naturæ de collifione corporum, 1669, 175—177, 181, 204, 205.

Acta Eruditorum, 1686, 359.
Acta Societatis Regiæ, 250, 375.
Annalen der Phyfik, 1883, 18; 1909, 17; 1915, 18.
Comptes rendus, 1916, 18; 1917, 18.
Divers ouvrages de mathématique et de phyfique, 1693, 183.
Encyclopédie, ou dictionnaire raifonné, 1751, **107**.
Euclides, 1928—29, 392.
Internationale Wochenfchrift für Wiffenfchaft, Kunft und Technik, 1909, 13.
Jaarboek der Koninklijke Akademie van Wetenfchappen, 1909, 13.
Jahresbericht der Deutfchen Mathematiker Vereinigung, 1920, 213.
Journal Afiatique, 1894, 339.
Journal de mathématiques pures et appliquées, 1867, 17.
Journal des Sçavans, 1669, 14, 24, 102, 116, 169, 177—182, 189, 203, 204, 208; 1672, 186. Éd. d' Amfterdam, 1669, 178.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1881, 18.
Mémoires de l'Academie Royale des Sciences 1666—1699, 1730, 178.
Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société philomatique, 1826, 17.
Oftwald's Klaffiker der exacten Wiffenfchaften N°. 138, 1903, **90**, 248; N°. 192, 1913, 374.
Philofophical Transactions, 1669, 175—178, 181, 204.
Regiftres de l'Academie des Sciences, 182, 185, 209.
Sammlung Vieweg, Heft 38, 1921, **248**.
Sir Ifaac Newton, 1727—1927, a Bicentenary Evaluation of His Work, 1928, **250**.
Wiener Berichte, 1914, 20.
Zeitfchrift des Vereines Deutfcher Ingenieure, 1891, **17**.
Zeitfchrift für Völkerpfychologie und Sprachwiffenfchaft, 1884, **106**.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières ſcientifiques traitées dans ce Volume XVI ont été groupées ſous divers articles généraux, ſavoir :

Acouſtique.	Géodéſie.	Philoſophie.
Algèbre.	Géométrie.	Phyſique.
Anagrammes ſcientifiques.	Jeux.	Poids et meſures.
Aſtronomie.	Mécanique.	Principes du calcul différentiel et intégral.
Chronométrie.	Météorologie.	
Cinématique.	Œuvres.	

Pour connaître tous les endroits où quelque ſujet eſt traité, on cherchera dans la Table l'article auquel il appartient. On y trouvera, ſoit du ſujet même, ſoit d'un ſous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages de ce Volume.

On a marqué d'un aſtériſque les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Œuvres* ſe rapporte aux écrits de Huygens, ſoit publiés ici ou ailleurs, ſoit ſeulement ébauchés.

Acoustique. Propagation du ſon. 211.

Adhésion. Adhéſion de l'air qui empêche le contact immédiat de deux lentilles convexes. 160*, 161*.

Algèbre; (voir *Logarithmes*, *Œuvres*; Demonſtratio regulæ de maximis et minimis, *Principes du calcul différentiel et intégral*).

Anagrammes scientifiques. 175*, 370*, 373*, 375*, 376*, 496*.

Anneaux colorés. 183*, 184*.

Applications dans la physique de la théorie du choc; (voir *Force exercée pendant la percuſſion :* Importance pratique de cette force); à la théorie cinématique des fluides. 21*, 151*; à la théorie de la lumière. 150*, 151*, 184*, 202, 210*.

Arcs cycloïdaux du pendule. 201*, 278, 279, 282, 283, 344*, 345*, 354, 392.

Artifice de l'homme dans le bateau et de l'homme sur la rive qui joignent leurs mains. 11*, 12*, 29*, 32*—37*, 38—40, 41*, 66, 67, 145, 148.

ASTRONOMIE. 249; (voir *Chronométrie*, *Comètes*, *Doctrine de l'immobilité de la terre*, *Étendue finie ou infinie du monde*, *Éther cosmique*, *Étoiles fixes*, *Géodésie*, *Gravité*, *Influence du mouvement de la terre sur la chute des graves*, *Œuvres*: Cosmothéoros, Systema Saturnium, *Planètes*, *Satellites de Jupiter*, *Systèmes du monde*, *Terre*).

ATOMISTIQUE. 150*, 151*; (voir *Constitution de la matière*, *Théorie cinétique des fluides*).

ATTRACTION UNIVERSELLE; (voir *Gravité*).

CAUSE DU TONNERRE. 210*, 211*.

CENTRE D'AGITATION. 174, 350, 351*, 352*; (voir *Centre d'oscillation*).

CENTRE DE GRAVITÉ. 54—65, 231*, 336*, 337*, 339, 340*, 371*; (voir *Conservation dans le choc du mouvement du centre de gravité commun*, *Principe que le centre de gravité ne peut pas monter par l'effet de la seule gravité*, *Principe que le centre de gravité se place aussi bas que possible*); de divers onglets et troncs. 343, 369*, 370, 457—460, 463—470, 472—489, 493, 498—535, 543*, 544*, 545, 546.

CENTRE DE PERCUSSION. 350*—353*; Identité avec le centre d'oscillation. 351*—353*.

CENTRE DE VERTU. 350; (voir *Centre de percussion*).

CENTRE D'OSCILLATION. 22, 201, 343; (voir *Centre d'agitation*, *Centre de percussion*, *Centre de vertu*, *Centre d'oscillation de figures linéaires*, *Centre d'oscillation de figures planes par rapport à un axe perpendiculaire à leur plan*, *Centre d'oscillation de figures planes par rapport à un axe situé dans leur plan*, *Centre d'oscillation de figures solides*, *Méthodes pour trouver le centre d'oscillation*); Détermination expérimentale. 350*—353*, 356*, 375*, 377*; Échangeabilité du point de suspension et du centre d'oscillation. 373*, 374*; Historique. 201*, 349*—376*, 378*; Théorème sur la situation des centres d'oscillation se rapportant à des axes parallèles. 370*, 373*, 461*.

CENTRE D'OSCILLATION DE FIGURES LINÉAIRES. 360; Barre pesante. 391*, 420*—423*, 437*—439*; barre pesante portant un ou plusieurs poids. 385*—387*, 422*—433*; (voir *Poids mobile du pendule*); tige sans masse portant deux ou plusieurs poids. 354, 387*—390*, 414*—419*, 434*—437*.

CENTRE D'OSCILLATION DE FIGURES PLANES PAR RAPPORT À UN AXE PERPENDICULAIRE À LEUR PLAN; (voir *Détermination du moment d'inertie d'une figure plane*). 351*, 356, 357*, 360, 362*—367*, 369*—371*, 461—463, 514*—521*; arcs de cercle. 362, 455*; barre horizontale. 361—363, 444*—446*, 540*, 541*; cercle. 362, 366*, 375, 530*, 531*, 536*, 537*; certaines parties du cercle. 362, 455*, 536, 537; circonférence de cercle. 362, 366*, 455*; demi-cercle. 362, 363, 442*, 443*, 492*, 493*, 530*, 531*; demi-circonférence de cercle 361—363, 441*, 442*; ellipse. 363, 370*, 446*, 476*—478*, 540*, 541*; hexagone régulier. 371*, 495*, 496*; ligne brisée. 361—363, 449*—452*; paire de points pesants. 361, 368, 447*; paire de triangles infiniment aigus. 361, 371, 448*, 491*—494*, 532*—537*; polygone régulier. 496*; rectangle. 371, 374*, 456*, 463*—469*, 520*—523*; secteur de cercle. 350*, 352*, 361, 362, 371*, 487*—490*, 492*, 524*—533*, 536*—539*; triangle. 350*, 351, 357, 362, 371, 374, 375, 442, 452*—454*, 456*, 462*, 523*—525*.

CENTRE D'OSCILLATION DE FIGURES PLANES PAR RAPPORT À UN AXE SITUÉ DANS LEUR

PLAN; (voir *Détermination du moment d'inertie d'une figure plane*). 351*, 356, 357*, 368*, 369*, 457*—460*, 462*, 498*—508*; cercle. 510—513; certain quadrilatère. 462; certains hexagones. 463*—469*; paire de triangles infiniment aigus. 532—534; rectangle. 508*—509*, 520—523; secteur de cercle. 487*—489*; triangle. 351, 508*—511*, 512*, 513*.

CENTRE D'OSCILLATION DE FIGURES SOLIDES. 350, 356, 357*, 482*, 483*; cercle horizontal. 368*; cône droit. 368*; ellipsoïde de révolution. 360, 370*, 473*—478*, 481*; hyperboloïde de révolution. 371, 374*, 375, 550*—555*; paire de pyramides infiniment effilées. 360, 361, 368, 448*; paraboloïde de révolution. 371, 483*—486*; sphère. 355*, 356*, 360*, 369*—370*, 374*, 375*, 470*—472*, 473, 475.

CHAÎNETTE. 332; (voir *Œuvres:* Travaux divers de Jeunesse).

CHRONOMÉTRIE. 240, 242, 243; (voir *Arcs cycloïdaux du pendule*, *Horloge*, *Isochronisme de la cycloïde*, *Isochronisme des révolutions d'un mobile parcourant diverses circonférences à l'intérieur d'un paraboloïde de révolution*, *Pendule*).

CHUTE DES CORPS SPHÉRIQUES DANS UN MILIEU RÉSISTANT. 256, 343*, 344*, 384*, 385*.

CHUTE DES GRAVES. 101*, 106, 174, 201, 221, 240, 254, 255, 256*—259*, 260, 261, 266, 267, 274—281, 303, 305, 320, 322, 323; (voir *Chute des corps sphériques dans un milieu résistant*, *Chute le long d'une courbe*, *Chute le long d'un plan incliné*, *Influence du mouvement de la terre sur la chute des graves et la marche des pendules*, *Mouvement uniformément accéléré*); Détermination de l'accélération de la chute libre. 278*—281*, 305, 306, 308, 309; Expériences sur la chute des corps graves. 101, 106, 254, 255, 256*, 257*, 278, 279, 303*, 319, 344; Influence d'un milieu résistant. 101, 174*, 221, 254*—257*, 343*, 344*, 384, 385; Proportionalité des distances parcourues aux carrés des vitesses. 52*—55*, 115, 162, 163; Valeur de *g*. 280*, 281*, 305, 306, 308, 309, 323.

CHUTE LE LONG D'UNE COURBE; (voir *Isochronisme de la cycloïde*); cercle. 346*, 393*, 394*; parabole. 393; Historique. 346*, 392*, 393*.

CHUTE LE LONG D'UN PLAN INCLINÉ. 346*.

CINÉMATIQUE; (voir *Mouvement uniforme*, *Mouvement uniformément accéléré*); Mouvement de deux points sur la même droite. 118—120, 124, 125.

COMÈTES. 230.

CONSERVATION DANS LE CHOC DE LA SOMME ALGÉBRIQUE DES QUANTITÉS DE MOUVEMENT DANS UNE DIRECTION DONNÉE. 7*, 8*, 10*, 12*, 13*, 23*—25*, 98*, 102*, 116*, 119, 130, 131*, 133*, 140, 141, 146*, 147*, 158*, 159, 164*, 165, 180*, 183, 221; (voir *Erreurs de Descartes*).

CONSERVATION DANS LE CHOC DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ COMMUN. 25*, 116*, 132, 164, 167, 175, 181*, 206*, 208.

CONSERVATION DE LA FORCE VIVE DANS LE CHOC DES CORPS DURS. 7*, 13, 22*, 23*, 25*, 72*—77*, 95*, 96*, 98*, 117*, 132*, 133, 134, 149, 175, 180*, 341.

CONSTITUTION DE LA MATIÈRE. 4*, 184*, 185*, 210*, 221, 222; (voir *Atomistique*, *Pression supplémentaire d'une matière plus subtile que l'air*).

COURBES; (voir *Chaînette*, *Cycloïde*, *Développante du cercle*, *Développées*, *Paraboloïdes*). Courbes

auxiliaires dans les recherches de Huygens ſur l'iſochronisme de la cycloïde. 392*—399*, 401*—403*.

CYCLOÏDE. 340, 400*; (voir *Arcs cycloïdaux du pendule*, *Développées*, *Iſochronisme de la cycloïde*); Rayon de courbure du point le plus bas. 321, 322.

DÉFORMATION SOUS PRESSION DE DEUX CORPS ÉLASTIQUES EN CONTACT. 18*, 211*, 212*; Cas de deux ſphères. 18*, 19*.

DÉTERMINATION DU MOMENT D'INERTIE D'UNE FIGURE PLANE. Par rapport à un axe perpendiculaire à ſon plan. 548*—549*; par rapport à un axe ſitué dans ſon plan. 545*—548*.

DÉVELOPPANTE DU CERCLE. 262*—265*.

DÉVELOPPÉES. Cycloïde. 344*, 345*; Théorie générale. 344.

DISTINCTION EXTRE LA MASSE D'UN CORPS ET SA GRAVITÉ. 230*, 231*, 245*, 376, 377.

DOCTRINE DE L'IMMOBILITÉ DE LA TERRE. 27, 103*, 111*, 190, 192*, 193*, 194, 214*, 215*, 227, 240, 354.

DURÉE DU CHOC. 19*, 20*.

DYNAMIQUE. 174; (voir *Centre d'oſcillation*, *Chute des graves*, *Diſtinction entre la maſſe d'un corps et ſa gravité*, *Égalité de l'action et de la réaction*, *Équilibre et mouvement d'un point matériel dans un tube en rotation*, *Erreurs de Deſcartes*, *Force centrifuge*, *Hiſtorique de quelques notions employées dans la mécanique*, *Iſochronisme de la cycloïde*, *Loi de la conſervation de l'énergie*, *Loi de l'inertie*, *Mouvement d'un point matériel ſur une ſurface*, *Mouvement perpétuel*, *Œuvres:* Travaux divers de statique et de dynamique, *Pendule*, *Percuſſion*, *Stabilité et inſtabilité dynamique*, *Statique:* Réduction de problèmes de la dynamique à la ſtatique); Théorèmes fondamentaux de la dynamique. 10*.

EFFET DE L'INTERPOSITION D'UN OU PLUSIEURS CORPS EN REPOS ENTRE UN CORPS A EN MOUVEMENT ET UN CORPS C EN REPOS. 11*, 133*; Cas d'un ſeul corps interpoſé de grandeur intermédiaire. 80*—87*, 135*, 136*, 149*, 175, 180* (viteſſe maximum du corps C, le corps A et ſa viteſſe étant donnés. 80*—87*, 135*, 136*, 149, 152, 153*, 175, 180*); Pluſieurs corps de grandeurs intermédiaires étant interpoſés. 86*—91*, 134*, 149*, 154*—158*, 168, 175, 184 (viteſſe maximum du corps C pour un nombre donné de corps interpoſés, le corps A et ſa viteſſe étant donnés. 86*—91*, 149, 156*, 158*, 175, 184*); (cas limite où le nombre des corps interpoſés s'augmente indéfiniment. 90*, 134*).

ÉGALITÉ DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION. 10*, 246*.

ÉGALITÉ DE LA VITESSE D'ÉLOIGNEMENT ET D'APPROCHEMENT DANS LE CHOC DES CORPS DURS. Choc direct. 7*, 22, 23, 26*, 42*—47*, 50, 51, 54*, 55*, 58—63, 65, 92*, 95*—97*, 116*, 125*—128*, 129—131, 132*, 134, 146, 167, 175, 221*; Choc oblique. 26, 118*, 119*; Modification du théorème dans le cas des corps ſemi-durs. 165*—167*; dans le choc de deux mécanismes. 26*, 119.

ÉLASTICITÉ. 17—19, 185*, 186*, 210; (voir *Déformation ſous preſſion de deux corps élaſtiques en contact*, *Loi de Hooke*, *Percuſſion*, *Perte dans le choc de la force vive du mouvement progreſſif par les vibrations*).

ÉQUILIBRE DE POIDS SUSPENDUS À DES CORDES. 331, 379; Cas traité par Stevin. 332*, 333*, 379*, 380*.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL DANS UN TUBE EN ROTATION. Tube en forme de parabole. 307*; Tube droit incliné ſur l'axe de rotation. 306*, 307*.

ERREURS DE DESCARTES. 3*, 4*, 8*, 13*, 100*, 105*, 233*; Inexactitude de ſon aſſertion ſur la conſervation dans l'univers de la même quantité de mouvement. 8*, 12*, 13*, 24*, 48*—51*, 70*, 90*, 91*, 95*, 102*, 105, 116*, 130*, 131*, 140, 146*, 147*, 157*, 158*, 175, 180, 183, 207*, 221 (voir *Percuſſion directe des corps inégaux:* Détermination de la quantité de mouvement dans le ſens de Deſcartes); Erreurs dans la dynamique. 352*, 353*; dans la géométrie. 31; dans la théorie de la percuſſion. 4*—8*, 30, 31, 38*, 39*, 100*, 101*, 103, 105, 113, 129, 130, 132, 138, 139*, 140*, 144*, 156*—158*, 172, 203*, 204*, 207*, 210*.

ÉTENDUE FINIE OU INFINIE DU MONDE. 183*, 190*—193*, 195*, 199, 215*, 216, 222, 228, 230*, 231.

ÉTHER COSMIQUE. 17, 199, 200, 231.

ÉTOILES FIXES. 190*, 191*, 192*, 193, 194, 215, 216, 224, 227, 230, 233.

EXISTENCE ET PERCEPTIBILITÉ, OUI OU NON, DU MOUVEMENT ABSOLU. 26*, 27*, 183*, 190*, 193, 194*—200*, 209*, 213*—220*, 221—233, 237; Cas du mouvement circulaire. 27*, 183*, 190, 194, 195*—199*, 218*, 220*, 222, 223, 224*, 225*, 226—230, 232*, 249*; (voir *Expérience de Newton du ſeau tournant*).

EXPÉRIENCE DE DEUX VERRES CONVEXES OÙ L'ON VOIT QU'IL Y RESTE DE L'AIR ENTRE EUX. 183*.

EXPÉRIENCE DE NEWTON DU SEAU TOURNANT. 196*, 197*, 222, 224*.

EXPÉRIENCES SUR LA FORCE CENTRIFUGE. 328*; Inſtruments conſtruits à cet effet. 327*, 328*.

EXPÉRIENCES SUR LE CHOC DES CORPS. 17*—20*, 100*, 103, 104, 107—109, 113*, 118*, 137*, 138, 139, 140*, 144*, 159*, 160*, 172*—174*, 178*, 179*, 181*, 182, 185*, 203*, 204*, 207, 208*, 209, 210; Machines pour faire ces expériences. 158*, 185*, 203, 208*, 209*.

FABRICATION DES LENTILLES. 172.

FORCE CENTRIFUGE. 174, 199, 201, 202, 220, 224*, 225, 227, 228, 232, 237, 244*, 282—293, 313, 320—321; (voir *Équilibre et mouvement d'un point matériel dans un tube en rotation*, *Expériences ſur la force centrifuge*, *Œuvres:* Excerpta ex adverſariis Chriſtiani Hugenii, Manuſcrit de Huygens concernant la force centrifuge, De vi centrifuga); Comparaiſon de l'écart initial entre le cercle et ſa tangente dans le mouvement circulaire avec l'eſpace parcouru pendant la chute des graves. 243*, 244*, 258*—267*, 274—277; Force centrifuge à la ſurface du Soleil ou des Planètes. 251*; à la ſurface de la Terre. 193*, 224*, 237*, 238*, 241*, 304*, 305, 323*—326* (voir *Terre*); Hiſtorique. 193*—198*, 201*, 202*, 239*—251*; Meſure abſolue de la force centrifuge. 194, 195, 220, 224, 227, 231, 241, 244*, 245*, 250*, 274*—281*, 303*, 304*, 312, 316*, 323, 325 (voir *Influence de la découverte de la meſure abſolue de la force centrifuge ſur celle de la loi de la gravité univerſelle*); Nature de la force centrifuge. 198, 232, 243*, 244*, 246*—249*, 258*—267*, 303*, 305*; Proportionalités entre la force centrifuge, le rayon du cercle, la viteſſe linéaire et le temps de révolution. 241*, 244*, 251, 266*—275*, 304*, 305, 306, 312, 315*; Tenſion du fil d'un pendule conique. 294*, 295*, 310, 311, 318*; d'un pendule ordinaire. 245*, 296*—301*, 318*.

FORCE EXERCÉE PENDANT LA PERCUSSION. 99*, 100*, 104*, 105*, 112*, 113*, 124, 137, 138, 150, 175, 176, 178, 184*, 203, 221*, 350*—353*; Importance pratique de cette force. 9*, 104*, 105*, 112*, 138; ſa meſure. 112*, 184*, 222; ſa nature. 9*, 10*, 112*, 113*, 117, 124.

FORMULE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER LE CENTRE D'OSCILLATION. 360*, 361*, 364*, 365*, 367*, 369*, 377, 378, 462*, 470*, 471*, 473, 477, 482—486, 519, 550—555.

GÉODÉSIE; (voir *Terre*).

GÉOMÉTRIE. 380, 381; (voir *Centre de gravité*, *Courbes*, *Géométrie Cartéſienne*, *Méthode de démonſtration des anciens*, *Œuvres:* Theoremata de quadratura hyperboles, ellipſis et circuli, Exetaſis Cyclometriæ, De circuli magnitudine inventa, Travaux divers de mathématiques de 1655—1659, Demonſtratio regulæ de maximis et minimis, *Planimétrie*, *Principes du calcul différentiel et intégral*, *Surfaces courbes*).

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE. 4*; (voir *Erreurs de Descartes:* dans la géométrie).

GRAVITÉ. 240*, 251*, 254*—257*, 258, 259, 311; (voir *Centre de gravité*, *Chute des graves*, *Œuvres:* Diſcours de la cauſe de la peſanteur, *Terre:* Variation de la gravité à la ſurface de la terre, *Tourbillons de Descartes*); Attraction exercée ſur la lune par la terre. 250*; Loi de Newton de la gravité univerſelle. 250*; Peſanteur ſur la ſurface du Soleil et ſur celle de Jupiter. 251*.

HISTORIQUE DE QUELQUES NOTIONS EMPLOYÉES DANS LA MÉCANIQUE. Énergie. 359*; Gravitatis deſcenſus. 341*, 342*, 358; Moment d'inertie. 378*; Moment ſtatique. 336*—341*. Potentia. 359*, 376*; Vis motus. 359*, 376*; Vis viva. 341*, 359*.

HISTORIQUE DES TRAVAUX DE HUYGENS SUR LA PERCUSSION. 4*—11*, 13, 14*, 21*, 25*—27*, 30*, 31*, 43*, 69, 92*—97*, 99*, 137, 139*, 140*, 171*, 176*—178*, 181*, 189*, 190*, 201*—212*; (voir *Œuvres:* Adverſaria ad tractatum de motu per impulſum omnium prima, Annotations de 1654 ſur la percuſſion, De motu per impulſum adverſaria priora, Manuſcrit definitif du Traité ſur la percuſſion, De motu corporum ex percuſſione).

HORLOGE; (voir *Œuvres:* Horologium, Horologium oſcillatorium, *Pendule*); Horloges à pendule conique. 242*, 243*, 319*; à pendule ordinaire. 201*, 242*, 344, 354*. 428, 429.

HYDRODYNAMIQUE; (voir *Expérience de Newton du ſeau tournant*); Conſervation du mouvement dans un vortex. 183*.

HYDROSTATIQUE; (voir *Œuvres:* De iis quæ liquido ſupernatant).

HYPOTHÈSES EMPLOYÉES DANS LA THÉORIE DE HUYGENS SUR LA PERCUSSION DES CORPS DURS. 10, 11, 26, 30—33, 42, 43, 101*, 113*—116*, 138, 140, 141, 161*, 171, 172, 175, 184, 189*, 215*, 221; Hypothèſe I (voir *Loi de l'inertie*); Hypothèſe II. Percuſſion de corps durs égaux ſe rencontrant à viteſſes égales. 10*, 16*, 24*, 30*, 31*, 34—37, 50—53, 92—94, 102—104, 106, 107, 109, 121, 123, 124, 141, 161; Hypothèſe III (voir *Principe de la relativité de Huygens*); Hypothèſe IV. Un corps plus grand met en mouvement un corps plus petit en repos et perd quelque partie de ſa viteſſe. 10*, 38*, 39*, 40, 41, 51, 102, 106, 126, 129, 137, 141, 146, 161, 172; Hypothèſe V. Si des deux corps qui ſe rencontrent l'un a conſervé ſon mouvement l'autre auſſi n'aura rien perdu ni gagné en mouvement. 10*, 11*, 23*, 24*, 40*, 41*, 44, 45, 96*, 102, 106, 126, 141, 161, 172; Hypothèſes supplémen-

taires. **1.** Un corps en repos plus grand recevra d'un corps en mouvement moins de viteſſe qu'un corps en repos plus petit. 42*, 43*, 58, 59, 95*. **2.** Un corps plus petit en mouvement donne à un corps plus grand en repos une viteſſe plus petite qu'il ne poſſède lui-même. 129*, 161*. **3.** Un corps en repos choqué avec une viteſſe égale par des corps différents reçoit plus de viteſſe ſelon que le corps choquant eſt plus grand. 129*.

INFLUENCE DE LA DÉCOUVERTE DE LA MESURE EXACTE DE LA FORCE CENTRIFUGE SUR CELLE DE LA LOI DE LA GRAVITÉ UNIVERSELLE. 250*, 251*.

INFLUENCE DES CORPS ENVIRONNANTS SUR LA PERCUSSION DES CORPS. 101*, 102, 105, 113, 138, 140, 183*.

INFLUENCE DU MOUVEMENT DE LA TERRE SUR LA CHUTE DES GRAVES ET LA MARCHE DES PENDULES. 141, 193*, 224*, 355, 376*. 377*.

ISOCHRONISME DE LA CYCLOÏDE. 201, 278*, 279*, 282*, 283*, 321, 322, 343, 344*—349*, 392*—413*; Durée des oſcillations. 282*, 322, 410*; Expériences. 349*, 354*; Historique. 344*—349*.

ISOCHRONISME DES RÉVOLUTIONS D'UN MOBILE PARCOURANT DIVERSES CIRCONFÉRENCES DE CERCLE À L'INTÉRIEUR D'UN PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION. 245*, 280*—285*, 308, 314, 316*, 321; Cas où le temps de révolution eſt égal à une ſeconde. 314.

JEUX. Jeu de billard. 103, 107*, 118*, 119*, 139, 142*, 144; Jeu de paumes. 107; Jeux où l'on fait gliſſer des diſques ſur une table. 143*, 144*.

LIEU DE RUPTURE D'UNE POUTRE HOMOGÈNE SOUTENUE EN DEUX POINTS. 333*—336*, 380*—383*.

LOGARITHMES. 158, 159.

LOI DE HOOKE. 15, 17.

LOI DE LA CONSERVATION DE L'ÉNERGIE. 21*, 22*, 95*, 358—360.

LOI DE L'INERTIE. 10, 30*, 31*, 102*, 105*, 106*, 111, 131, 140, 218, 223, 242*, 246.

MÉCANIQUE. 201, 239, 248, 249, 339, 340; (voir *Dynamique*, *Élaſticité*, *Hydrodynamique*, *Hydroſtatique*, *Réſiſtance des matériaux*, *Statique*, *Terminologie de Huygens dans la mécanique*); Origine du ſtyle moderne dans la mécanique. 342*, 378*.

MESURE UNIVERSELLE. 282, 283, 353*—356*, 357, 375*.

MÉTAPHYSIQUE. 199, 213*.

MÉTÉOROLOGIE; (voir *Cauſe du Tonnerre*).

MÉTHODE DE DÉMONSTRATION DES ANCIENS. 10*, 13, 72*, 115, 239, 348*, 349*, 378*.

MÉTHODES POUR TROUVER LE CENTRE D'OSCILLATION; (voir *Formule générale pour déterminer le centre d'oſcillation*, *Principe que le centre de gravité ne peut pas monter par le ſeul effet de la gravité:* Application à la détermination des centres d'oſcillation); Méthode de la parabole. 361*, 385*—387*, 391*, 421*—433*, 444*, 445*, 449*—452*, 457*, 458*; de l'onglet et du tronc. 368*—370*, 455, 456, 457*, 458*, 463*—477*, 487—489, 498*—513*; de réduction des oſcillations dans le plan à celles perpendiculaires au plan. 369*, 462*, 463*; des quatre cinquièmes. 361, 367*, 368*, 448*, 449*; des trois quarts. 361, 362*—368*, 442*—444*, 448*, 449*, 452*—454*, 456; directe. 361*, 368*, 369*, 385*—391*, 414*—439*, 441*, 442*, 444*, 445*, 448*—452*, 457, 458, 489*, 490*; générale pour les figures de révolution. 371*, 482*, 483*; Méthodes pour les figures planes oſcillant

dans leur plan. 360*, 361*, 369*—371*, 441*, 442*, 444*, 445*, 448*—454*, 457*, 477*, 482*, 487*—496*, 514*—541*; pour les figures planes oſcillant perpendiculairement à leur plan. 360*, 375*, 457, 458, 487*—489* (voir ici-même Méthode de l'onglet et du tronc); pour les figures ſolides. 371*—373*, 448*, 455, 482*, 483*—486*, 550*—555*; pour les pendules linéaires. 361*, 385*—391*; 415*—439*; Règle générale de Descartes. 352*, 353*.

MICROSCOPE. 183.

MOUVEMENT ABSOLU OU RELATIF; (voir *Exiſtence et perceptibilité, oui ou non, du mouvement abſolu, Principe de la relativité de Huygens*).

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE. cône de révolution. 307*, 308*; paraboloïde de révolution. 308*; ſphère. 309, 310.

MOUVEMENT PERPÉTUEL. Principe de l'impoſſibilité du mouvement perpétuel. 22*, 165*, 333*.

MOUVEMENT UNIFORME. 111, 143*, 195, 219*, 240*.

MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ. 114*, 115*, 243, 244, 254*, 255*, 256—271, 276, 277, 311; (voir *Chute des graves*).

NATURE DE LA FORCE. 246, 247, 248*; Forces fictives. 247, 248.

NATURE DU MOUVEMENT. 9*, 102, 108*, 109*, 111*, 112*, 142*, 143*, 150*, 151*, 160*, 190*, 194*, 197*, 200*, 215*, 216*, 217, 218, 225, 227, 237*, 240*; (voir *Nature du mouvement circulaire*).

NATURE DU MOUVEMENT CIRCULAIRE. 194*, 198, 199, 218*, 220*, 222*—224*, 225—227, 232*, 237*, 239*, 240*, 241, 242; (voir *Exiſtence et perceptibilité, oui ou non, du mouvement abſolu :* Cas du mouvement circulaire).

ŒUVRES. *Boeckje* (Manuſcrit). 353*.

Travaux divers de Jeuneſſe. 21*, 56*.

De iis quæ liquido ſupernatant. 21*, 56*, 332*, 499*.

Exetaſis Cyclometriæ Cl. Viri Gregorio à S. Vincentio. 99, 499.

Theoremata de quadratura hyperboles, ellipſis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro. 137, 526, 527.

Adverſaria ad tractatum de motu per impulſum omnium prima. 93*; (voir *Manuſcrit de* 1652 *ſur la percuſſion*).

Manuſcrit de 1652 *ſur la percuſſion.* 6*—8*, 42, 43*, 92*—99*, 137*, 150, 151, 204*.

Annotations ſur la percuſſion de 1654 (Manuſcrit). 9*, 93, 99*—136*, 137, 140*, 141, 150, 151, 193, 194, 204*.

De motu per impulſum adverſaria priora. 93*. (voir *Manuſcrit de* 1656 *ſur la percuſſion*).

Manuſcrit de 1656 *ſur la percuſſion.* 10*—12*, 13, 22, 31, 53*, 54*, 69*, 82, 137*—151*, 156—158, 189, 193, 194.

Manuſcrit définitif du Traité ſur la percuſſion. 10*—14*, 30*—36*, 40*, 42*, 50*, 51*, 54*, 56*, 67*, 69*, 72*, 76*, 77*, 84*, 87*, 90*.

De Motu corporum ex percuſſione. 1*—91*, 93*—97*, 102*—104*, 106*—108*, 110*, 113*, 115*—117*, 119*, 121*, 122*, 125*, 126*, 129*—131*, 133*, 134*, 136*, 137*, 141*, 143*—157*, 159*, 161*, 167*, 171*, 172*, 175, 179*, 180, 189*, 202*, 215,

238*, 249*, 342*, 360; Problèmes à résoudre. 10*, 117*, 133*, 134, 135, 154*, 155*; Projets d'une préface. 10*, 138*—143*, 201*—220*; Traduction allemande. 90*.

De circuli magnitudine inventa. 137.

De ratiociniis in ludo aleæ. 117.

Horologium. 345*, 346*.

Excerpta ex Adversariis Christiani Hugenii (Manuscrit). 312*—314*.

Manuscrit de Huygens concernant la force centrifuge. 238*, 239*, 241, 242*—245*, 255*, 257, 259, 260, 263, 267*, 269, 280*, 281*, 284*—286*, 288, 295*, 296*, 298*, 301, 302*—311*.

De vi centrifuga. 183*, 189, 194*, 195*, 202*, 220, 235*, 238*, 239*, 242, 243*—246*, 248*, 249*, 253*—302*, 305, 306, 308, 309*, 311—319, 320*—322*, 323, 326; Projets d'une préface. 201*—220*; Traduction allemande. 90*, 248*, 249*.

Manuscrits qui ont servi pour les Travaux divers de Statique et de Dynamique de 1659—1666. 256, 331*, 374*, 379*—555*.

Travaux divers de Statique et de Dynamique de 1659—1666. 256, 329*—555*.

Travaux divers de Mathématiques de 1655—1659. 344*, 347*, 348*.

Systema Saturnium. 192*, 355.

Dioptrica. 13, 238*.

De formandis poliendisque vitris. 238*.

Notices qui ont servi pour les discours à l'Académie des Sciences du 4, 11 *et* 18 *janvier* 1668. 12*, 157*, 159, 160*, 161*, 173*, 174*, 182*—186*, 195*, 196*, 205*, 206*, 208*, 209*.

Extrait d'une lettre de M. Hugens sur les regles du mouvement dans la rencontre des corps. 14*, 15, 24, 25, 102*, 116*, 169*, 177*—181*, 182, 189*, 202—204, 208*; Traduction anglaise. 14*, 177*, 178, 210.

Extrait d'une lettre touchant les phénomènes de l'eau purgée d'air. 186*.

Horologium oscillatorium. 14, 22, 52*, 147, 183, 201*, 202, 220, 238*, 239, 249*, 267*, 278*—283*, 286, 315*—318*, 321, 322*, 328*, 342*, 345*, 346*, 348*, 349*, 353*, 356*, 357*, 369*—371*, 373*—376*, 378*, 393*, 401*, 406*, 429*, 461*, 463*, 471*, 472*, 474*, 509*, 524*—527*, 529*, 546*—549*, 551*, 554*, 555*; Traduction allemande. 374*.

Anecdota (Manuscrit). 199*, 251*.

Journal de voyage (Manuscrit). 172*, 173*.

Manuscrits ultérieurs concernant l'historique de la théorie du choc des corps et la question de l'existence de la perceptibilité du mouvement absolu. 9*, 187*, 190*—233*, 237*, 249*.

Traité de la lumière. 151*, 185*, 202*, 210*, 231*.

Discours de la cause de la pesanteur. 183*, 202*, 240, 241, 326*, 328*, 377*.

Demonstratio regulæ de maximis et minimis. 153*.

Cosmotheoros. 192*.

Opuscula postuma. 13, 14, 30*, 31*, 33*, 34*, 183*, 202, 238*, 243, 254*, 256, 259, 260, 267, 302.

Opera reliqua. 31*, 243, 255*.

OPTIQUE; (voir *Anneaux colorés*, *Éther cosmique*, *Expérience de deux verres convexes où l'on voit qu'il y reste de l'air entre eux*, *Fabrication des lentilles*, *Microscope*, *Œuvres:* Dioptrica, De formandis poliendisque vitris, Traité de la lumière, *Réfraction*, *Théorie de la lumière*).

PARABOLOÏDE DE RÉVOLUTION; (voir *Isochronisme des révolutions d'un mobile parcourant diverses circonférences de cercle à l'intérieur d'un paraboloïde de révolution*).

PARABOLOÏDES (courbes $y^a = kx^b$). 475, 476.

PENDULE. 174; (voir *Arcs cycloïdaux du pendule*, *Centre de percussion*, *Centre d'oscillation*, *Force centrifuge:* Tension du fil d'un pendule simple, *Horloge*, *Pendule conique*, *Poids mobile du pendule pour régler les horloges*, *Influence du mouvement de la terre sur la chute des graves et la marche des pendules*); Détermination du pendule à secondes. 354*, 355, 356. Durée des oscillations. 282—284, 303, 313, 314, 316, 317, 319—321, 345*—347*, 392*. 393*, 406*, 407*, 410*; Expériences sur cette durée. 314, 319*, 345*, 346*, 375*; Influence de la résistance de l'air. 356, 357.

PENDULE CONIQUE. 174; (voir *Force centrifuge:* Tension du fil d'un pendule conique, *Horloge*); Expériences sur le pendule conique. 243*, 319*. Théorèmes sur les temps de révolution dans des cercles horizontaux du pendule conique. 281*—295*, 309*, 310*, 313, 316*, 317*, 319*—322*; dans le cas des cercles très petits. 288*—293*, 313, 314*, 317*, 320*, 321, 322.

PERCUSSION. (voir *Applications dans la physique de la théorie du choc*, *Conservation dans le choc de la somme algébrique des quantités de mouvement dans une direction donnée*, *Conservation dans le choc du mouvement du centre de gravité commun*, *Durée du choc*, *Expériences sur le choc des corps*, *Force exercée pendant la percussion*, *Historique des travaux de Huygens sur la percussion*, *Influence des corps environnants sur la percussion des corps*, *Œuvres:* De motu corporum ex percussione, *Percussion de deux mécanismes sans frottement formés par des corps durs*, *Percussion des corps durs*, *Percussion des corps mous*, *Percussion des corps naturels*, *Percussion des corps semi-durs*, *Règles de la percussion en général*, *Rôle du frottement dans la percussion*, *Travaux d'autres que Huygens sur les règles de la percussion*); Définition de la percussion directe ou centrale. 32, 33, 124, 125, 141; Cas spécial des corps sphériques. 7, 117, 118*, 119, 124, 181*; Nature de la percussion. 150*, 159*, 160*, 168*, 185, 210*.

PERCUSSION DE DEUX MÉCANISMES SANS FROTTEMENT FORMÉS PAR DES CORPS DURS. Théorème très général sur les vitesses normales au plan tangent de contact. 26*, 119.

PERCUSSION DES CORPS DURS; (voir *Conservation de la force vive dans le choc des corps durs*, *Effet de l'interposition d'un ou de plusieurs corps en repos entre un corps A en mouvement et un corps C en repos*, *Égalité de la vitesse d'éloignement et d'approchement*, *Hypothèses employées dans la théorie de Huygens sur la percussion des corps durs*, *Percussion directe des corps durs égaux*, *Percussion directe des corps durs inégaux*, *Percussion oblique des corps durs*, *Problèmes sur la percussion des corps durs*, *Propriétés des corps durs*, *Réversibilité:* de la percussion des corps durs).

PERCUSSION DES CORPS MOUS. 10*, 14*, 23*—25*, 156, 157*, 161*—165*, 175*, 181*, 184*, 202, 204, 205, 210*; Solution générale. 164*.

PERCUSSION DES CORPS NATURELS. 14*—21*; (voir *Durée du choc*, *Expériences sur le choc des corps*, *Perte dans le choc de la force vive du mouvement progressif par les vibrations*); Applicabilité des règles de Huygens. 14*, 18*, 20*, 21*; Cas des corps à surfaces convexes. 18*, 19, 20;

des corps cylindriques homogènes et isotropes. 15*—18*; des corps sphériques. 18*—20*.

PERCUSSION DES CORPS SEMI-DURS. 10*, 11*, 14*, 23*—25*, 161, 164*—167*; (voir *Égalité de la vitesse d'éloignement et d'approchement:* Modification du théorème dans le cas des corps semi-durs); Solution générale. 24*, 166*.

PERCUSSION DIRECTE DES CORPS DURS ÉGAUX. 4—6, 32*—39*, 42, 43, 46—52, 92*—95*, 102, 104, 108, 109*—111*, 116, 118*, 121*—124*, 127, 130, 137, 138, 141, 143, 144*, 145, 159, 160, 173, 175, 179*, 184, 205—207, 214, 221, 358; Cas où il y a plusieurs corps égaux qui se touchent. 159*, 160*, 168*, 173, 174, 184*, 208, 209, 211*, 212*; Solution du cas le plus général. 36*—39*, 50—52, 102, 104, 110, 123*, 124*, 145, 179*.

PERCUSSION DIRECTE DES CORPS DURS INÉGAUX. 5—7, 25, 32, 33, 38—43, 46*—77*, 81*—92*, 94*—98*, 102, 116, 117, 125—141, 145—149, 151—158, 167—185, 205—208, 210*; Cas où les masses des corps sont inversement proportionnelles à leurs vitesses opposées. 6*, 11*, 22, 52*—65*, 66, 67, 96*, 115*, 143, 147, 175, 206; où l'un des corps est en repos. 5, 38—41, 48, 49, 50*, 51*, 64, 65, 70*, 71*, 94*, 95*, 96, 98, 102—104, 106, 116, 117, 125—137, 139, 141, 145, 146, 148, 149, 153—160, 171, 172, 173*, 174, 180*, 207; Détermination de la quantité de mouvement dans le sens de Descartes après le choc. 70*, 71*, 90*, 91*, 116, 158*, 159; Limites de la vitesse qu'un corps en mouvement peut communiquer à un corps en repos. 50*, 51*, 88, 89, 94*, 104, 106, 116*, 129, 146, 175; Solution du cas le plus général. 8*, 9, 11*, 13, 52, 53, 64*—71*, 72, 73, 90, 91, 95*, 96*, 132*, 133*, 134, 148, 151*, 152*, 158, 175, 180*.

PERCUSSION OBLIQUE DES CORPS DURS. 7*, 26*, 117*, 118*, 181*, 184*; Égalité de la vitesse d'éloignement et d'approchement dans le cas de deux corps sphériques. 26*, 118*, 119*.

PERTE DANS LE CHOC DE LA FORCE VIVE DU MOUVEMENT PROGRESSIF PAR LES VIBRATIONS. 14*—20*, 21.

PHILOSOPHIE. 182, 213, 237, 240; (voir *Atomistique*, *Constitution de la matière*, *Doctrine de l'immobilité de la terre*, *Étendue finie ou infinie du monde*, *Éther cosmique*, *Existence et perceptibilité, oui ou non*, *du mouvement absolu*, *Métaphysique*, *Mouvement absolu ou relatif*, *Nature de la force*, *Nature du mouvement*, *Polémique sur la question si l'essence des corps consiste dans l'étendue*, *Principe de la relativité de Huygens*, *Systèmes du monde*, *Théorie moderne de la relativité*); Philosophie d'Aristote. 190*, 240*, 341*, 350, 359*; de Baco de Verulam. 192; de Démocrite (voir *Atomistique*); de Descartes. 3*, 4*, 101*—103*, 105*, 106*, 172*, 191, 199*, 210, 214, 215, 221*, 233, 240, 242*, 341*, 342* (voir *Erreurs de Descartes*, *Géométrie Cartésienne*, *Tourbillons de Descartes*); de Leibniz. 199, 359*.

PHYSIQUE. 168, 201; (voir *Acoustique*, *Adhésion*, *Applications dans la physique de la théorie du choc*, *Atomistique*, *Attraction universelle*, *Cause du tonnerre*, *Chronométrie*, *Constitution de la matière*, *Distinction entre la masse d'un corps et sa gravité*, *Élasticité*, *Éther cosmique*, *Gravité*, *Loi de la conservation de l'énergie*, *Mécanique*, *Mesure universelle*, *Mouvement perpétuel*, *Optique*, *Poids et mesures*, *Pression supplémentaire d'une matière plus subtile que l'air*, *Retardement de la formation du vide de Torricelli*, *Théorie cinétique des fluides*, *Théorie moderne de la relativité*, *Vide*).

PLANÈTES. Mouvement des Planètes. 197, 233, 240, 250*, 251*.

PLANIMÉTRIE. 56, 57, 74—83.

POIDS ET MESURES. 280*, 304, 323—326, 356; (voir *Mesure universelle*); Mesure de l'épaisseur de choses très minces à l'aide de deux lentilles convexes qui se touchent. 183*, 184*.

POIDS MOBILE DU PENDULE POUR RÉGLER LES HORLOGES. 353*, 354*, 425*—433*.

POLÉMIQUE SUR LA QUESTION SI L'ESSENCE DES CORPS CONSISTE DANS L'ÉTENDUE. 199*, 221*.

PRESSION SUPPLÉMENTAIRE D'UNE MATIÈRE PLUS SUBTILE QUE L'AIR. 186*.

PRINCIPE DE LA RELATIVITÉ DE HUYGENS. 7*, 10*, 11*, 22—24, 27*, 32*—35*, 36—49, 66—69, 93*—97*, 103*, 106*—111*, 121*, 124*, 125*, 126—129, 141*—143*, 144—146, 161, 162*, 163*, 166*, 167*, 183, 184, 194*, 206*, 214, 215, 248*, 249*; (voir *Artifice de l'homme dans le bateau et de l'homme sur la rive joignant les mains*, *Théorie moderne de la relativité*).

PRINCIPE QUE LE CENTRE DE GRAVITÉ NE PEUT PAS MONTER PAR LE SEUL EFFET DE LA GRAVITÉ. 11*, 21*—23*, 56*—65*, 95*, 96*, 162*—167*, 357*, 358*, 597; Application à la détermination des centres d'oscillation. 357*, 358*, 360* (voir *Méthodes pour trouver le centre d'oscillation:* Méthode directe).

PRINCIPE QUE LE CENTRE DE GRAVITÉ SE PLACE AUSSI BAS QUE POSSIBLE. 56, 57, 331*—333*, 380*, 383.

PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL; (voir *Œuvres:* Demonstratio regulæ de maximis et minimis); Méthode de Cavalieri. 340, 347, 348*, 378*; Méthode de Fermat pour les maxima et minima. 153*.

PROBLÈMES SUR LA PERCUSSION DES CORPS DURS. 117, 133*—135*, 154*—156*.

PROPRIÉTÉS DES CORPS DURS. 14*, 15*, 21*, 92*, 105—108, 113, 140, 160, 168, 175, 176, 183*, 185, 204, 210*; (voir *Percussion des corps durs*).

RÉFRACTION. Explication de Pardies. 184.

RÈGLES DE LA PERCUSSION EN GÉNÉRAL. 4*—8*, 10*, 11*, 14*, 99—101, 104, 112, 113, 116, 117, 124, 137—140, 150*, 156, 171, 172, 173*—179*, 181*, 182, 184, 189*, 201, 202, 214.

RÉSISTANCE DE L'AIR CONTRE LE MOUVEMENT DES CORPS. 102, 221—222, 228 (voir *Chute des corps sphériques dans un milieu résistant*, *Chute des graves:* Influence d'un milieu résistant, *Pendule:* Influence de la résistance de l'air).

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX; (voir *Lieu de rupture d'une poutre homogène soutenue en deux points*).

RETARDEMENT DE LA FORMATION DU VIDE DE TORRICELLI. 186.

RÉVERSIBILITÉ. 21—23, 357, 360; de la percussion des corps durs. 11*, 22, 46*—49* 95*, 116, 146.

RÔLE DU FROTTEMENT DANS LA PERCUSSION. 7, 26, 118.

SATELLITES DE JUPITER. Mouvement. 250, 251.

STABILITÉ ET INSTABILITÉ DYNAMIQUE. 306*—308*, 309.

STATIQUE. 56, 57, 227, 256, 257, 310, 311*, 331*; (voir *Centre de gravité*, *Chaînette*, *Égalité de l'action et de la réaction*, *Élasticité*, *Équilibre de poids suspendus à des cordes*, *Historique de quelques notions employées dans la mécanique:* Moment statique, *Hydrostatique*; *Œuvres:* Travaux divers de statique et de dynamique, *Principe que le centre de gravité se place aussi*

bas que possible, *Résistance des materiaux*); Réduction des problèmes de la dynamique à la statique. 247; Théorèmes concernant l'équilibre sur un plan incliné. 280, 281, 305, 306, 310, 311.

SURFACES COURBES; (voir *Paraboloïde de révolution*).

SYSTÈMES DU MONDE. 190*—199*, 240; (voir *Doctrine de l'immobilité de la terre*, *Étendue finie ou infinie du monde*, *Tourbillons de Descartes*); d'Aristarque. 190; de Bruno. 191; de Copernic. 101, 142, 172, 190, 191*, 192, 193, 195, 197, 230, 233; de Galilée. 191; de Huygens. 192; de Kepler. 190, 230, 240; de Newton. 193, 250; de Ptolémée. 101, 190, 192, 195; de Tycho Brahe. 195.

TAUTOCHRONISME DE LA CYCLOÏDE; (voir *Isochronisme de la cycloïde*).

TERMINOLOGIE DE HUYGENS DANS LA MÉCANIQUE. 195*, 243*, 245*, 358*—360*, 376*; (voir *Historique de quelques notions employées dans la mécanique:* Gravitatis descensus, Vis motus).

TERRE; (voir *Doctrine de l'immobilité de la terre*, *Influence de la rotation de la terre sur la chute des graves et la marche des pendules*); Aplatissement 237; Définition de la rotation de la terre par rapport aux étoiles. 233*; Diamètre de la terre. 304, 305, 323—325, 326*; Grandeur de la rotation de la terre pour que la force centrifuge à l'équateur devienne égale à la pesanteur. 323*—325*; Variation de la gravité à la surface de la terre. 237, 238, 324.

THÉORIE CINÉTIQUE DES FLUIDES. 21*, 151*.

THÉORIE DE LA LUMIÈRE. 150*, 151, 172, 184*, 185, 210; (voir *Œuvres:* Traité de la lumière).

THÉORIE MODERNE DE LA RELATIVITÉ. 27, 248*.

TOURBILLONS DE DESCARTES. 4, 172.

TRAVAUX D'AUTRES QUE HUYGENS SUR LES RÈGLES DE LA PERCUSSION. Auzout. 172; Borelli. 179*, 203*; Croone. 173; Dechales. 164*, 165*, 206*; Descartes. 4*—6*, 7, 8, 11—13, 30, 100, 101, 105, 108, 131, 138—140, 156*, 179, 182, 203, 204, 207 (voir *Erreurs de Descartes:* dans la théorie de la percussion); Fabri. 179*, 182*, 183*, 203; Galilée. 9*, 10*, 11, 99*, 100*, 112, 113, 138*, 150, 151, 178*, 179*, 182; Hooke. 173; Marci. 100*, 101; Mariotte. 200*, 207*—212*; Pardies. 206*, 207*; de Raei. 101; Rooke. 173, 181; van Schooten. 7; de Sluse. 171, 172; Wallis. 175, 176*, 204*—206*, 210; Wren. 173—175, 176*, 181*, 204*, 205*, 208, 210.

VIDE. Existence du vide. 199—221; Expériences sur le vide. 183, 186*.

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

Page	*Au lieu de*	*lifez*
6 *ligne* 16	dece	de ce
8 *note* 4 *ligne* 1	note 8	note 9
9 „ 5	5)	6)
„ „ 6	6)	7)
	Cette note correspond à la ligne 13 *de la p.* 8, *tandis que la note fuivante correspond à la dernière ligne de la p.* 8.	
„ „ 7 *ligne* 2	doctrine	théorie
„ „ „	*Ajoutez :* Voir la note 2 de la p. 204.	
„ „ 9 *ligne* 3	précédée	précédé
10 *ligne* 7 *d'en bas*	p. 130	p. 137
„ „ 5 „ „	p. 138	p. 137
12 *note* 3 *ligne* 4	note 2 de la p. 156	note 6 de la p. 157
16 „ 2 „ 1	contra-preſſion	contre-preſſion
22 *ligne* 6 *des notes*	note 9 de la p. 163	note 2 de la p. 164
23 *note* 8	) Voir	8) Voir
24 „ 2	les notes 8 des pp. 163 et 165	la note 1 de la p. 164 et la note 11 de la p. 165
26 „ 6 *ligne* 1	conſidèrait	conſidérait
30 „ 1 „ 6	manuſcrit	manuſcrits
33 *ligne* 18	occurſu quibus	occurſu et quibus
„ *note* 5 *ligne* 1	quibus	et quibus
„ „ „ „ 2	accedentia	accidentia
35 *ligne* 6	faciet	faciat

Voir la feuille 58 *verſo du portefeuille „De Motu ex Percuſſione" (texte de Huygens; c'est le „Manuſcrit d'environ* 1656" *mentionné c.a. à la p.* 10, *dans la note* 4 *de la* 54 *et dans la note* 1 *de la p.* 137). *Dans la „Copie F" (qui n'eſt autre que le Manuſcrit nommé dans le premier alinéa de la note* 1 *de la p.* 30) *le mot „faciet" a été corrigé*

Page	*Au lieu de*	*lisez*
	en „faciat". Néanmoins cette erreur du copiste a pénétré dans le Traité tel qu'il a été publié par les auteurs des „Opuscula postuma" de 1703.	
35 *ligne* 17	socii motam	socii, motam
51 *note* 2	*La correction de l'expression „collisa" (qui se trouve aussi dans le „Manuscrit d'environ* 1656*" de Huygens) en „sibi impacta" n'est pas de la main de Huygens, mais de la personne qui a ajouté au texte de la „Copie F" (p.* 51*, troisième ligne d'en bas) les mots „quare constat propositum".*	
53 *ligne* 7 *d'en bas*	*La phrase „Hinc autem dictum theorema jam demonstrari poterit" fut ajoutée par Huygens.*	
54 *note* 2	*En changeant „descendenti" en „decidenti" Huygens corrige une erreur du copiste. Comparez la note* 4 *de la p.* 54.	
55 *ligne* 21	DE, sit	DE sit
	La virgule se trouve dans la „Copie F", mais non pas dans le Manuscrit de Huygens.	
56 *note* 4	*Huygens corrige ici une erreur du copiste. Comparez la note* 4 *de la p.* 54.	
57 *ligne* 1	corporis A, centrum	corporis A centrum
	La virgule a été introduite à tort par les éditeurs des „Opuscula Postuma".	
57 *lignes* 16—22	*Dans le „Manuscrit d'environ* 1656*" Huygens annote en marge que l'axiome qu'il souligne „motu corporum qui a gravitate ipsorum proficiscitur, centrum commune gravitatis ipsorum non posse attolli" doit être imprimé „majusculis literis".*	
59 *ligne* 8	MP, ad PL	MP ad PL
	La virgule a été introduite à tort par le copiste.	
59 *dernière ligne*	M, sit	M sit
	Même remarque.	
61 *ligne* 13 *d'en bas*	ante;	ante,
	Erreur des éditeurs des „Opuscula postuma".	
62 „ 4	si	si
75 „ 3	CE, æqualis	CE æqualis
	Virgule introduite à tort par les éditeurs des „Opuscula postuma".	
75 „ 4 *d'en bas*	BC, ad AC	BC ad AC
	Virgule introduite à tort par le copiste.	
80 *note* 2 *ligne* 6	$\frac{4\, m_A m_B}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)}$	$\frac{4\, m_A m_B}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)}\, v_A$
81 *ligne* 2	CE quod	CE. quod
	Omission des éditeurs des „Opuscula postuma".	

Page	*Au lieu de*	*lisez*
81 *ligne* 8 *d'en bas*	C dico	C. dico
	Même remarque.	
„ *dernière ligne*	LQ, ad	LQ ad
	Virgule introduite à tort par le copiste.	
83 *première ligne*	MR, celeritas	MR celerltas
	Même remarque.	
88 *ligne* 10	de B	B
91 „ 4 *des notes*	note 2 de la p. 158	note 9 de la p. 159
„ *note* 6 *ligne* 11	4677000000000 à 1	1 à 4677000000000
„ „ „ *dernière ligne*	note 2 de la p. 158	note 6 de la p. 158
93 *ligne* 4 *des notes*	celle	celui
95 „ 3 *d'en bas*	[ax. 2^1)]	[ax. 2^2)]
„ *note* 6 *ligne* 5	ſymmetrie	ſymétrie
101 „ 8 „ 7	terra	terræ
„ „ „ „ 10	chûte	chute
103 *ligne* 6	aliùs	alſus
104 „ 5 *d'en bas*	compendi	compendii
107 *note* 10 *ligne* 6	Billard	„Billard
111 *dernière ligne*	conſiſtet	conſiſtat
„ „ „	abiat	alias
112 *première* „	motus. animadvertitur	motus animadvertitur
114 *ligne* 5 *d'en bas*	ſunt	ſunt
117 *note* 12 *ligne* 4	p. 154	p. 155
118 „ 1 „ 3	ſi elle	ſ'il
119 „ 7 „ 1	mois	mais
122 *ligne* 4	punctu	puncti
131 *note* 16 *ligne* 2	note 1	note 2
„ „ 17	„ 18	„ 19
136 *avant-dernière ligne*	τω	τῳ
143 *note* 15 *ligne* 3	ſunt	ſint
145 „ 2 „ 7	parla	par la
147 „ 10 „ 1	avec	par
148 „ 1 „ 5	s'adopter	s'adapter
„ „ „ „ 10	movibetur	movebitur
„ „ 1 „ 15	eadem	eandem
159 „ 12 „ 6	note 13	note 12
167 „ 2 „ 3	„ 10	„ 11
172 „ 6 „ 3	Quiliet. *Le nom de cet auteur s'écrit auſſi* Quillet.	
184 „ 9 „ 9	„Reflexiones mathematicæ"	„Reflectiones phyſico-mathematicæ"
193 „ 9 *dernière ligne*	deuxième.	deuxième

Page	*Au lieu de*	*lisez*
194 *note* 3 *ligne* 1	terzio	terzo
„ „ „ „ 2	Vol. II	Vol. I
196 „ 1 „ 2	ou, si	ou si
	La virgule, qui ne se trouve pas dans la lettre manuscrite de Leibniz, a été introduite à tort dans le T. X (p. 645).	
202 „ 1	p. 63B—66B	p. 315—318
204 „ 2 „ 3	luce	lucem
„ *ligne* 9	aliquot	aliquot jam
220 *note* 3 *ligne* 2	Tome	Tome (p. 255—301)
220 „ 3 „ 3	(p. 255)	(p. 315—318)
224 „ 1 „ 5	page 224	page présente
230 „ 5	*poid*	*poids*
233 „ 4 „ 2	troisième	quatrième
242 *lignes* 13—20.	*Nous aurions pu observer que le traité de Descartes, intitulé „le Monde", n'a été publié qu'en* 1664.	
245 *ligne* 12	conoide	conoïde
„ „ „	paraboloide	paraboloïde
„ „ 17	forcecentrifuge	force centrifuge
248 „ 2 *des notes*	Goewry	Gueury
256 *lignes* 1, 4, 5	liège	liége
340 *note* 1 *dernière ligne*	note 1	note 14
349 „ 6 *ligne* 2	ou	où
354 „ 1 „ 1	III	III,
361 „ 6	suspension	suspension.
377 *ligne* 7 *d'en bas*	qui nous	qui vous
383 *note* 4 *ligne* 9	rupture en A	rupture en K
456 „ 1 „ 7	octobre	octobre.
458 „ 2 „ 2	III	IV
„ „ 2 „ 7	Fig. 7	Fig. 17
463 *troisième ligne d'en bas de la note* 3	note 2 de la p. 478	note 2 de la p. 476
466 *note* 4 *ligne* 5	où AX est	où X est
471 *alinéa* 5 „ 3	$\overline{\Sigma}z^2$	Σz^2
485 *note* 7 „ 2	$\overline{\Sigma}r^2$	Σr^2

SOMMAIRE.

De motu corporum ex percussione 1
Extrait d'une lettre de M. Hugens à l'auteur du journal sur les regles du mouvement dans la rencontre des corps 169
Manuscrits ultérieurs concernant l'historique de la théorie du choc des corps et la question de l'existence et de la perceptibilité du „mouvement absolu" ... 187
De vi centrifuga 235
Travaux divers de statique et de dynamique de 1659 à 1666 329
Tables.
I. Pièces et mémoires 559
II. Personnes et institutions mentionnées 566
III. Ouvrages cités 576
IV. Matières traitées 583
Additions et corrections 596

Bibliothèques Université d'Ottawa Echéance	Libraries University of Ottawa Date Due

a39003 006145147b

Université d'Ottawa / University of Ottawa
COLL ROW MODULE SHELF BOX POS C
333 15 10 06 01 23 9